

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PAVIA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Dipartimento di Elettronica

ANALISI DI GIUNZIONI 3D IN GUIDA D'ONDA

VALUTAZIONE DEI TERMINI QUASI-STATICI DELLA
MATRICE DI AMMETTENZA GENERALIZZATA

Relatore : Chiar.mo Prof. M. BRESSAN

Correlatore : Dott. Ing. L. PERREGRINI

Tesi di Laurea
di Maurizio BOZZI

Anno Accademico 1995/96

INDICE

INTRODUZIONE 4

CAPITOLO 1 ANALISI DI UNA GIUNZIONE 7

1. Definizione della matrice di ammettenza 8
2. Il metodo BIRME 10
3. Svantaggi della rappresentazione attuale dei parametri di ammettenza 12
4. Modifiche apportate 14

CAPITOLO 2 FUNZIONI DI GREEN 16

1. Relazioni fondamentali 17
2. Notazione adottata 19
3. Funzione di Green elettrica 20
 - La funzione scalare g_e 21
 - La funzione diadica solenoidale G_e 22
 - La serie modale G_e' 24
4. Funzione di Green magnetica 25
 - La funzione scalare g_m 26
 - La funzione diadica solenoidale G_m 26
 - La serie modale G_m' 28

CAPITOLO 3 MATRICE DI AMMETTENZA 29

1. Espressione integrale dei campi 30
2. Distribuzione delle sorgenti 32
3. Condizioni al contorno 35
4. Applicazione del Metodo dei Momenti 38
5. Calcolo della matrice di ammettenza 41

CAPITOLO 4 ESPRESSIONE IN FORMA CHIUSA DI Y_1 44

1. Espressione dei termini di bassa frequenza 45
2. Riscrittura di Y_1 46
3. Forma chiusa per Y_1 48
4. Funzione di Green dello spazio libero 50

CAPITOLO 5 IL PROGRAMMA 52

1. Scelta delle funzioni di base 53
2. Calcolo delle matrici 56
3. Proiezione dei campi magnetici di porta 58
4. Termine di valor principale 61
5. Nuovi integrali singolari 63

CAPITOLO 6 VERIFICA DEI RISULTATI 68

1. Confronto con espressioni analitiche 69
2. Il termine Y_{-1} 72
3. Il termine Y_1 74
4. Analisi di una struttura complessa 75
5. Conclusioni e prospettive 79

APPENDICE A CALCOLO DELLA FUNZIONE g_m 80

APPENDICE B CALCOLO DELLA FUNZIONE G_m 84

1. Espansione modale di G_m 85
2. Determinazione di G_m in forma di serie 87
3. Determinazione di G_m in forma chiusa 91

APPENDICE C CALCOLO DEL ROTORE DI G_M 94

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI 97

INTRODUZIONE

L'interesse sempre crescente per la modellizzazione di componenti tridimensionali in guida d'onda è dimostrato dal cospicuo numero di pubblicazioni dedicate all'argomento negli ultimi anni.

Molti componenti in guida d'onda di interesse applicativo presentano geometrie complicate (per ragioni di compattezza), che non si prestano ad essere scomposte in regioni elementari di forma semplice.

La caratterizzazione elettromagnetica di questi componenti non può essere effettuata con tecniche relativamente semplici ed efficienti (con metodi di "Mode Matching" [23] o riconducendo il dispositivo ad una struttura planare [13],[8]), ma richiede algoritmi in grado di considerare volumi di forma arbitraria.

Gli algoritmi per l'analisi elettromagnetica di circuiti tridimensionali maggiormente diffusi sono basati sul "Finite Element Method" (FEM) [31] e sul "Finite Difference-Time Domain" (FDTD) [37]: questi metodi sono basati su una discretizzazione dell'equazione dei campi in forma differenziale, e richiedono quindi una segmentazione volumetrica della struttura; questo comporta elevate esigenze di allocazione di memoria e lunghi tempi di calcolo.

Quando il mezzo all'interno del circuito è omogeneo, risulta estremamente vantaggioso l'utilizzo del "Boundary Element Method" (BEM) [18]: in questo caso, viene descritta (e quindi segmentata) solo la superficie della struttura, con una notevole diminuzione del numero di incognite del problema ed una forte riduzione dei tempi di calcolo.

Alcuni programmi commerciali per l'analisi elettromagnetica di circuiti tridimensionali (come HFSS, prodotto dalla Hewlett-Packard) sono basati sulla determinazione dei campi ad una singola frequenza, e consentono di ottenere la caratterizzazione del dispositivo su tutta la banda di interesse solo con un elevato numero di analisi frequenza per frequenza: per questo motivo tali programmi sono difficilmente utilizzabili per la sintesi o l'ottimizzazione di giunzioni complesse.

Negli ultimi anni, presso il Laboratorio di Microonde dell'Università di Pavia, è stato messo a punto un nuovo metodo per l'analisi a larga banda di circuiti tridimensionali ([5],[9]), basato su una speciale espressione dei parametri di ammettenza e su un algoritmo efficiente per la determinazione dei campi modali e dei numeri d'onda risonanti della cavità ottenuta cortocircuitando le porte del circuito.

L'espressione a larga banda dei parametri di ammettenza, che si ottiene utilizzando tale metodo, risulta dalla somma di tre termini:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\eta k} \mathbf{Y}_{-1} + \frac{jk}{\eta} \mathbf{Y}_1 + \frac{jk^3}{\eta} \mathbf{Y}_3(k) \quad (1)$$

I primi due, \mathbf{Y}_{-1} e \mathbf{Y}_1 rappresentano i termini di bassa frequenza, mentre \mathbf{Y}_3 rappresenta una serie modale rapidamente convergente.

I termini di bassa frequenza sono espressi in forma chiusa sotto l'ipotesi restrittiva che i tronchi di guida in corrispondenza delle porte del circuito siano di lunghezza sufficientemente elevata: questa limitazione ha effetti non trascurabili sulle potenzialità di utilizzo del programma di analisi.

Nel presente lavoro, si è sviluppato un algoritmo, formalmente analogo a quello cui si accennava poco sopra, che permette di esprimere in forma chiusa, senza alcuna ipotesi restrittiva, i termini di bassa frequenza della matrice di ammettenza generalizzata.

Questo nuovo algoritmo consente, innanzi tutto, di ridurre in modo significativo la dimensione del problema e, conseguentemente, di limitare fortemente i tempi di calcolo; in secondo luogo, permette di analizzare strutture complesse, considerando separatamente i singoli sotto-blocchi, anche in situazioni precedentemente non trattabili.

Nel Capitolo 1 viene presentata una rassegna dettagliata dei problemi legati all'algoritmo precedente, dei vantaggi derivanti dall'utilizzo del nuovo approccio, e della complicazione formale che il nuovo metodo impone.

Il nuovo approccio, infatti, richiede di considerare come sorgenti anche correnti di tipo magnetico, per le quali non era disponibile un'espressione adatta al computo numerico della funzione di Green del risuonatore sferico, utilizzata nella teoria come *propagatore di campo*: nel Capitolo 2, dopo una presentazione delle proprietà generali delle funzioni di Green, viene calcolata l'espressione della funzione di Green di tipo magnetico, adatta al computo numerico, in una forma simile a quella ricavata in [10] per la funzione di Green di tipo elettrico.

I Capitoli 3 e 4 rappresentano il nucleo teorico di tutto il lavoro, in quanto contengono l'esposizione del metodo che consente di ricavare le espressioni in forma chiusa dei termini di bassa frequenza della matrice di ammettenza generalizzata.

Nel Capitolo 4, in particolare, si discute come si possano calcolare i termini di bassa frequenza a prescindere dalla presenza del risuonatore sferico, nel quale si fanno irradiare le correnti; la presenza di tale risuonatore risulta invece indispensabile nel calcolo dei campi modali e dei numeri d'onda di risonanza, per la valutazione del termine \mathbf{Y}_3 sia con il vecchio che con il nuovo approccio, in quanto consente di ricavare tali quantità mediante la soluzione un problema lineare agli autovalori.

I parametri della giunzione sono infatti indipendenti dalla funzione di Green usata per rappresentare i campi; la scelta della funzione di Green dipende solo dalla possibilità di calcolare in modo più agevole le quantità richieste, per ridurre i tempi di calcolo e migliorarne l'accuratezza.

Nel Capitolo 5 vengono discussi i problemi legati all'implementazione del programma di calcolo, basato sulla teoria esposta nei Capitoli precedenti: tra gli argomenti trattati, si ricordano la scelta del tipo di segmentazione superficiale e delle funzioni di base, la proiezione dei campi magnetici di porta sulle funzioni di base e la necessità di trattare in modo differenziato gli integrali nei punti di singolarità della funzione di Green.

Nel Capitolo 6 vengono presentate alcune verifiche per la validazione del programma, quali la precisione dei risultati, al confronto con valori ottenuti teoricamente.

Completano il lavoro tre Appendici, nelle quali sono esposti i dettagli di calcolo per le funzioni di Green ricavate nel Capitolo 2.

Desidero ringraziare il Prof. Marco Bressan per i preziosi consigli e la costante collaborazione nello sviluppo delle teorie presentate in questo lavoro, e l'Ing. Luca Perregrini per il paziente aiuto fornito nella stesura del programma e nella revisione del testo.

ANALISI DI UNA GIUNZIONE

In questo Capitolo viene presentata la teoria di base per l'analisi a larga banda di giunzioni tridimensionali in guida d'onda; per giunzione si intende una regione di forma arbitraria, racchiusa da un conduttore metallico, che contiene un mezzo omogeneo, isotropo e senza perdite e che comunica con l'esterno attraverso uno o più tronchi di guida (vedi Fig.1a).

Le sezioni terminali S_1, S_2, \dots, S_Q delle guide costituiscono le *porte fisiche* del circuito; su ogni porta fisica vengono definite più *porte*, caratterizzate da una tensione e da una corrente modale, rappresentate dai modi di guida che si propagano o che hanno bassa attenuazione alla massima frequenza di lavoro; poiché su ogni guida è definito almeno un modo, il numero N dei modi supera quello delle porte fisiche, cioè $N \geq Q$.

Il metodo proposto per l'analisi delle giunzioni è basato sulla matrice di ammettenza generalizzata, che consente di definire una relazione tra la corrente modale del modo p -esimo e la tensione modale del modo q -esimo; si tratta di un metodo generale per la caratterizzazione di strutture multi-porta, utilizzato anche per l'analisi di circuiti a bassa frequenza.

Inoltre, si discute la rappresentazione dei parametri di ammettenza utilizzata in vari algoritmi di analisi elettromagnetica sviluppati presso il Laboratorio di Microonde dell'Università di Pavia ([2], [3], [13]): tale rappresentazione si basa su una versione modificata della formulazione di Foster dei parametri di ammettenza, che vale sotto l'ipotesi di considerare, per ciascuna porta fisica, un tronco di guida sufficientemente lungo. Questa ipotesi semplificativa può rappresentare, in taluni casi, una seria limitazione all'efficacia del programma di analisi.

Si valutano, infine, le modifiche da apportare alla formulazione teorica della matrice di ammettenza generalizzata, che consentano di superare le restrizioni imposte dal metodo attuale e, quindi, di considerare i tronchi di guida delle porte fisiche di lunghezza arbitraria. Il nuovo approccio richiede di trattare sorgenti equivalenti di tipo sia elettrico che magnetico, con una conseguente complicazione formale, ma rappresenta ugualmente un miglioramento interessante per il programma di analisi, sia per quanto riguarda il tempo e l'accuratezza del calcolo che per la possibilità di estendere le potenzialità di analisi a situazioni prima difficilmente trattabili.

1. DEFINIZIONE DELLA MATRICE DI AMMETTENZA

Si consideri la giunzione rappresentata in Fig. 1a, comprendente Q tronchi di guida, sui quali siano definiti complessivamente N modi.

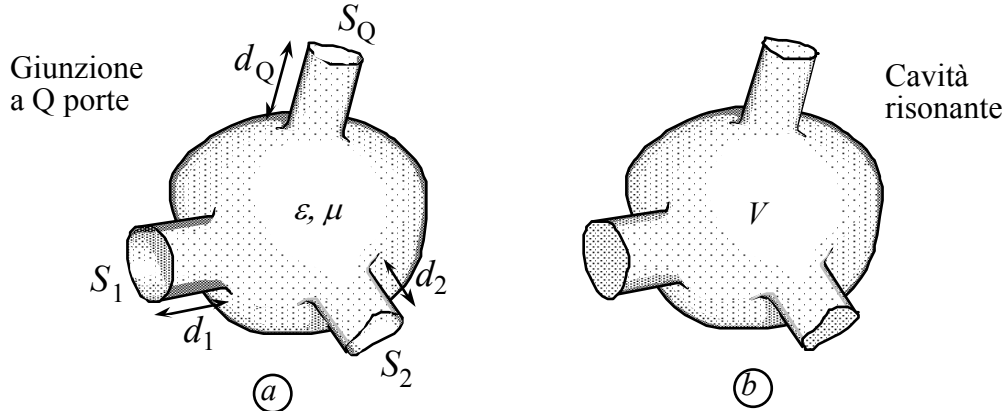


Fig. 1 -

- a. Geometria di una giunzione tra Q guide.
 b. La cavità ottenuta cortocircuitando le porte.

Il generico elemento della matrice di ammettenza di una giunzione multi-porta è definito dalla seguente relazione:

$$y_{pq} = \frac{I_p}{V_q} \Big|_{V_p=0 \text{ per } p \neq q} \quad (p, q = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

dove N è il numero di modi, I_p è la corrente modale del p -esimo modo (corrispondente ad una ben definita porta), V_q è la tensione modale sulla q -esima porta, quando tutte porte (tranne la q -esima) sono corto-circuitate.

Secondo la teoria delle cavità risonanti, i campi all'interno di una giunzione possono essere espansi in autovettori irrotazionali e solenoidali; tale espansione conduce alla rappresentazione di Foster dei parametri di ammettenza [20]:

$$y_{pq} = \frac{A_{pq}}{j\eta k} + \frac{jk}{\eta} \sum_i \frac{C_{pi} C_{qi}}{\kappa_i^2 - k^2} \quad (p, q = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

dove $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ è il numero d'onda, η è l'impedenza caratteristica del mezzo, A_{pq} rappresenta una serie che dipende solo dalle autofunzioni irrotazionali.

I coefficienti C_{pi} , C_{qi} sono dati da:

$$C_{pi} = \int_{S_p} \mathbf{h}_p \cdot \mathbf{H}_i \, dS \quad (3)$$

\mathbf{h}_p rappresenta il vettore modale magnetico del p-esimo modo in guida, mentre κ_i e \mathbf{H}_i indicano il numero d'onda di risonanza e il vettore di campo magnetico (normalizzato) dell'i-esimo modo risonante della cavità che si ottiene corto-circuitando le porte della giunzione nella sezione terminale (Fig. 1b).

L'espressione (2) rappresenta una formulazione a larga banda dei parametri di ammettenza, in quanto la relazione è valida a qualsiasi frequenza, a condizione che la sommatoria sia estesa fino a modi risonanti a frequenze di molto superiori a quella di lavoro. L'accuratezza della rappresentazione dipende dal troncamento delle serie.

Sfortunatamente, la serie che definisce A_{pq} e quella che compare esplicitamente in (2) convergono molto lentamente, e possono essere troncate solo dopo aver sommato un numero molto elevato di termini; questo ne impedisce, di fatto, l'utilizzo in programmi di analisi circuitale ai quali si richiedano tempi rapidi di risposta.

Una *soluzione al problema della lenta convergenza* delle serie che compaiono in (2) viene proposta in [5], e consiste nell'estrazione dei termini di bassa frequenza e nella loro espressione in forma chiusa.

A bassa frequenza, se i tronchi delle guide di porta sono sufficientemente lunghi, le porte risultano disaccoppiate: l'ammettenza di ingresso y_{pp} coincide praticamente con l'ammettenza caratteristica del modo p-esimo, e le transammettenze sono tutte nulle.

In questo caso, si dimostra che vale la seguente espressione dei parametri di ammettenza:

$$y_{pq} \cong \frac{\delta_{pq}}{\eta} \left(\frac{\chi_p k_p}{jk} + \frac{jk}{(1 + \chi_p)k_p} \right) + \frac{jk^3}{\eta} \sum_i \frac{C_{pi} C_{qi}}{\kappa_i^2 (\kappa_i^2 - k^2)} \quad (4)$$

dove k_p è il numero d'onda di taglio del p-esimo modo di porta, χ_p vale 1 o 0 a seconda che il p-esimo modo sia TE o TM e δ_{pq} è il simbolo di Kronecker.

In questa espressione, i termini di bassa frequenza sono espressi in forma chiusa e la serie rimanente converge più rapidamente della serie originale, grazie alla presenza dell'ulteriore fattore k^2/κ_i^2 . Questa approssimazione è considerata valida se il tronco di guida è lungo almeno $\lambda_c/2$, dove λ_c è la lunghezza d'onda di taglio del modo fondamentale della guida: in caso contrario cade l'ipotesi del disaccoppiamento tra le porte.

Grazie alla buona convergenza della serie, gli y_{pq} possono essere calcolati accuratamente, per qualsiasi valore di ω fino alla massima frequenza di lavoro, sommando un numero ragionevole di termini della serie che compare in (4): in pratica, vengono considerati solo i modi con frequenza di risonanza inferiore a ξf_{MAX} , con $\xi \cong 2 \div 3$; questo richiede di calcolare un numero limitato di autovalori κ_i (poli) e di coefficienti C_{pi} (residui), consentendo in questo modo rapidi tempi di calcolo.

2. IL METODO BIRME

La determinazione dei parametri di ammettenza nella forma (4) richiede il calcolo di κ_i e di \mathbf{H}_i (sulle porte), per i modi risonanti fino a una frequenza di poco superiore alla massima frequenza di interesse. Si suppone che le guide terminali abbiano sezione rettangolare o circolare, cosicché siano noti i modi delle guide.

Per calcolare i numeri d'onda di risonanza κ_i e i vettori di campo magnetico \mathbf{H}_i dei modi risonanti della cavità ottenuta corto-circuitando le porte, viene utilizzato il metodo BIRME (Boundary Integral - Resonant Mode Expansion) [6].

Il metodo BIRME rappresenta una variante del BIM (Boundary Integral Method): il BIM è basato sulla soluzione di un'equazione integrale omogenea, ottenuta imponendo la condizione di parete elettrica al campo prodotto da una lamina di corrente elettrica incognita, che scorre sulla superficie del circuito e che irradia nello spazio libero.

Poiché la corrente irradia nello spazio libero, il nucleo dell'equazione integrale è rappresentato dalla funzione di Green dello spazio libero, che è una funzione trascendente complessa della frequenza.

L'applicazione del Metodo dei Momenti (MoM) [17, 26] consente di trasformare l'equazione integrale in un problema matriciale agli autovalori: gli autovalori rappresentano le frequenze di risonanza del circuito e gli autovettori forniscono le correnti modali.

Tuttavia, a causa della dipendenza complessa della funzione di Green dalla frequenza, il problema agli autovalori che si ottiene con il BIM è non lineare: la ricerca delle soluzioni risulta difficile, richiede metodi iterativi e lunghi tempi di calcolo.

Con il metodo BIRME, la struttura da analizzare viene racchiusa in un risonatore sferico (Fig. 2): la sfera esterna non perturba i modi risonanti della struttura, in quanto tali modi hanno il campo esterno nullo.

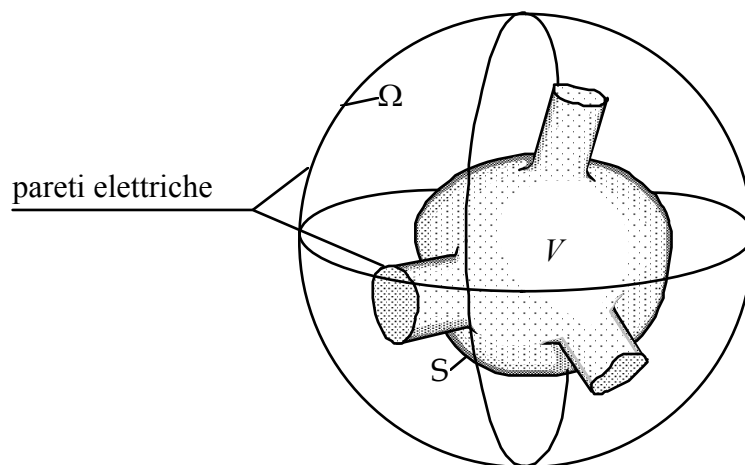


Fig. 2 - Il circuito racchiuso nel risonatore sferico.

In questo caso, la corrente incognita agisce nel risuonatore sferico, quindi il nucleo dell'equazione integrale è costituito dalla funzione di Green della sfera, che è una funzione reale della frequenza e può essere approssimata molto bene da funzioni razionali [11].

La funzione di Green della sfera è espressa come somma di una parte quasi-statica, nota in forma chiusa, che costituisce l'approssimazione di bassa frequenza, e di una serie rapidamente convergente, che comprende i modi risonanti della cavità sferica.

Il problema agli autovalori che si ottiene dall'applicazione del MoM risulta lineare e non richiede quindi metodi iterativi di soluzione.

La presenza del risuonatore sferico, se da un lato non perturba i modi risonanti della struttura (che presentano un campo esterno nullo), dall'altro consente che si instauri la risonanza di modi esterni, che risuonano nel volume complementare ($\Omega-V$) compreso tra la superficie del circuito e quella della sfera.

Tali modi soddisfano la condizione di parete elettrica sulla superficie del circuito S_V , imposta con il MoM, e sulla superficie della sfera S_Ω , derivante dalla definizione della funzione di Green; presentano quindi un campo diverso da zero nel volume complementare al circuito, e nullo all'interno (Fig.3). I modi esterni possono essere eliminati valutando il campo all'interno e all'esterno del circuito.

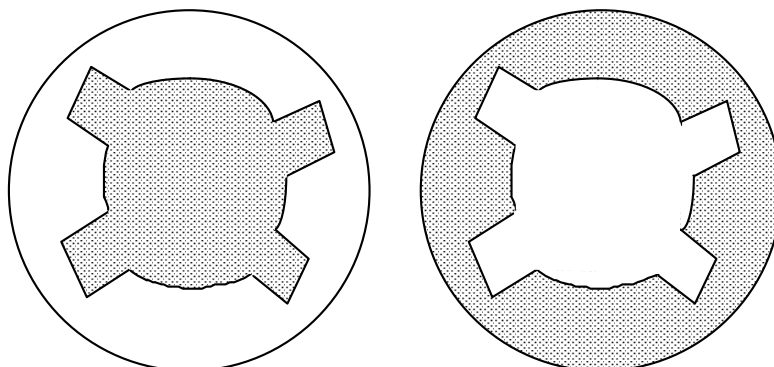


Fig 3 - Modi interni e modi esterni.

Nonostante questo inconveniente, l'utilizzo del metodo BIRME per la determinazione dei modi risonanti risulta vantaggioso, grazie soprattutto all'efficienza e all'affidabilità dei metodi di soluzione dei problemi lineari agli autovalori.

L'efficienza di questo metodo deriva dal fatto che la risposta del circuito su tutta la banda di interesse viene ottenuta mediante una singola analisi elettromagnetica (quella che serve a determinare i poli e i residui), evitando così le ripetute analisi frequenza per frequenza che rendono assai oneroso l'utilizzo di altri metodi.

3. SVANTAGGI DELLA RAPPRESENTAZIONE ATTUALE DEI PARAMETRI DI AMMETTENZA

La necessità di utilizzare tronchi di guida di lunghezza almeno $\lambda_c/2$ rappresenta un serio problema in alcune applicazioni del programma di analisi.

Qualora, infatti, la struttura nella sua forma nativa non soddisfi le condizioni imposte sulla lunghezza dei tronchi di guida, è necessario prolungare artificialmente le guide per poter applicare questo metodo di analisi; l'esigenza di aggiungere tronchi di guida conduce, in molti casi, a considerare i risonatori sferici (nei quali si racchiude la struttura) di dimensioni maggiori del minimo necessario.

La conseguenza più diretta dell'incremento delle dimensioni della cavità sferica è l'*aumento del numero di modi risonanti della cavità sferica*, utilizzati per rappresentare i campi elettrico e magnetico all'interno del circuito: la rappresentazione BIRME dei campi **E** ed **H**, infatti, contiene una sommatoria sui modi sferici.

Il numero di modi sferici che risuonano entro una certa frequenza cresce proporzionalmente al cubo del raggio della sfera, ed ha una ricaduta diretta sulla dimensione delle matrici del problema.

La seconda conseguenza dell'incremento della dimensione della sfera è rappresentata da un *aumento dei modi esterni*: se la parte di cavità sferica esterna al circuito ha dimensioni paragonabili o persino maggiori della parte di cavità occupata dal circuito, numerosi modi esterni risuonano a frequenze che rientrano nella banda di interesse; questo appesantisce il calcolo e deteriora la qualità dell'analisi.

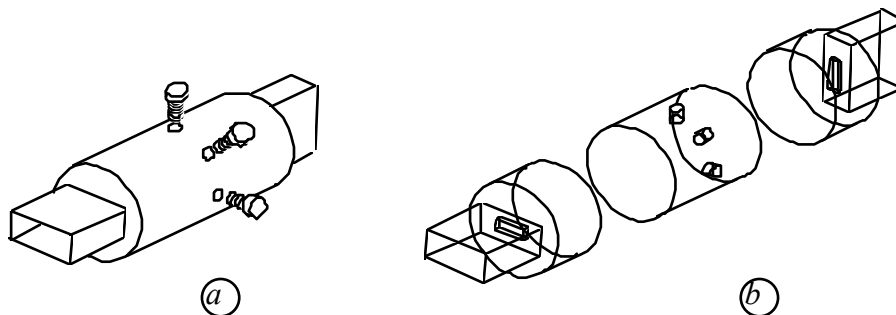


Fig. 4 -
a) Geometria del filtro intero.
b) Geometria del filtro segmentato.

Un ulteriore inconveniente è legato all'*analisi di strutture particolarmente complesse*: in alcuni casi, infatti, risulta vantaggioso analizzare sotto-blocchi del circuito e,

successivamente, calcolare la matrice di ammettenza globale ponendo in cascata le matrici di ammettenza dei singoli blocchi.

Il caso tipico è quello di una giunzione costituita da tratti di guida rettilinei, separati da discontinuità poste a breve distanza (Fig. 4).

Per analizzare una discontinuità alla volta, è necessario allungare in maniera fittizia i tronchi di guida, ricavare i parametri di ammettenza sulla sezione terminale della guida, e da questi risalire ai parametri nella sezione di interesse (dove si è segmentata la struttura).

Per i modi al di sopra della frequenza di cut-off, questa operazione non è problematica (bisogna soltanto tenere conto dello sfasamento dovuto alla propagazione); per i modi evanescenti, invece, ci si trova di fronte a un problema mal condizionato, in quanto l'ampiezza dei campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} presenta un andamento esponenziale decrescente con la lunghezza del tronco di guida: quando si ricavano i parametri di ammettenza sulla sezione di interesse, l'errore nella ricostruzione aumenta con andamento esponenziale, quindi piccoli errori numerici nel calcolo della matrice di ammettenza conducono a forti errori nel risultato finale.

4. MODIFICHE APPORTATE

L'obiettivo principale di questo lavoro riguarda la formulazione di un metodo per la caratterizzazione a larga banda di circuiti a microonde, attraverso la matrice di ammettenza, libero da restrizione sulla lunghezza dei tronchi di guida.

Nel caso si considerino i campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} nel circuito generati dalle sole correnti equivalenti di tipo elettrico [6], non è possibile trovare un'espressione in forma chiusa dei termini di bassa frequenza dei parametri di ammettenza, senza introdurre l'ipotesi di disaccoppiamento tra le porte.

Qualora vengano introdotte sorgenti equivalenti sia di tipo elettrico che di tipo magnetico, è invece possibile ottenere una formulazione dei parametri di ammettenza senza la necessità di ipotizzare il disaccoppiamento tra le porte; la teoria completa viene sviluppata nel Capitolo 3.

La forma ottenuta per i parametri di ammettenza risulta simile alla versione di Foster modificata (4), cioè compaiono due termini di bassa frequenza (proporzionali a k^{-1} e a k) espressi in forma chiusa, ed una serie rapidamente convergente, ma non si deve avanzare alcuna ipotesi sulla lunghezza dei tronchi di guida.

La presenza di sorgenti di tipo elettrico e di tipo magnetico rende necessaria la conoscenza della funzione di Green sia di tipo elettrico che di tipo magnetico: poiché si pensa di racchiudere il circuito da analizzare in una cavità sferica, è indispensabile conoscere le funzioni di Green elettriche e magnetiche per il risonatore sferico.

La funzione di Green di tipo elettrico del risonatore sferico è nota [11] e viene già utilizzata nell'analisi dei circuiti con il metodo attuale; la funzione di tipo magnetico, viceversa, è disponibile in letteratura solo in forma di serie lentamente convergente; nel Capitolo 2 si ricava un'espressione della funzione di Green magnetica più adatta al computo numerico.

A fronte di una certa complicazione teorica, questo nuovo approccio consente di avere fondamentalmente tre effetti positivi:

1. La riduzione della dimensione della sfera comporta una diminuzione del numero di modi della cavità sferica, che risuonano a frequenze inferiori a ξf_{MAX} ; il calcolo di questi modi è necessario per descrivere i campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} , e la loro ampiezza costituisce una delle incognite del problema: la riduzione del numero di modi sferici comporta direttamente la riduzione della dimensione delle matrici da calcolare.
2. La maggiore compattezza della struttura, e di conseguenza le ridotte dimensioni della sfera che la racchiude, limita fortemente il numero di modi esterni, che risuonano nel volume complementare al circuito in esame al di sotto di f_{MAX} , riducendo il tempo di analisi e migliorando l'accuratezza del calcolo. Infatti, i modi esterni vengono calcolati come quelli interni, e solo alla fine un'apposita procedura provvede a eliminarli: se da un lato, dunque,

la loro presenza appesantisce il calcolo perché aumenta le dimensioni del problema, dall'altro il rischio di non discriminarli correttamente dai modi interni conduce ad errori nel calcolo dei campi e riduce l'accuratezza dell'analisi.

3. La possibilità di analizzare strutture particolarmente complesse, sezionando il circuito in sotto-blocchi da analizzare uno alla volta, rappresenta un altro risultato importante. Questo nuovo approccio consente di sezionare la struttura dove si ritiene più opportuno: non si ha più la limitazione di inserire, per ogni sotto-blocco, tronchi di guida che permettono di soddisfare le ipotesi di disaccoppiamento tra le porte. Non c'è più, quindi, la necessità di risalire dai parametri di ammettenza calcolati sulla sezione terminale a quelli sulla sezione di interesse con un problema mal condizionato: questo riduce fortemente gli errori.

FUNZIONI DI GREEN

Si introducono in questo Capitolo le funzioni di Green del risuonatore sferico, utilizzate per la valutazione della matrice di ammettenza (nel Capitolo seguente).

E' necessario disporre sia della funzione di Green di tipo elettrico, sia della funzione di Green di tipo magnetico, in quanto le sorgenti equivalenti del problema sono rappresentate da lamine di corrente elettrica e magnetica.

Nella prima parte del Capitolo si mostrano le relazioni che definiscono le funzioni di Green di una cavità risonante di forma arbitraria, derivate dall'applicazione delle equazioni di Maxwell; successivamente, si considera il caso particolare di cavità di forma sferica.

La funzione di Green di tipo elettrico per il risuonatore sferico è disponibile in letteratura [6] e viene semplicemente riportata per completezza; l'espressione fornita risulta adatta al calcolo numerico: la funzione di Green elettrica è costituita da due termini di bassa frequenza, contenenti le singolarità ed espressi in forma chiusa, e da una serie modale rapidamente convergente.

Per il caso magnetico, al contrario, la funzione di Green per regioni chiuse è disponibile soltanto in forma di serie lentamente convergente, inadatta al computo numerico.

Nell'ultima parte del Capitolo, pertanto, vengono estratti dalla serie e calcolati in forma chiusa i termini di bassa frequenza della funzione di Green magnetica del risuonatore sferico, cioè quelli contenenti le singolarità, in modo tale da ottenere una serie con buone caratteristiche di convergenza; i dettagli matematici di questo sviluppo teorico sono rimandati alle Appendici.

L'espressione finale fornita per la funzione di Green magnetica ha caratteristiche adatte al calcolo numerico: i due termini a bassa frequenza, contenenti le singolarità, sono espressi in forma chiusa, mentre la serie modale non contiene singolarità e converge sommando un numero ridotto di termini.

1. RELAZIONI FONDAMENTALI

Si consideri una cavità risonante di volume V , racchiusa da una superficie S perfettamente conduttrice e riempita di un mezzo lineare, isotropo e omogeneo (di parametri costitutivi ϵ , μ).

I campi elettrico e magnetico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ed $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ all'interno della cavità possono essere rappresentati in termini delle sorgenti (vere o equivalenti), rappresentate da densità di correnti elettriche e magnetiche $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ed $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$, attraverso le funzioni diadiche di Green.

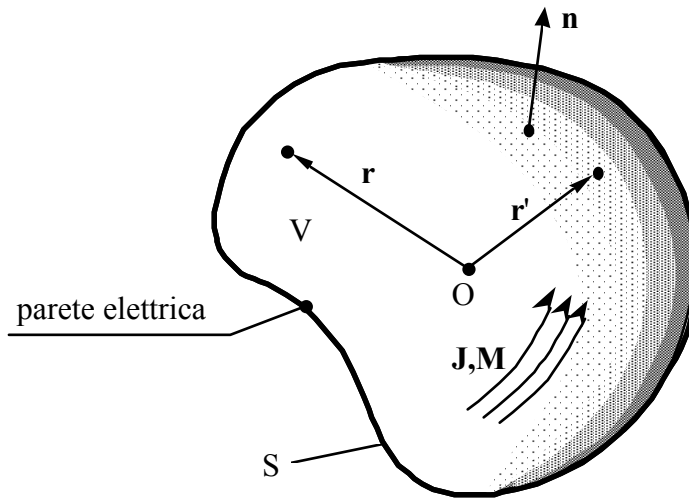


Fig. 1 - Rappresentazione di una generica cavità risonante.

Usando la notazione introdotta da Marcuvitz ([22], pag. 92):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= - \int \underline{\mathbf{G}}_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' - \int \underline{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV' \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= - \int \underline{\mathbf{G}}_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' - \int \underline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV'\end{aligned}\tag{1}$$

In queste espressioni, \mathbf{r} ed \mathbf{r}' rappresentano, rispettivamente, il punto di osservazione e il punto sorgente, e gli integrali si intendono estesi al volume V , nel senso del valore principale ove necessario ([11], [36]).

I campi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ed $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, espressi in termini di funzioni di Green all'interno della cavità risonante, devono soddisfare le equazioni di Maxwell e le opportune condizioni al contorno. Questo implica che le funzioni di Green non possano essere scelte arbitrariamente, ma che debbano soddisfare anch'esse alcune proprietà; tali proprietà si ottengono imponendo che i campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} scritti nella forma (1) soddisfino le equazioni di Maxwell.

Nel caso in cui le sorgenti siano rappresentate da correnti elettriche e magnetiche, le equazioni di Maxwell assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}\end{aligned}\quad (2)$$

Sostituendo le espressioni (1) nelle equazioni di Maxwell, si possono dedurre alcune proprietà generali delle funzioni di Green; in particolare, risulta [22]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{11} - k^2 \underline{\mathbf{G}}_{11} &= j\omega\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{I} \\ \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{G}}_{11} &= 0 \quad \text{sul contorno}\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{22} - k^2 \underline{\mathbf{G}}_{22} &= j\omega\varepsilon \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{I} \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{22}) &= 0 \quad \text{sul contorno}\end{aligned}\quad (4)$$

dove $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ rappresenta il numero d'onda, mentre $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ indica la delta di Dirac.

Si osservi che le funzioni $\underline{\mathbf{G}}_{11}$ e $\underline{\mathbf{G}}_{22}$ soddisfano la stessa equazione delle onde, ma con differenti condizioni al contorno.

Le altre due funzioni di Green, $\underline{\mathbf{G}}_{12}$ e $\underline{\mathbf{G}}_{21}$, sono legate alla $\underline{\mathbf{G}}_{11}$ e alla $\underline{\mathbf{G}}_{22}$ dalle seguenti relazioni:

$$\underline{\mathbf{G}}_{12} = \frac{\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{22}}{j\omega\varepsilon}\quad (5)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{21} = -\frac{\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{11}}{j\omega\mu}\quad (6)$$

Infine, è utile ricordare una relazione tra i termini incrociati (elettrico-magnetico e magnetico-elettrico), riportata sempre in [22]:

$$\underline{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\underline{\mathbf{G}}_{21}^T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\quad (7)$$

2. NOTAZIONE ADOTTATA

Nel seguito si abbandona la notazione di Marcuvitz e si preferisce adottare un simbolismo che tenga conto delle relazioni intercorrenti tra le quattro funzioni di Green, riportate nel precedente paragrafo. Si definiscono allora:

$$\underline{\mathbf{G}}_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega\mu \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (8)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (9)$$

Dalle relazioni (5) e (6) si ricava:

$$\underline{\mathbf{G}}_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (10)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (11)$$

Con la notazione scelta, i campi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ed $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ all'interno della cavità si possono rappresentare nella forma seguente:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' - \int \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV'$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' - j\omega\varepsilon \int \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV'$	(12)
--	------

Le espressioni delle funzioni di Green elettriche e magnetiche $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si possono determinare come soluzioni dei seguenti problemi:

$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \underline{\mathbf{I}}$ $\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{sul contorno}$	(13)
--	------

$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \underline{\mathbf{I}}$ $\mathbf{n} \times [\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = 0 \quad \text{sul contorno}$	(14)
--	------

Poiché le funzioni $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}$ si ottengono dalle $\underline{\mathbf{G}}_{11}$ e $\underline{\mathbf{G}}_{22}$ per semplice scalatura (a riprova di questo, si considerino le relazioni (8) e (9)), si possono estendere alle $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}$ le considerazioni formulate nel paragrafo precedente per le $\underline{\mathbf{G}}_{11}$ e $\underline{\mathbf{G}}_{22}$.

La relazione (7), infine, risulta:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}^T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (15)$$

3. FUNZIONE DI GREEN ELETTRICA

La funzione di Green elettrica $\underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, nel caso di regioni chiuse, può essere espressa in forma di serie: la rappresentazione come sommatoria di autofunzioni si ricava con metodi generali ([22], [32]) ed è disponibile in letteratura ([28], [34], [19], [33]) per cavità di forme differenti.

Tale sommatoria, tuttavia, presenta una lenta convergenza quando il punto campo \mathbf{r}' ed il punto sorgente \mathbf{r} sono vicini, a causa della singolarità della $\underline{\mathbf{G}}_E$ per $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$.

Questo è un serio inconveniente per algoritmi numerici che richiedono il calcolo del campo elettrico nella zona delle sorgenti, dove la convergenza è debolissima e, di conseguenza, sono necessari tempi di calcolo estremamente elevati per ottenere una sufficiente accuratezza computazionale.

Uno studio delle funzioni di Green per regioni chiuse [10] evidenzia che la funzione $\underline{\mathbf{G}}_E$ presenta una singolarità dominante, che diverge come R^{-3} (dove R è la distanza tra il punto sorgente e il punto campo), ed una singolarità più debole, che diverge come R^{-1} : la funzione di Green di una regione chiusa presenta infatti le stesse singolarità della funzione di Green dello spazio libero.

L'estrazione dei termini singolari (e la loro espressione in forma chiusa) rappresenta un miglioramento notevole, in quanto la serie risultante gode di proprietà di convergenza decisamente superiori.

Con riferimento a [10], la $\underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ può essere scomposta nella somma di tre termini, ognuno dei quali soddisfa le condizioni al contorno: il primo termine è irrotazionale e contiene la singolarità dominante, il secondo è solenoidale e contiene la singolarità più debole, il terzo (pure solenoidale) non presenta singolarità.

$$\underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_e'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (16)$$

Affinché la $\underline{\mathbf{G}}_E$ soddisfi l'equazione delle onde per le diadi (13), le singole componenti devono soddisfare le seguenti equazioni. Inoltre, si richiede che ciascun termine soddisfi le condizioni al contorno della $\underline{\mathbf{G}}_E$.

Per la funzione scalare g_e :

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \quad (17)$$

Per le funzioni solenoidali $\underline{\mathbf{G}}_e$ e $\underline{\mathbf{G}}_e'$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{I} - \nabla \nabla' g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}_e'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= k^2 \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{G}}_e &= \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{G}}_e' = 0 \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \quad (18)$$

Nel seguito, si considera il caso di un risonatore sferico di raggio a : le funzioni g_e e \underline{G}_e vengono calcolate in forma chiusa, mentre per la funzione \underline{G}_e' (priva di singolarità) viene espressa in forma di serie.

• **LA FUNZIONE SCALARE $g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$**

La funzione $\nabla \nabla' g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ rappresenta l'approssimazione quasi-statica della $\underline{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

La $g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la somma di una parte singolare e di una regolare: la singolarità g_δ è uguale a quella della funzione di Green dello spazio libero e non dipende dalle condizioni al contorno; il termine regolare, invece, è soggetto alla condizione di annullamento della g_e sul contorno.

$$g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (19)$$

La funzione singolare, in analogia con la funzione di Green dello spazio libero, si può scrivere:

$$g_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} \quad (20)$$

La $g_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la funzione regolare, che dipende dalle condizioni al contorno e soddisfa il problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \\ g_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi R} \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \quad (21)$$

Per la cavità sferica di raggio a , si utilizza il metodo delle immagini per ricavare:

$$g_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi a} f_0 \quad (22)$$

dove la funzione ausiliaria f_0 è definita da:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hu + h^2}} \quad (23)$$

mentre $h = r r'/a^2$ ed $u = \cos \psi$, dove ψ è l'angolo sotteso dai vettori \mathbf{r} ed \mathbf{r}' .

In definitiva, la funzione $g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ assume la forma:

$$\boxed{g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi a} f_0} \quad (24)$$

• **LA FUNZIONE DIADICA SOLENOIDALE $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$**

La $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ contiene la singolarità più debole della funzione di Green, cioè il termine che diverge come R^{-1} ; la funzione è nota in forma di sommatoria:

$$\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2} \quad (25)$$

dove \mathbf{e}_m e κ_m indicano il vettore modale elettrico e il numero d'onda di risonanza del modo m -esimo della cavità sferica (vedere [25], per esempio).

La funzione $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è calcolata in forma chiusa in [11], dove si utilizza il sistema di riferimento $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ mostrato in Fig. 2. Espressioni lievemente modificate sono ricavate in [6], allo scopo di ottenere una formulazione più conveniente in fase di calcolo, e vengono riportate di seguito per completezza.

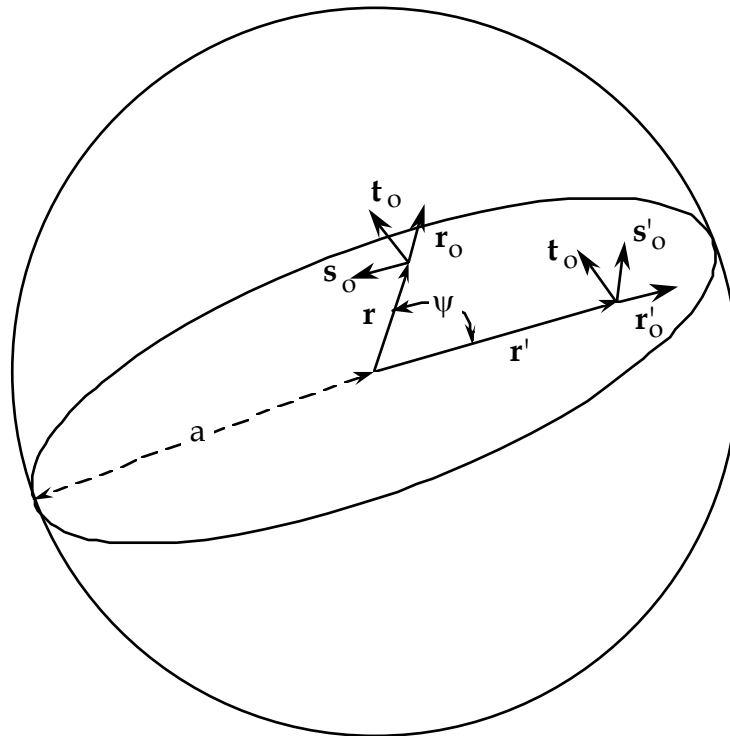


Fig. 2 - Il sistema di riferimento $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

L'espressione della funzione $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è:

$$\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi R} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right) + \underline{\mathbf{G}}_e^0 \quad (26)$$

$\underline{\mathbf{G}}_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la parte regolare della diade e si scrive come somma di 5 componenti (per le considerazioni sulle simmetrie discusse in [11]):

$$\underline{\mathbf{G}}_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{r}_0 \mathbf{r}'_0 G_{rr'}^0 + \mathbf{r}_0 \mathbf{s}'_0 G_{rs'}^0 + \mathbf{s}_0 \mathbf{r}'_0 G_{sr'}^0 + \mathbf{s}_0 \mathbf{s}'_0 G_{ss'}^0 + \mathbf{t}_0 \mathbf{t}'_0 G_{tt}^0 \quad (27)$$

$$G_{rr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{4\pi a} \left[\frac{(r^2 + r'^2 - 2a^2)(u - h)}{4a^2} f_0^2 + \frac{3r^2 + 3r'^2 + 9a^2 + a^2 h^2}{a^2} f_1 + f_2 + \frac{h - 3u}{4} \right] \quad (28)$$

$$G_{rs'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{v}{16\pi a} f_0 \left[4f_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2} \right) \left(\frac{r^2 + 3a^2}{2a^2} f_3 + f_4 \right) + \left(3 + \frac{r^2 + r'^2 - 2a^2}{a^2} f_0^2 \right) \right] \quad (29)$$

$$G_{sr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -G_{rs'}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (30)$$

$$G_{ss'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0^2 (a^2 - r^2)(a^2 - r'^2)}{4\pi a^5} \left[3 \frac{f_1}{f_0} - u(f_3 + f_4) - f_0 \frac{h - u}{4} \right] - \frac{f_0 (u + hv^2 f_0^2)}{8\pi a} \quad (31)$$

$$G_{tt}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{4\pi a} \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{r'^2}{a^2} \right) (f_3 + f_4) f_0 - \frac{1}{2} \right] \quad (32)$$

Le funzioni $f_0 - f_4$ (definite in [6]) hanno la forma:

$$f_1 = \frac{1}{8hf_0} \left[f_0 - \frac{3}{h} \left(\frac{F(\beta, K) - 2E(\beta, K)}{2\sqrt{h}} + \frac{1/f_0}{1+h} \right) \right] \quad (33)$$

$$f_2 = \frac{1}{h^2 f_0} \left[\ln \left(\frac{1/f_0 + h - u}{1 - u} \right) - hf_0 \right] \quad (34)$$

$$f_3 = \frac{3}{4v^2 h^2 f_0^2} \left[\frac{(1+u)(1+h-2hu)}{1+h} f_0 - \frac{(1-u)F(\beta, K) + 2uE(\beta, K)}{2\sqrt{h}} \right] \quad (35)$$

$$f_4 = \frac{1}{v^2 h^2 f_0^2} \left[1 + (hu - 1)f_0 \right] \quad (36)$$

In queste espressioni, $F(\beta, K)$ ed $E(\beta, K)$ rappresentano gli integrali ellittici, rispettivamente di prima e seconda specie, di argomento $\beta = \arcsin[2\sqrt{h}/(1+h)]$ e modulo $K = \sqrt{(1+u)/2}$, nella definizione di Abramowitz [1].

- **LA SERIE MODALE $\underline{\mathbf{G}}_e'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$**

La funzione $\underline{\mathbf{G}}_e'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ rappresenta il termine non singolare della funzione di Green, è solenoidale e viene espressa in forma di serie rapidamente convergente.

Dal problema (18) si ricava [10]:

$$\underline{\mathbf{G}}_e'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (37)$$

La condizione al contorno è soddisfatta per la definizione di \mathbf{e}_m .

Si osservi, inoltre, che la sommatoria della funzione $\underline{\mathbf{G}}_e'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ha buone proprietà di convergenza, e richiede quindi un tempo di calcolo limitato, pur senza disporre dell'espressione in forma chiusa.

4. FUNZIONE DI GREEN MAGNETICA

Il calcolo della funzione di Green magnetica viene condotto in modo perfettamente analogo al calcolo della funzione di Green elettrica: confrontando i problemi (13) e (14), infatti, si può notare che la $\underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e la $\underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sono definite dalla stessa equazione delle onde per le diadi, ma soddisfano diverse condizioni al contorno.

Poiché la parte singolare delle funzioni di Green non dipende dalle condizioni al contorno, si deduce immediatamente che le singolarità della funzione $\underline{\mathbf{G}}_M$ sono le stesse della funzione $\underline{\mathbf{G}}_E$, e cioè le stesse della funzione di Green dello spazio libero (per quanto detto nel paragrafo precedente).

La funzione $\underline{\mathbf{G}}_M$, pertanto, può essere formalmente espressa in modo analogo alla funzione $\underline{\mathbf{G}}_E$, cioè come somma di tre termini: il primo, irrotazionale, che contiene la singolarità dominante, il secondo, solenoidale, che contiene la singolarità più debole, il terzo, pure solenoidale, privo di singolarità.

$$\underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_m'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (38)$$

Le tre componenti della funzione di Green magnetica sono definite da equazioni analoghe a quelle che definiscono le componenti della funzione di Green elettrica, ovviamente con diverse condizioni al contorno.

Per la funzione scalare g_m :

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{V} \\ \frac{\partial}{\partial n} g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \quad (39)$$

dove V è il volume della cavità (sull'aggiunta di questo termine si discute in Appendice A).

Per le funzioni solenoidali $\underline{\mathbf{G}}_m$ e $\underline{\mathbf{G}}_m'$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \underline{\mathbf{I}} - \nabla \nabla' g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}_m'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= k^2 \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m) &= \mathbf{n} \times (\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m') = 0 \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \quad (40)$$

Al solito, il problema viene risolto per il caso particolare di risonatore sferico: per le funzioni che presentano singolarità (cioè la g_m e la $\underline{\mathbf{G}}_m$) si calcola l'espressione in forma chiusa, mentre per la $\underline{\mathbf{G}}_m'$ (che non ha singolarità) viene proposta un'espressione in forma di serie.

- **LA FUNZIONE SCALARE $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$**

Il calcolo in forma chiusa della funzione scalare $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ viene svolto in Appendice A, ove si dimostra che la funzione g_m può essere scritta come somma di tre contributi: il primo è la singolarità $1/4\pi R$, il cui laplaciano fornisce la δ ; il secondo termine g_v deve avere un laplaciano uguale a $1/V$; il terzo contributo g_m^0 è la soluzione dell'equazione di Laplace omogenea e deve soddisfare la condizione al contorno. Quindi la funzione $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ assume la forma:

$$g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (41)$$

La funzione $g_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è data da:

$$g_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} \quad (42)$$

La funzione $g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ risulta:

$$g_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{r^2 + r'^2 - 3a^2}{8\pi a^3} \quad (43)$$

La soluzione dell'equazione omogenea $g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ diventa:

$$g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi a} \left[f_0 - \ln \frac{1/f_0 - hu + 1}{2} - 1 \right] \quad (44)$$

La funzione ausiliaria f_0 è la stessa definita da (23).

In definitiva, la funzione scalare $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ha la seguente forma:

$$\boxed{g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} + \frac{r^2 + r'^2 - 3a^2}{8\pi a^3} + \frac{1}{4\pi a} \left[f_0 - \ln \frac{1/f_0 - hu + 1}{2} - 1 \right]} \quad (45)$$

- **LA FUNZIONE DIADICA SOLENOIDALE $\underline{G}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$**

Analogamente alla funzione $\underline{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, anche per la funzione $\underline{G}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si può scrivere un'espressione in forma di sommatoria:

$$\boxed{\underline{G}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_m \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2}} \quad (46)$$

dove $\mathbf{h}_m(\mathbf{r})$ sono gli autovettori magnetici della cavità sferica, disponibili in letteratura [35].

Si dimostra che tale sommatoria soddisfa l'equazione (40): i due membri della (40), infatti, sono uguali, in quanto hanno la stessa divergenza e lo stesso rotore. La condizione al contorno è garantita dalla definizione di $\mathbf{h}_m(\mathbf{r})$.

La funzione $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ presenta gli stessi problemi della funzione $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, cioè una debole convergenza della serie quando il punto-campo è prossimo al punto-sorgente, a causa della singolarità di tipo R^{-1} della funzione.

Anche in questo caso, come per la funzione $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, è possibile trovare un'espressione in forma chiusa per la $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$; i dettagli del calcolo sono discussi in Appendice B e di seguito si riportano i risultati ottenuti:

$$\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi R} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right) + \underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (47)$$

La parte regolare si scrive come somma di 5 componenti, per ragioni di simmetria del tutto analoghe a quelle della funzione di Green elettrica.

$$\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{r}_0 \mathbf{r}'_0 G_{rr'}^0 + \mathbf{r}_0 \mathbf{s}'_0 G_{rs'}^0 + \mathbf{s}_0 \mathbf{r}'_0 G_{sr'}^0 + \mathbf{s}_0 \mathbf{s}'_0 G_{ss'}^0 + \mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0 G_{tt}^0 \quad (48)$$

$$G_{rr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{16\pi a} \left[f_0^2 (u-h) \frac{r^2 + r'^2 - 2a^2}{a^2} - (3u-h) - 4f_1 \frac{r^2 + r'^2 - a^2(1-h^2)}{a^2} \right] \quad (49)$$

$$G_{rs'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{v f_0^2}{16\pi a} \left[\left(\frac{r^2 + r'^2}{a^2} - 2 \right) f_0 - \frac{3}{f_0} + 2 \left(\frac{r^2}{a^2} - 3 \frac{r'^2}{a^2} - 1 + 3h^2 \right) f_3 \right] \quad (50)$$

$$G_{sr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -G_{rs'}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (51)$$

$$G_{ss'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{4\pi a} \left[\frac{(r^2 + r'^2 - 2a^2)(u-h)}{4a^2} f_0^2 + f_0^2 f_5 - \frac{3(u-h)}{4} + \frac{3(r^2 + r'^2) + a^2 + 9h^2}{3a^2} (f_1 - u f_0 f_3) - \frac{3(r^2 + r'^2) + 2a^2}{6a^2} h f_0 f_4 \right] \quad (52)$$

$$G_{tt}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{4\pi a} \left[\left(\frac{r^2 + r'^2}{2a^2} - \frac{7}{6} \right) - h f_2 + \left(\frac{r^2 + r'^2}{a^2} + \frac{1}{3} + 3h^2 \right) f_0 f_3 + \left(\frac{r^2 + r'^2}{2a^2} + \frac{1}{3} \right) h u f_0 f_4 - u f_0^2 f_5 \right] \quad (53)$$

La funzione f_5 è definita in Appendice B:

$$f_5 = \frac{1}{hv^2 f_0^3} \left[u \ln \left(\frac{1/f_0 + h - u}{1 - u} \right) + \ln \left(\frac{1/f_0 - hu + 1}{2} \right) \right] \quad (54)$$

- **LA SERIE MODALE $\underline{\mathbf{G}}_m'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$**

L'espressione di $\underline{\mathbf{G}}_m'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si ricava dal problema (40) in forma di serie. La trattazione è perfettamente analoga a quella condotta nel caso elettrico, e si ottiene:

$$\underline{\mathbf{G}}_m'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = k^2 \sum_m \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (55)$$

La sommatoria (55) ha le stesse caratteristiche di convergenza di (37): essendo priva di singolarità, si ottiene una descrizione accurata della funzione sommando un numero limitato di modi, e questo richiede un tempo di calcolo breve.

MATRICE DI AMMETTENZA

La teoria di base per la valutazione a larga banda della matrice di ammettenza viene sviluppata in questo Capitolo, a partire dalle espressioni dei campi **E** ed **H** ricavate nel Capitolo 2.

Per ricavare la matrice di ammettenza si considerano i campi generati da due tipi di correnti superficiali: le correnti elettriche su tutta la superficie della cavità, le correnti magnetiche solo sulle porte; le correnti magnetiche vengono espanse sui campi modali di porta, in funzione delle tensioni modali, e rappresentano la forzante del sistema.

Il metodo utilizzato per il calcolo delle frequenze di risonanza e dei campi modali delle cavità di forma arbitraria è il Boundary Integral Resonant Mode Expansion Method (BIRME Method): delle caratteristiche del BIRME si è già discusso nel Capitolo 1.

L'applicazione del metodo BIRME permette di ricavare i campi **E** ed **H** nella giunzione in funzione delle tensioni modali dei modi di porta; noti i campi magnetici, si possono dedurre le correnti modali dei modi di porta, che risultano pertanto legati linearmente alle tensioni modali: questo fornisce direttamente l'espressione della matrice di ammettenza generalizzata.

L'espressione che risulta è la somma di un termine proporzionale a $1/k$, di un termine proporzionale a k e di un termine che per k tendente a zero va a zero come k^3 .

Il formalismo è lo stesso che si ottiene con il programma di analisi ANAPLAN-W, nel caso di strutture planari, e con la teoria proposta in [10] per il caso tridimensionale, ma con il metodo presentato in questo Capitolo non è necessario ipotizzare che le porte siano disaccoppiate, né si pongono vincoli sulla lunghezza dei tronchi di guida.

1. ESPRESSIONE INTEGRALE DEI CAMPI

Le espressioni per i campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} di una cavità risonante di forma arbitraria, in funzione di sorgenti di tipo elettrico e magnetico, vengono ricavate nel Capitolo 2; supponendo di racchiudere la cavità in un risonatore sferico, i campi e le sorgenti risultano legati dalle funzioni di Green della sfera, secondo le relazioni precedentemente introdotte e riportate di seguito:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int \underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' - \int \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' - j\omega\varepsilon \int \underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \quad (2)$$

Poiché verranno considerate solo sorgenti di tipo superficiale, gli integrali si intendono estesi alla superficie della cavità.

Le funzioni di Green di tipo elettrico e magnetico possono essere scritte come:

$$\underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (3)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (4)$$

dove g_e e $\underline{\mathbf{G}}_e$ rappresentano i termini quasi-statici della funzione di Green elettrica, g_m e $\underline{\mathbf{G}}_m$ i termini quasi-statici della funzione di Green magnetica, κ_m il numero d'onda di taglio del modo risonante m-esimo della cavità sferica, \mathbf{e}_m ed \mathbf{h}_m i vettori modali elettrico e magnetico della cavità sferica.

Le espressioni dei rotori delle funzioni di Green sono:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (5)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (6)$$

Nuovamente, il primo termine rappresenta il contributo di bassa frequenza, il secondo una serie modale rapidamente convergente.

La stessa espressione dei campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} può essere interpretata in termini di potenziali vettori e scalari, considerati nella gauge di Coulomb; in analogia con [21], le espressioni dei campi risultano:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi - j\omega\mathbf{A} - \varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{F} \quad (7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla\psi - j\omega\mathbf{F} + \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A} \quad (8)$$

$\phi(\mathbf{r})$ e $\psi(\mathbf{r})$ rappresentano i potenziali scalari di tipo elettrico e magnetico:

$$\phi(\mathbf{r}) = \varepsilon^{-1} \int \mathbf{g}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}') \, dS' \quad (9)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \mu^{-1} \int \mathbf{g}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \frac{\nabla'_s \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{-j\omega} \, dS' \quad (10)$$

La quantità $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}')$ indica la carica elettrica; è definita dall'equazione di continuità:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}') = -\frac{\nabla'_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{j\omega} \quad (11)$$

I potenziali vettori $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, rispettivamente elettrico e magnetico, sono definiti come:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \, dS' + \mu k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \int \mathbf{e}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \, dS' \quad (12)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \varepsilon \int \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \, dS' + \varepsilon k^2 \sum_m \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r})}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \int \mathbf{h}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \, dS' \quad (13)$$

2. DISTRIBUZIONE DELLE SORGENTI

Per la rappresentazione dei campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} , le sorgenti di tipo elettrico sono correnti superficiali che vanno poste su tutta superficie del circuito, mentre le sorgenti magnetiche sono correnti superficiali poste solo in corrispondenza della sezione terminale delle porte (Fig. 1); le correnti magnetiche costituiscono la forzante del sistema.

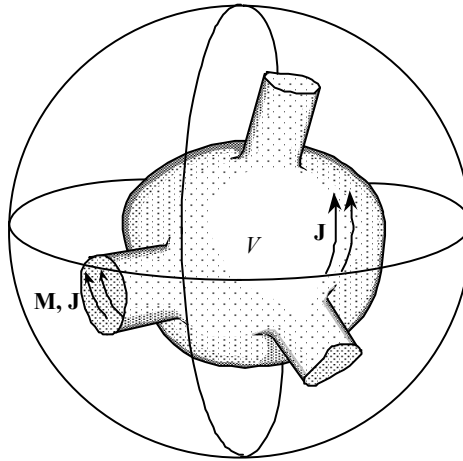


Fig. 1 - La distribuzione delle sorgenti sulla superficie della cavità.

Le lamine di corrente elettrica determinano una discontinuità del campo magnetico tangenziale, mentre le lamine di corrente magnetica rappresentano una discontinuità del campo elettrico tangenziale.

La densità superficiale di corrente elettrica viene scissa nella sua componente non solenoidale e solenoidale:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = -j\omega\mathbf{J}_q(\mathbf{r}') + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \quad (14)$$

dove \mathbf{J}_s rappresenta la parte solenoidale della corrente elettrica, \mathbf{J}_q la parte non solenoidale; le due componenti vengono espresse su due set di funzioni di base:

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{r}') = \sum_{j=1}^Q q_j \mathbf{v}_j(\mathbf{r}') \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') = \sum_{j=1}^P i_j \mathbf{w}_j(\mathbf{r}') \quad (16)$$

Le \mathbf{v}_j rappresentano un set di funzioni non solenoidali, le \mathbf{w}_j un set di funzioni solenoidali; valgono quindi le relazioni:

$$\nabla'_s \cdot \mathbf{v}_j \neq 0 \qquad \nabla'_s \cdot \mathbf{w}_j = 0 \qquad (17)$$

Solo le funzioni non solenoidali \mathbf{v}_j contribuiscono alla rappresentazione della carica elettrica, per la definizione stessa della carica fornita in (11); dunque si ottiene:

$$\sigma(\mathbf{r}') = -\frac{\nabla'_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{j\omega} = \sum_{j=1}^Q q_j \nabla'_s \cdot \mathbf{v}_j(\mathbf{r}') \qquad (18)$$

La densità di corrente magnetica, invece, viene espansa in funzione delle tensioni modali di porta:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = -\sum_{n=1}^N \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}') V_n = -\sum_{n=1}^N \mathbf{H}_n(\mathbf{r}') V_n \qquad (19)$$

dove \mathbf{E}_n ed \mathbf{H}_n rappresentano i vettori modali normalizzati relativi all' n -esimo modo di porta, e V_n rappresenta la corrispondente tensione modale.

Il versore \mathbf{n} indica la normale alla superficie della cavità, scelta con verso entrante per rispettare la convenzione adottata nella definizione della matrice di ammettenza.

L'indice n della sommatoria che compare in (19) rappresenta un indice generico per i campi modali di porta, ed N indica il numero totale di modi considerati.

Dopo aver così definito le sorgenti, l'espressione del campo elettrico \mathbf{E} può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -\nabla \int g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') dS' + \\ & -k^2 \int \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_q(\mathbf{r}') dS' - jk\sqrt{\varepsilon\mu} \int \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' + \\ & -k^2 \sum_{m=1}^M a_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) - \varepsilon \int \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \end{aligned} \qquad (20)$$

Analogamente l'espressione del campo magnetico \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & -jk \int \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_q(\mathbf{r}') dS' + \sqrt{\varepsilon\mu} \int \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' + \\ & + \frac{\varepsilon}{jk} \nabla \int g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' - jk\varepsilon \int \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' + \\ & - jk \sum_{m=1}^M a_m \kappa_m \mathbf{h}_m(\mathbf{r}) + jk\varepsilon \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r})}{\kappa_m^2} \int \mathbf{h}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \end{aligned} \qquad (21)$$

dove a_m è una variabile ausiliaria, che indica le ampiezze dei campi modali della cavità sferica imperturbata, usati per rappresentare i campi elettrico e magnetico sulla superficie del circuito.

La variabile a_m è definita come:

$$a_m = \frac{1}{\kappa_m^2(\kappa_m^2 - k^2)} \left(k^2 \int \mathbf{e}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_q(\mathbf{r}') dS' + jk\sqrt{\varepsilon\mu} \int \mathbf{e}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_q(\mathbf{r}') dS' + \varepsilon\kappa_m \int \mathbf{h}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \right) \quad (22)$$

Per ottenere una rappresentazione accurata dei campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} , la serie modale in (20) e (21) è troncata in corrispondenza di un valore di M tale per cui il numero d'onda di risonanza κ_M del modo sferico M -esimo sia un poco maggiore del numero d'onda k_{MAX} corrispondente alla massima frequenza di interesse: tipicamente vengono inclusi nella sommatoria tutti i modi che hanno $\kappa_m < 2 k_{MAX}$.

3. CONDIZIONI AL CONTORNO

Dopo aver definito la distribuzione delle sorgenti, restano da imporre le condizioni al contorno, che i campi devono soddisfare sulla superficie della struttura.

Sulle porte, la presenza della lamina di corrente magnetica stabilisce la discontinuità del campo elettrico tangenziale:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{\text{IN}} - \mathbf{E}_{\text{OUT}}) \quad (23)$$

Poiché il campo elettrico esterno è nullo, il campo elettrico tangenziale all'interno, in corrispondenza delle sezioni terminali delle porte, deve essere:

$$\mathbf{E}_{\text{IN}}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (24)$$

Per la definizione (19) della corrente \mathbf{M} , la condizione al contorno da imporre sulle porte si può formulare come:

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) V_n \quad (25)$$

Su tutto il resto della superficie, dove non si impongono lamine di corrente magnetica, vale la condizione di parete elettrica, quindi il campo elettrico tangenziale è nullo.

Si osservi che, formalmente, la relazione (25) rappresenta una condizione al contorno valida su tutta la superficie del circuito: nella porzione di superficie sulla quale non sono definite le porte, infatti, tutti i campi modali di porta sono nulli, e quindi la (25) impone che valga una condizione di parete elettrica.

Per imporre le condizioni al contorno, dunque, si valuta la componente tangenziale del campo elettrico in corrispondenza della superficie del circuito, proprio nella zona delle sorgenti: poiché il campo elettrico è espresso come integrale della funzione di Green, moltiplicata scalarmente per le correnti, quando il punto-campo coincide con il punto-sorgente si presentano problemi dovuti alla singolarità delle funzioni di Green, di cui si è discusso nel Capitolo 2.

In tutti questi casi, il valore che il campo assume sulla superficie delle sorgenti deve essere calcolato come il limite di $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, quando \mathbf{r} tende alla superficie:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{E}(\mathbf{r} \pm \delta \mathbf{n}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_S \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} \pm \delta \mathbf{n}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \quad (\mathbf{r} \in S) \quad (26)$$

Per valutare tale limite, si può isolare sulla superficie S un elemento intorno al punto \mathbf{r} , sufficientemente piccolo da poter considerare la superficie localmente piana (non vale per gli spigoli e i vertici) e la sorgente praticamente costante.

Scegliendo per comodità tale elemento (indicato con S_ε) di forma circolare di raggio ε , si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_S \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} \pm \delta \mathbf{n}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' = \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{S-S_\varepsilon} \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} \pm \delta \mathbf{n}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' + \int_{S_\varepsilon} \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} \pm \delta \mathbf{n}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Il primo termine di (27) è continuo, perché \mathbf{r} ed \mathbf{r}' non coincidono mai; nel secondo, si può considerare solo la parte singolare della funzione di Green, in quanto la parte regolare è continua e tende a zero con S_ε . Risulta pertanto:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{S_\varepsilon} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r} \pm \delta \mathbf{n}, \mathbf{r}') dS' \right] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (28)$$

dove $\mathbf{r} \in S$, $\tilde{\mathbf{G}}$ rappresenta la parte singolare della funzione di Green, ed il secondo integrale di (28) rappresenta il termine di valor principale.

Nel caso del campo elettrico rappresentato dalla relazione (20), solo l'ultimo integrale, quello contenente il rotore della funzione di Green magnetica (vedi Appendice C), fornisce un contributo di valor principale non nullo. L'integrale in questione ha la forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi R^3} (\mathbf{R} \times \mathbf{I}) dS' \right] \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (29)$$

Per l'integrazione di (29), si consideri il sistema di riferimento in Fig. 2, dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie, \mathbf{u} un generico versore tangente alla superficie nel punto di singolarità, \mathbf{R} ed R sono definiti come segue:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \delta \mathbf{n} - \rho \mathbf{u} \quad R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\delta^2 + \rho^2} \quad (30)$$

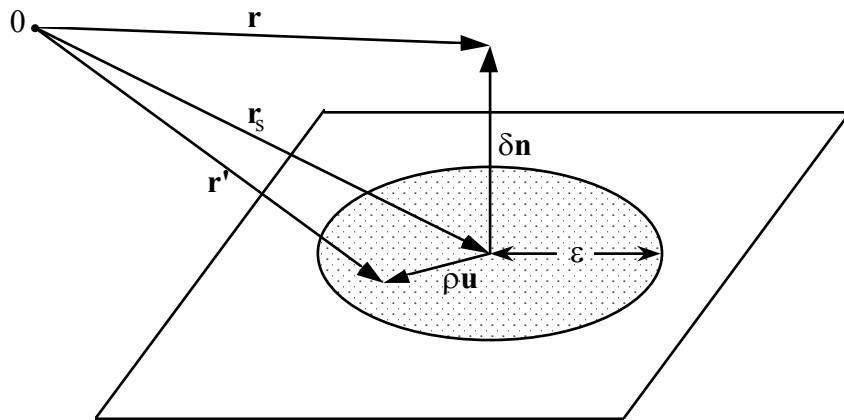


Fig. 2 - Il sistema di riferimento locale.

Il termine di valor principale risulta:

$$\begin{aligned}
 p_v &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi R^3} (\mathbf{R} \times \mathbf{I}) dS' \right) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(2\pi \int_0^\varepsilon -\frac{1}{4\pi(\sqrt{\delta^2 + \rho^2})^3} (\pm\delta \mathbf{n} - \rho \mathbf{u}) \rho d\rho \right) \times \mathbf{M}(\mathbf{r})
 \end{aligned} \tag{31}$$

Poiché il vettore \mathbf{u} è mediamente nullo sul dominio di integrazione, risulta:

$$\begin{aligned}
 p_v &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \frac{\pm\delta \rho}{(\delta^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \right) \mathbf{n} \times \mathbf{M} = \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\pm\delta}{\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}} - \frac{\delta}{|\delta|} \right) \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{2} = \mp \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{M})
 \end{aligned} \tag{32}$$

Si osservi che una lamina di corrente magnetica che fluisce sulla superficie del circuito determina la discontinuità della componente tangenziale del campo elettrico tra l'interno e l'esterno: in particolare, la differenza tra il campo interno e il campo esterno vale $\mathbf{n} \times \mathbf{M}$, come risulta dalla relazione (32).

4. APPLICAZIONE DEL METODO DEI MOMENTI

Per imporre la condizione al contorno, si utilizza il Metodo dei Momenti (MOM) ([17], [26]): il MOM permette di discretizzare il problema, in quanto trasforma un'equazione integro-differenziale lineare in un'equazione matriciale lineare.

Per la relazione (1), il campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ risulta dall'applicazione di un operatore integrale alle correnti elettriche e magnetiche; la condizione al contorno viene fissata imponendo che siano verificate le proiezioni della stessa in un insieme di funzioni di test.

Nella formulazione di Galerkin, adottata nel presente lavoro, le funzioni di base e le funzioni di test coincidono.

Il test viene dunque fatto con le funzioni \mathbf{v} e \mathbf{w} : entrambi i membri della relazione (25) vengono moltiplicati scalarmente per le funzioni di test, e integrati sul dominio di definizione delle funzioni stesse:

$$\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \, dS = \sum_n V_n \int \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \, dS \quad (33)$$

$$\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_p(\mathbf{r}) \, dS = \sum_n V_n \int \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_p(\mathbf{r}) \, dS \quad (34)$$

dove $i = 1, \dots, Q$; $j = 1, \dots, P$ ed $n = 1, \dots, N$.

Dalle relazioni (33) e (34) e riportando le M equazioni ausiliarie (22) che definiscono \mathbf{a}_m , si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^4 \mathbf{a} - k^2 \mathbf{K}^2 \mathbf{a} - k^2 \mathbf{R}' \mathbf{q} - jk\sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{R}'' \mathbf{i} &= -\varepsilon \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{V} \\ \mathbf{S} \mathbf{q} - k^2 \mathbf{R}'_T \mathbf{a} - k^2 \mathbf{V} \mathbf{q} - jk\sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{Q} \mathbf{i} &= \varepsilon \mathbf{L}' \mathbf{V} \\ -k^2 \mathbf{R}''_T \mathbf{a} - k^2 \mathbf{Q}_T \mathbf{q} - jk\sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{W} \mathbf{i} &= \varepsilon \mathbf{L}'' \mathbf{V} \end{aligned} \quad (35)$$

dove $(\)_T$ denota la trasposta, $\mathbf{K} = \text{diag}\{\kappa_m\}$, i vettori \mathbf{a} , \mathbf{q} ed \mathbf{i} sono definiti come:

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}_T \quad (36)$$

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_Q\}_T \quad (37)$$

$$\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \dots, i_P\}_T \quad (38)$$

inoltre le matrici \mathbf{S} , \mathbf{V} , \mathbf{W} , \mathbf{Q} , \mathbf{R}' , \mathbf{R}'' , \mathbf{F} , \mathbf{L}' , \mathbf{L}'' sono definite:

$$\mathbf{S}_{ij} = \iint (\nabla_s \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{r})) \, g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, (\nabla'_s \cdot \mathbf{v}_j(\mathbf{r}')) \, dS' \, dS \quad (39)$$

$$\mathbf{V}_{ij} = \iint \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}_j(\mathbf{r}') dS' dS \quad (40)$$

$$\mathbf{W}_{pq} = \iint \mathbf{w}_p(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{w}_q(\mathbf{r}') dS' dS \quad (41)$$

$$\mathbf{Q}_{ip} = \iint \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{w}_p(\mathbf{r}') dS' dS \quad (42)$$

$$\mathbf{R}'_{mi} = \int \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) dS \quad (43)$$

$$\mathbf{R}''_{mp} = \int \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_p(\mathbf{r}) dS \quad (44)$$

$$\mathbf{F}_{mn} = \int \mathbf{h}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (45)$$

$$\mathbf{L}'_{in} = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) dS - \iint \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}') dS' dS \quad (46)$$

$$\mathbf{L}''_{pn} = \frac{1}{2} \int \mathbf{w}_p(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) dS - \iint \mathbf{w}_p(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}') dS' dS \quad (47)$$

dove $i, j = 1, \dots, Q$; $p, q = 1, \dots, P$; $m = 1, \dots, M$; $n = 1, \dots, N$.

Tutte le matrici sono reali e non dipendono da k ; le matrici quadrate \mathbf{S} , \mathbf{V} e \mathbf{W} sono simmetriche, per la reciprocità della funzione di Green, e definite positive [6, App. 3].

Nella derivazione della matrice \mathbf{S} è stato utilizzato il teorema di Gauss, applicato alla superficie chiusa che delimita il circuito; la trattazione completa si trova in [10].

Nelle matrici \mathbf{L}' ed \mathbf{L}'' , gli integrali doppi sono intesi nel senso del valor principale, ed il primo termine rappresenta il valor principale estratto.

Si può ricavare \mathbf{i} dalla terza equazione del sistema (35), in funzione di \mathbf{a} , \mathbf{q} e \mathbf{V} :

$$-jk\sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{i} = k^2 \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{R}''_{\mathbf{T}} \mathbf{a} + \mathbf{Q}_{\mathbf{T}} \mathbf{q}) + \varepsilon \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' \mathbf{V} \quad (48)$$

L'espressione (48) ha senso, poiché la matrice \mathbf{W} è non singolare; sostituendo pertanto la nuova definizione delle \mathbf{i} nelle prime due equazioni di (35), si ottiene il sistema:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{K}^2 - \mathbf{R}'' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}''_{\mathbf{T}} & \mathbf{R}' - \mathbf{R}'' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_{\mathbf{T}} \\ \mathbf{R}'_{\mathbf{T}} - \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}''_{\mathbf{T}} & \mathbf{V} - \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} (-\mathbf{K} \mathbf{F} - \mathbf{R}'' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'') \mathbf{V} \\ (\mathbf{L}' - \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'') \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Il problema (49) può essere riscritto in forma canonica:

$$(\mathbf{A} - k^2 \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{C} \quad (50)$$

dove:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^2 - \mathbf{R}''\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}''_{\text{T}} & \mathbf{R}' - \mathbf{R}''\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}_{\text{T}} \\ \mathbf{R}'_{\text{T}} - \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}''_{\text{T}} & \mathbf{V} - \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}_{\text{T}} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{C} = \varepsilon \begin{bmatrix} (-\mathbf{K}\mathbf{F} - \mathbf{R}''\mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}'')\mathbf{V} \\ (\mathbf{L}' - \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}'')\mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} sono reali, simmetriche e definite positive, come dimostrato in [6]; la matrice \mathbf{C} rappresenta il termine forzante e dipende linearmente dalle tensioni modali dei modi di porta.

Dal problema (49) si possono ricavare \mathbf{a} e \mathbf{q} in funzione della tensioni modali \mathbf{V} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \text{diag}\left(\frac{1}{\kappa_r^2 - k^2}\right) [\mathbf{A}_{\text{T}} \quad \mathbf{B}_{\text{T}}] \begin{bmatrix} (-\mathbf{K}\mathbf{F} - \mathbf{R}''\mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}'')\mathbf{V} \\ (\mathbf{L}' - \mathbf{Q}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}'')\mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (55)$$

dove i κ_r rappresentano gli autovalori del problema omogeneo (ottenuto ponendo $\mathbf{C}=0$), cioè i numeri d'onda di risonanza dei modi della cavità ottenuta corto-circuitando le porte nella sezione terminale; le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} , invece, hanno come colonne gli autovettori del problema:

$$[\mathbf{A}_{\text{T}} \quad \mathbf{B}_{\text{T}}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{diag}(\kappa_r^2) \quad (56)$$

$$[\mathbf{A}_{\text{T}} \quad \mathbf{B}_{\text{T}}] \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \quad (57)$$

Nella relazione (57) \mathbf{U} indica la matrice identità.

5. CALCOLO DELLA MATRICE DI AMMETTENZA

Per il calcolo della matrice di ammettenza, restano da valutare le correnti modali \mathbf{I}_n dei modi di porta:

$$\mathbf{I}_n = \int \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (58)$$

dove $\mathbf{H}(\mathbf{r}')$ rappresenta il campo magnetico sulla superficie del circuito, definito dalla relazione (21), e \mathbf{H}_n indica il campo magnetico modale dell' n -esimo modo di porta. Sostituendo l'espressione (21) nella (58), si ottiene il vettore delle correnti modali \mathbf{I} :

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{I}_n = & jk \left[\frac{1}{2} \int \mathbf{J}_q(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) dS - \iint \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_q(\mathbf{r}') dS' dS \right] + \\ & - \sqrt{\varepsilon\mu} \left[\frac{1}{2} \int \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) dS - \iint \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' dS \right] + \\ & + \frac{\varepsilon}{jk} \iint (\nabla \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r})) g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla'_s \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')) dS' dS + \\ & - jk\varepsilon \iint \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' dS + \\ & - jk \sum_{m=1}^M a_m \kappa_m \int \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}_m(\mathbf{r}) dS + \\ & + jk\varepsilon \sum_{m=1}^M \frac{\left(\int \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}_m(\mathbf{r}) dS \right) \left(\int \mathbf{h}_m(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \right)}{\kappa_m^2} \end{aligned} \quad (59)$$

Il vettore \mathbf{I} può essere riscritto in forma matriciale, tenendo conto della definizione della \mathbf{J}_q , della \mathbf{J}_s e della \mathbf{M} ; si consideri, inoltre, per i primi due termini di (59), la relazione che lega il rotore della funzione di Green elettrica e della funzione di Green magnetica, riportata nel Capitolo 2: tale relazione consente di riscrivere i due integrali in termini di \mathbf{L}' e \mathbf{L}'' .

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{I} = & jk \mathbf{L}'_T \mathbf{q} - jk \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{R}''_T \mathbf{a} + \mathbf{Q}_T \mathbf{q}) + \frac{\varepsilon}{jk} \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' \mathbf{V} + \\ & - jk \mathbf{F}_T \mathbf{K} \mathbf{a} + \frac{\varepsilon}{jk} \mathbf{X} \mathbf{V} + jk \varepsilon \mathbf{T} \mathbf{V} - jk \varepsilon \mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F} \mathbf{V} \end{aligned} \quad (60)$$

Le matrici \mathbf{X} e \mathbf{T} sono definite come segue:

$$\mathbf{X}_{np} = \iint (\nabla'_s \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r})) g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla'_s \cdot \mathbf{H}_p(\mathbf{r}')) dS' dS \quad (61)$$

$$\mathbf{T}_{np} = \iint \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_p(\mathbf{r}') dS' dS \quad (62)$$

dove $n, p = 1, \dots, N$. L'espressione (60) può essere riscritta, in modo tale da evidenziare la dipendenza dalle tensioni modali:

$$\begin{aligned} \eta \mathbf{I} = & \frac{1}{jk} (\mathbf{X} + \mathbf{L}''_{\text{T}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'') \mathbf{V} + jk (\mathbf{T} - \mathbf{F}_{\text{T}} \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F}) \mathbf{V} + \\ & + \frac{\varepsilon}{jk} \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{\text{T}} \mathbf{K} - \mathbf{L}''_{\text{T}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}''_{\text{T}} & \mathbf{L}'_{\text{T}} - \mathbf{L}''_{\text{T}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_{\text{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

dove $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ rappresenta l'impedenza caratteristica del mezzo di cui è riempito il circuito.

Dalla relazione (63) si nota che il vettore \mathbf{I} delle correnti modali è costituito dalla somma di tre termini: nei primi due la dipendenza lineare dalle tensioni modali \mathbf{V} risulta esplicita; nel terzo compaiono le ampiezze modali \mathbf{a} e le cariche \mathbf{q} , e anch'esse per la relazione (55) dipendono linearmente dalle tensioni modali.

La matrice che lega le correnti modali alle tensioni modali è, per definizione, la matrice di ammettenza:

$$\mathbf{I} = [\mathbf{Y}] \mathbf{V} \quad (64)$$

L'espressione della matrice di ammettenza, pertanto, si deduce direttamente dalla relazione (63) e risulta:

$$\eta \mathbf{Y} = \frac{1}{jk} (\mathbf{X} + \mathbf{L}''_{\text{T}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'') + jk (\mathbf{T} - \mathbf{F}_{\text{T}} \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F}) + jk \mathbf{P}_{\text{T}} \text{diag} \left(\frac{1}{\kappa_r^2 - k^2} \right) \mathbf{P} \quad (65)$$

La matrice \mathbf{P} è definita come:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_{\text{T}} (-\mathbf{K} \mathbf{F} - \mathbf{R}'' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'') + \mathbf{B}_{\text{T}} (\mathbf{L}' - \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'') \quad (66)$$

Per migliorare la convergenza dell'espressione (65), risulta conveniente estrarre dalla matrice diagonale i termini corrispondenti a $k = 0$:

$$\text{diag} \left(\frac{1}{\kappa_r^2 - k^2} \right) = \text{diag} \left(\frac{1}{\kappa_r^2} \right) + k^2 \text{diag} \left(\frac{1}{\kappa_r^2 (\kappa_r^2 - k^2)} \right) \quad (67)$$

La matrice di ammettenza assume la forma:

$$\begin{aligned} \eta \mathbf{Y} = & \frac{1}{jk} (\mathbf{X} + \mathbf{L}''_{\text{T}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'') + jk (\mathbf{T} - \mathbf{F}_{\text{T}} \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F} + \mathbf{P}_{\text{T}} \text{diag}(\kappa_r^{-2}) \mathbf{P}) + \\ & + jk^3 \mathbf{P}_{\text{T}} \text{diag} \left(\frac{1}{\kappa_r^2 (\kappa_r^2 - k^2)} \right) \mathbf{P} \end{aligned} \quad (68)$$

Separando i termini in k^{-1} , k e k^3 , la matrice di ammettenza risulta:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\eta k} \mathbf{Y}_{-1} + \frac{jk}{\eta} \mathbf{Y}_1 + \frac{jk^3}{\eta} \mathbf{Y}_3 \quad (69)$$

dove le matrici \mathbf{Y}_{-1} , \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_3 sono definite rispettivamente come:

$$\mathbf{Y}_{-1} = \mathbf{X} + \mathbf{L}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L} \quad (70)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{T} - \mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F} + \mathbf{P}_T \text{diag}(\kappa_r^{-2}) \mathbf{P} \quad (71)$$

$$\mathbf{Y}_3 = \mathbf{P}_T \text{diag}\left(\frac{1}{\kappa_r^2(\kappa_r^2 - k^2)}\right) \mathbf{P} \quad (72)$$

L'espressione finale (69) risulta formalmente uguale a quella riportata nella relazione (4) del Capitolo 1, nel quale si ipotizza che le porte siano disaccoppiate e che richiede, quindi, di considerare tronchi di guida di lunghezza opportuna.

Con questo nuovo approccio, invece, non viene fatta alcuna ipotesi sulla lunghezza dei tronchi di guida terminali, né sono necessarie approssimazioni di alcun genere sui termini di bassa frequenza.

Qualora ci si trovi nelle condizioni di validità delle ipotesi fatte per la relazione (4) sopra citata, i termini (70) e (71) tendono a quelli approssimati.

Il termine \mathbf{Y}_3 , sul quale non viene fatta nessuna approssimazione, viene sempre calcolato allo stesso modo.

ESPRESSIONE IN FORMA CHIUSA DI \mathbf{Y}_1

L'espressione ricavata nel Capitolo 3 per la matrice \mathbf{Y}_1 non è in forma chiusa, in quanto compare una sommatoria sui numeri d'onda risonanti della cavità ottenuta corto-circuitando le porte: questa situazione rende difficile una valutazione precisa di \mathbf{Y}_1 , in quanto la serie converge debolmente e i numeri d'onda sono affetti da errori di calcolo.

Risulta pertanto opportuno riscrivere la matrice \mathbf{Y}_1 in una forma diversa, non soggetta a questi inconvenienti: quel che si ottiene è una rappresentazione di \mathbf{Y}_1 nella quale non compaiono i numeri d'onda risonanti della struttura, ma solo quelli della sfera che racchiude la struttura: tali numeri d'onda sono noti in forma analitica, ed è quindi più facile il calcolo delle sommatorie che si presentano nell'espressione di \mathbf{Y}_1 .

Resta, tuttavia, l'errore dovuto al troncamento delle serie: per eliminare questo errore residuo bisogna, formalmente, estendere tutte le sommatorie all'infinito.

Nella pratica, quel che si fa consiste nel riconoscere in queste matrici l'espressione di una funzione di Green quasi-statica, scritta in forma di serie per la cavità sferica, e ricavarne la corrispondente forma chiusa.

Il calcolo dell'espressione in forma chiusa di questa funzione di Green non è agevole per la sfera, ma si calcola semplicemente per lo spazio libero.

Pertanto, poiché i parametri di ammettenza sono indipendenti dalla sfera che si considera, si può considerare una sfera di raggio infinito, e cioè calcolare tutte le matrici implicate nella determinazione di \mathbf{Y}_{-1} e \mathbf{Y}_1 con la funzione di Green dello spazio libero: questo ultimo passaggio consente di esprimere in forma chiusa anche la matrice \mathbf{Y}_1 .

1. ESPRESSIONE DEI TERMINI DI BASSA FREQUENZA

Le espressioni per i termini di bassa frequenza della matrice di ammettenza sono state ottenute nel Capitolo 3:

$$\mathbf{Y}_{-1} = \mathbf{X} + \mathbf{L}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L} \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{T} - \mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F} + \mathbf{P}_T \text{diag}\{\kappa_r^{-2}\} \mathbf{P} \quad (2)$$

Si può osservare che il primo termine è calcolato in forma chiusa, in quanto tutte le matrici implicate nella determinazione di \mathbf{Y}_{-1} sono espresse in forma chiusa.

Nel secondo termine, invece, compare la matrice diagonale dei κ_r : si ha cioè una sommatoria sui numeri d'onda risonanti della cavità ottenuta corto-circuitando le porte nella sezione terminale.

Questa situazione è molto svantaggiosa, in quanto la valutazione numerica della serie è difficoltosa, essenzialmente per due ragioni:

1. i κ_r non sono noti a priori, ma si trovano come soluzione del problema agli autovalori ottenuto con il metodo BIRME, quindi la loro determinazione non è immune da errori;
2. la serie converge debolmente, ed è necessario sommare un cospicuo numero di termini, fino a frequenze molto maggiori della massima frequenza di analisi; la valutazione di un numero elevato di autovalori conduce a problemi di dimensione notevole, la cui soluzione richiede lunghi tempi di calcolo.

E' opportuno, pertanto, esprimere il termine $\mathbf{P}_T \text{diag}\{\kappa_r^{-2}\} \mathbf{P}$ in una forma differente, nella quale non compaiano sommatorie sui numeri d'onda risonanti κ_r .

2. RISCrittURA DI Y_1

La rappresentazione di Y_1 in una forma che sia immune dai problemi legati alla determinazione dei numeri d'onda risonanti della cavità, può essere ottenuta utilizzando un teorema formulato in [14, pag. 106], con lo stesso metodo adottato in [4].

Poiché le matrici \mathbf{S} e \mathbf{K} introdotte nel Capitolo 3 sono definite positive [6], per il teorema citato vale la relazione seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} \mathbf{K}^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{diag} \{ \kappa_r^2 \} \quad (3)$$

dove \mathbf{A} e \mathbf{B} sono gli autovettori che si ottengono come soluzione del problema definito nel Capitolo 3.

Si osservi che $\mathbf{K} = \text{diag} \{ \kappa_m \}$, dove κ_m indica il numero d'onda dell' m -esimo modo risonante della sfera; i κ_m sono noti in forma analitica.

L'equazione (3) può essere riscritta, eseguendo i prodotti, come:

$$\mathbf{A}_T \mathbf{K}^4 \mathbf{A} + \mathbf{B}_T \mathbf{S} \mathbf{B} = \text{diag} \{ \kappa_r^2 \} \quad (4)$$

Sempre dall'equazione (3) si può ottenere:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \text{diag} \{ \kappa_r^{-2} \} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}_T \quad (5)$$

Svolgendo i calcoli nella (5), si ottengono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{A} \text{diag} \{ \kappa_r^{-2} \} \mathbf{A}_T = \mathbf{K}^{-4} \quad (6)$$

$$\mathbf{A} \text{diag} \{ \kappa_r^{-2} \} \mathbf{B}_T = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} \text{diag} \{ \kappa_r^{-2} \} \mathbf{A}_T = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} \text{diag} \{ \kappa_r^{-2} \} \mathbf{B}_T = \mathbf{S}^{-1} \quad (9)$$

Il prodotto $\mathbf{P}_T \text{diag} \{ \kappa_r^{-2} \} \mathbf{P}$ può essere scritto in altra forma, utilizzando le proprietà (6)-(9) e la definizione della matrice \mathbf{P} , fornita nel Capitolo 3:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_T \left(-\mathbf{K}\mathbf{F} - \mathbf{R}'' \mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}'' \right) + \mathbf{B}_T \left(\mathbf{L}' - \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}'' \right) \quad (10)$$

In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_T \text{diag}\{\kappa_r^{-2}\} \mathbf{P} = & \mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F} + \mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-3} \mathbf{R}'' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}''_T \mathbf{K}^{-3} \mathbf{F} + \\ & + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}''_T \mathbf{K}^{-4} \mathbf{R}'' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \\ & - \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}' - \mathbf{L}'_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}'_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}' \end{aligned} \quad (11)$$

Si consideri, infine, l'espressione di \mathbf{Y}_1 che si ricava sostituendo (11) in (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 = & \mathbf{T} + \left(\mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-3} \mathbf{R}'' \right) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{R}''_T \mathbf{K}^{-3} \mathbf{F} \right) + \\ & + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{R}''_T \mathbf{K}^{-4} \mathbf{R}'' \right) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{Q}_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q} \right) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \\ & - \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{Q}_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}' \right) - \left(\mathbf{L}'_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q} \right) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}'_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}' \end{aligned} \quad (12)$$

L'espressione ottenuta in (12), in apparenza più complessa di quella di partenza, presenta il vantaggio considerevole di non contenere sommatorie sui numeri d'onda risonanti dei modi della cavità sotto analisi, ma solo quelli della cavità sferica, i quali sono noti in forma analitica.

Per questa ragione, le serie che compaiono in (12) possono essere calcolate accuratamente, sommando un numero di termini elevato, senza per questo dover appesantire la soluzione del problema agli autovalori, che tipicamente rappresenta la fase più critica dell'intera analisi.

I numeri d'onda risonanti della sfera, essendo calcolati analiticamente, sono inoltre immuni dagli errori che inevitabilmente caratterizzano i numeri d'onda risonanti della cavità.

3. FORMA CHIUSA PER \mathbf{Y}_1

L'espressione (12) di \mathbf{Y}_1 ottenuta nel Paragrafo precedente costituisce un miglioramento notevole rispetto alla rappresentazione fornita nel Capitolo 3, in quanto non contiene più le sommatorie sui κ_r .

Tuttavia, la (12) non costituisce una rappresentazione esatta, a causa dell'errore introdotto dal troncamento delle sommatorie sui κ_m .

L'errore dovuto al troncamento, piccolo quanto si desidera se la sommatoria è estesa ad un numero elevato di termini, è inevitabile.

La rappresentazione esatta di \mathbf{Y}_1 può essere ottenuta, teoricamente, estendendo le sommatorie all'infinito, cioè sommando esattamente le serie.

Nel seguito, vengono considerate le matrici che contengono le sommatorie sui modi sferici: supponendo di estendere all'infinito le sommatorie sui modi della sfera, tali matrici vengono riscritte in termini di una nuova funzione di Green, che viene definita in forma di serie per il risonatore sferico.

Si consideri, per primo, il termine:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}^{-4} \mathbf{R} \quad (13)$$

Quando la sommatoria sui modi della sfera è estesa all'infinito, l'elemento ij della matrice $\mathbf{\Gamma}$ risulta:

$$\Gamma_{ij} = \iint \mathbf{w}_i(\mathbf{r}) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^4} \right) \cdot \mathbf{w}_j(\mathbf{r}') \, dS' \, dS \quad (14)$$

La sommatoria che appare in parentesi rappresenta una funzione di Green, definita in forma di serie, che nel seguito è indicata con $\mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$\mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^4} \quad (15)$$

La funzione di Green $\mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ soddisfa la relazione:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2} \quad (16)$$

dove $\mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ rappresenta il termine quasi statico della funzione di Green di tipo elettrico, definita nel Capitolo 2.

Per il secondo termine considerato, un analogo procedimento conduce ai seguenti risultati:

$$\Lambda = \mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-3} \mathbf{R}'' \quad (17)$$

Quando si estendono le sommatorie all'infinito, la matrice Λ risulta:

$$\Lambda_{ij} = \iint \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^3} \right) \cdot \mathbf{w}_j(\mathbf{r}') \, dS' \, dS \quad (18)$$

Poiché gli autovettori modali elettrico e magnetico della sfera sono legati, l'elemento ij della matrice Λ si può riscrivere come:

$$\Lambda_{ij} = \iint \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{w}_j(\mathbf{r}') \, dS' \, dS \quad (19)$$

dove $\nabla \times \mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è definito dalla relazione seguente:

$$\nabla \times \mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^3} \quad (20)$$

In definitiva, la rappresentazione di \mathbf{Y}_1 diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 = & \mathbf{T} + \Lambda \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \Lambda_T + \\ & + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} \Gamma \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Q}_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \\ & - \mathbf{L}''_T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Q}_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}') - (\mathbf{L}'_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}'' + \mathbf{L}'_T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}' \end{aligned} \quad (21)$$

Per esprimere in forma chiusa la \mathbf{Y}_1 , resta da calcolare in forma chiusa l'espressione della funzione di Green $\mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ definita da (15).

4. FUNZIONE DI GREEN DELLO SPAZIO LIBERO

Il calcolo in forma chiusa della funzione di Green definita da (15) può risultare non agevole nel caso del risonatore sferico; il problema di calcolare $\mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ può essere aggirato, sulla base di alcune considerazioni di carattere generale che verranno sviluppate in questo Paragrafo.

La rappresentazione utilizzata per la matrice di ammettenza \mathbf{Y} è costituita dalla somma di tre termini, proporzionali a k^{-1} , k e k^3 :

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\eta k} \mathbf{Y}_{-1} + \frac{jk}{\eta} \mathbf{Y}_1 + \frac{jk^3}{\eta} \mathbf{Y}_3 \quad (22)$$

Come ampiamente spiegato nei Capitoli precedenti, il circuito da analizzare viene racchiuso in un risonatore sferico, per il calcolo dei numeri d'onda risonanti e dei vettori modali della cavità che si ottiene corto-circuitando le porte del circuito nella sezione terminale.

La matrice \mathbf{Y} che si ottiene è caratteristica del circuito considerato, e non dipende in alcun modo dalla sfera nella quale si racchiude la struttura.

Poiché tale proprietà deve valere per qualsiasi frequenza, anche le singole componenti \mathbf{Y}_{-1} , \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_3 devono essere indipendenti dalla sfera considerata.

In particolare, se i termini \mathbf{Y}_{-1} e \mathbf{Y}_1 non dipendono dalla sfera considerata, risulta del tutto equivalente considerare una sfera di raggio infinito.

Questa assunzione implica che le funzioni di Green considerate nel calcolo di tutte le matrici che appaiono in \mathbf{Y}_{-1} e \mathbf{Y}_1 siano quelle dello spazio libero, e non quelle della sfera di raggio a , finora utilizzate.

Si osservi che, formalmente, le funzioni di Green quasi-statiche del risonatore sferico tendono a quelle dello spazio libero quando il raggio della sfera $a \rightarrow \infty$.

In particolare, nel caso dello spazio libero, risulta agevole calcolare la funzione di Green $\mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ definita da (15) per la cavità sferica in forma di serie, e più in generale dalla relazione seguente:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (23)$$

dove $\mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la parte quasi statica della funzione di Green elettrica dello spazio libero:

$$\mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi R} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right) \quad (24)$$

Per lo spazio libero si ottiene:

$$\mathbf{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{32\pi} \left(3\mathbf{R}\mathbf{I} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R} \right) \quad (25)$$

In conclusione, sembra conveniente calcolare le matrici \mathbf{Y}_{-1} e \mathbf{Y}_1 in modo indipendente dal calcolo degli autovalori, considerando il raggio della sfera al limite infinito; in questo caso si considerano, anziché le funzioni di Green della sfera, quelle dello spazio libero, che sono formalmente molto più semplici.

Il vantaggio per il calcolo del termine \mathbf{Y}_1 è, innanzi tutto, la possibilità di ottenere un'espressione in forma chiusa, immune quindi dai problemi legati alla lenta convergenza delle serie.

Nel caso del termine \mathbf{Y}_{-1} , per il quale è già disponibile un'espressione in forma chiusa in presenza del risonatore sferico, risulta ugualmente vantaggioso l'utilizzo delle funzioni di Green dello spazio libero, in quanto l'espressione formalmente più semplice consente una maggiore velocità di calcolo.

IL PROGRAMMA

La teoria esposta nei precedenti Capitoli è stata implementata in un programma di calcolo, scritto in linguaggio FORTRAN.

Il nuovo programma per la determinazione dei parametri di ammettenza nasce come modifica di un programma per il calcolo dei numeri d'onda e dei modi risonanti di strutture tridimensionali di forma arbitraria, precedentemente sviluppato presso il Laboratorio di Microonde dell'Università di Pavia.

Le nuove routine, innestate sul vecchio programma, utilizzano le stesse funzioni di base, cioè una combinazione lineare delle funzioni proposte in [30], per ottenere le funzioni di base solenoidali e non solenoidali definite nel Capitolo 3.

Il calcolo delle nuove matrici presenta problemi analoghi a quelli trattati in [7], dovuti alla singolarità della funzione di Green, quando il punto-campo e il punto-sorgente coincidono o risultano estremamente prossimi.

Per utilizzare i risultati forniti in [7], è opportuno modificare le matrici in cui compaiono i campi magnetici modali di porta, proiettando tali campi sulle funzioni di base: questo permette di mutuare gli integrali da quelli già calcolati in [7].

Tuttavia, alcuni integrali non sono riconducibili a casi già trattati: per questi, viene calcolata l'espressione analitica nella parte finale del Capitolo.

1. SCELTA DELLE FUNZIONI DI BASE

Nell'algoritmo utilizzato, la superficie S della struttura è discretizzata con elementi triangolari (Fig.1): la scelta degli elementi triangolari, come evidenziato in [30], risulta particolarmente appropriata nella modellizzazione di strutture di forma arbitraria, quando si utilizza una rappresentazione integrale dei campi unitamente al Metodo dei Momenti.

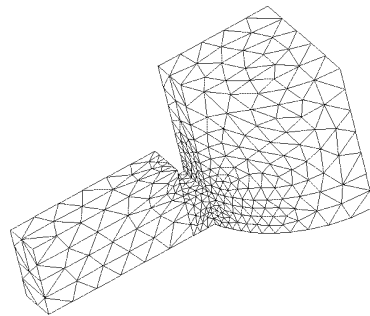


Fig. 1 - Un esempio di discretizzazione della superficie in elementi triangolari.

La discretizzazione triangolare, infatti, permette di descrivere con precisione la superficie di strutture di forma arbitraria, può essere ottenuta facilmente con programmi di CAD meccanico (in particolare si è utilizzato PATRAN) e consente di raggiungere precisioni di analisi più elevate di quelle che si otterrebbero impiegando un ugual numero di elementi di forma differente (ad esempio rettangolari).

La dimensione dei triangoli è fissata in relazione alla frequenza massima alla quale si intende analizzare il circuito: tipicamente, per ottenere una buona accuratezza di analisi, la lunghezza dei lati dei triangoli viene scelta dell'ordine di $\lambda/10$, mentre $\lambda/6$ si può considerare come un limite inferiore, al di sotto del quale non si possono garantire risultati accurati.

In [30] vengono anche introdotte delle funzioni di base (Fig. 2), definite su coppie di triangoli adiacenti, note comunemente come funzioni RWG, dai nomi dei ricercatori che per primi le hanno utilizzate.

Le funzioni RWG vengono usate come base per rappresentare la corrente elettrica \mathbf{J} e di conseguenza la carica σ : esse consentono di rappresentare le correnti come una funzione lineare a tratti e la carica come una funzione costante a tratti.

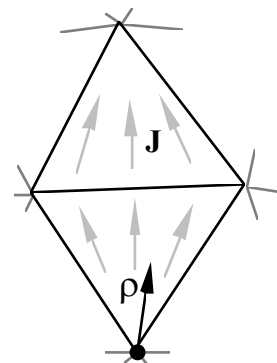


Fig. 2 - Le funzioni di base RWG.

Le funzioni RWG sono definite come:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2 A_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm & \mathbf{r} \in T_n^\pm \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

dove T_n^\pm indicano i due triangoli adiacenti su cui è definita la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, A_n^\pm le rispettive aree, mentre l_n rappresenta il lato comune dei due triangoli.

Le funzioni $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{w}(\mathbf{r})$, indicate nel Capitolo 3 come funzioni non solenoidali e solenoidali, si ottengono come combinazioni lineari di funzioni RWG [6].

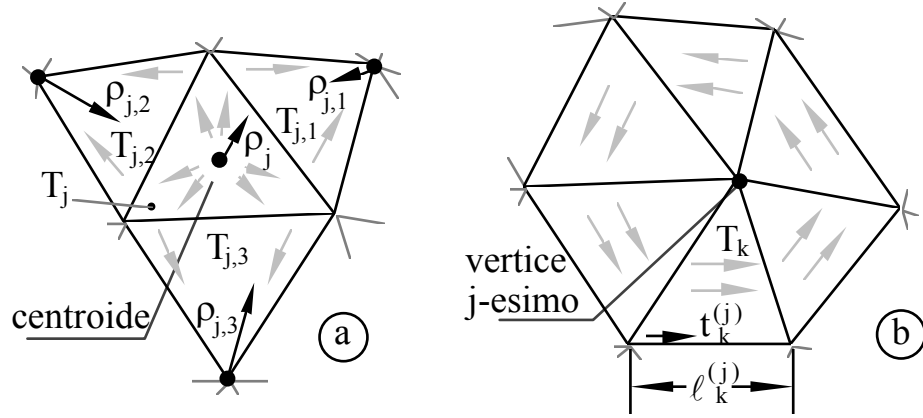


Fig. 3 - (a) Funzioni stellate - (b) Funzioni anulari.

In particolare, la funzione non solenoidale $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ si ottiene combinando tre funzioni RWG che condividono uno stesso triangolo T_j (Fig. 3a); il supporto di queste funzioni risulta costituito dal triangolo centrale T_j e dai tre triangoli adiacenti $T_{j,h}$.

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2A_j} \boldsymbol{\rho}_j & \text{in } T_j \\ -\frac{1}{6A_{j,h}} \boldsymbol{\rho}_{j,h} & \text{in } T_{j,h} \end{cases} \quad (2)$$

dove A_j rappresenta l'area del triangolo centrale, $A_{j,h}$ quella dei triangoli adiacenti. Le funzioni $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ rappresentano una corrente che si diparte dal centroide del triangolo centrale T_j in direzione radiale, e vengono per questo definite *funzioni stellate*.

La funzione solenoidale $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ si ottiene dalla combinazione di tutte le funzioni RWG relative ai lati che si dipartono da un nodo comune j , detto *vertice di pivot* (Fig. 3b); il supporto è costituito da tutti i triangoli che condividono il vertice di pivot.

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{l_k^{(j)}}{A_k} \mathbf{t}_k^{(j)} \quad \text{in } T_k \quad (3)$$

dove A_k è l'area del triangolo T_k , $l_k^{(j)}$ è la lunghezza del lato esterno e $\mathbf{t}_k^{(j)}$ rappresenta il versore lungo il lato $l_k^{(j)}$. Le funzioni $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ rappresentano una corrente che circola intorno al nodo di pivot, e per questo sono dette *funzioni anulari*; la divergenza di tali funzioni è, ovviamente, nulla.

2. CALCOLO DELLE MATRICI

Il calcolo dei parametri di ammettenza, basato sulla teoria presentata nei Capitoli precedenti, richiede la valutazione di un certo numero di matrici, introdotte nel Capitolo 3.

L'espressione che si è deciso di implementare è quella presentata nel Paragrafo 2 del Capitolo 4, che presenta una sommatoria sui modi risonanti della cavità sferica.

La scelta è stata motivata dalle buone caratteristiche di convergenza delle serie, che pertanto richiedono di sommare un numero di termini ragionevole, dalla possibilità di sommare comunque il numero di termini desiderato senza appesantire il problema agli autovalori, e dalla possibilità di innestare le nuove *routine* sul programma preesistente (in grado di calcolare i parametri di ammettenza nell'ipotesi di guide lunghe) senza stravolgerne la struttura.

Il problema preesistente, come riportato in [6], richiedeva il calcolo delle matrici **S**, **V**, **W**, **Q**, **R'** ed **R''**; le nuove matrici sono invece **X**, **T**, **F**, **L'** ed **L''**, introdotte nel Capitolo 3.

Il calcolo di tutte queste matrici richiede la valutazione di integrali superficiali su triangoli o coppie di triangoli: gli integrali sono valutati con uno schema di quadratura gaussiana [12], che consiste nella somma pesata di campioni dell'integrando valutati in opportuni *punti regola*.

Tuttavia, quando il campo è calcolato nella zona delle sorgenti, il calcolo delle matrici richiede la valutazione di integrali superficiali su coppie di triangoli, che possono anche coincidere o presentare un lato o un nodo comune; in presenza di singolarità (sia pure integrabili) della funzione integranda, l'integrazione gaussiana fornisce risultati poco accurati.

Una soluzione a questo problema è proposta in [7], dove si distinguono tre possibili casi:

1. i due triangoli che costituiscono il dominio di integrazione sono disgiunti, quindi l'integrando non diverge mai e l'integrazione numerica risulta adeguata;
2. i due triangoli condividono un lato o un vertice, e in questa regione l'integrando diverge: la soluzione proposta in [7] consiste in una prima integrazione analitica sul triangolo sorgente, in modo tale da eliminare la singolarità, e in una successiva integrazione numerica sul triangolo campo, con i metodi usuali di quadratura gaussiana;
3. i due triangoli coincidono: in questo caso, l'integrando diverge su tutto il dominio di integrazione ed è richiesta un'integrazione completamente analitica.

Si osservi che la funzione di Green presenta una parte singolare e una parte regolare: i metodi di integrazione mista analitica-numerica o di integrazione completamente analitica presentati in [7] vengono applicati solo alla parte singolare; la parte regolare, al contrario, non è soggetta a questi problemi e, pertanto, viene integrata sempre numericamente.

In [7] vengono presi in considerazione i soli integrali implicati nella soluzione del problema agli autovalori, cioè quelli che presentano come nucleo la parte quasi-statica della funzione di Green elettrica del risuonatore sferico; si considerano quindi i due casi seguenti:

$$\int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}'} \frac{1}{4\pi R} dS' dS \quad (4)$$

$$\int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}'} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{8\pi R} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right) \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}) dS' dS \quad (5)$$

Problemi di analoga natura si presentano anche nel calcolo delle matrici introdotte in questo lavoro, con la differenza che, in questo caso, non si deve integrare la funzione di Green pre- e post-moltiplicata scalarmente per le funzioni di base RWG, ma funzioni di Green pre-moltiplicate per un funzione RWG e post-moltiplicate per un campo magnetico di un modo di porta.

Per utilizzare i risultati ottenuti in [7], appare opportuno proiettare i campi magnetici modali dei modi di porta sulle funzioni di base RWG, con il metodo presentato nel Paragrafo seguente.

Successivamente, vengono considerati gli integrali singolari che presentano nuclei differenti da quelli trattati in [7], e che richiedono quindi una specifica trattazione teorica, di cui si riportano i passaggi essenziali.

3. PROIEZIONE DEI CAMPI MAGNETICI DI PORTA

La proiezione dei campi magnetici dei modi di porta sulle funzioni di base permette di esprimere i campi modali come somma pesata delle funzioni RWG che appartengono alla stessa porta fisica:

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}) = \sum_i a_{i,n} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \quad (6)$$

dove n rappresenta l'indice del modo di porta, i quello della funzione di base di porta.

Per la proiezione del campo magnetico, si utilizzano solo le funzioni di base il cui supporto giace completamente sulla porta: le funzioni con supporto definito in parte sulla porta e in parte fuori, infatti, hanno una componente normale non nulla, e quindi non intervengono nella rappresentazione del campo magnetico, privo della componente normale ad una parete elettrica.

I coefficienti di proiezione $a_{i,n}$ possono essere ottenuti applicando il Metodo dei Momenti; entrambi i membri della relazione (6) vengono moltiplicati scalarmente per le funzioni di base di porta e integrate sulla superficie della porta:

$$\int_S \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) dS = \sum_i a_{i,n} \int_S \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) dS \quad (7)$$

dove i,k sono l'indice delle funzioni di base di porta, n l'indice del modo di porta; in forma matriciale, il problema risulta:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} \mathbf{a} \quad (8)$$

L'integrale che compare al primo membro di (7) viene calcolato mediante integrazione numerica con la regola gaussiana, tipicamente con dieci campioni per triangolo.

L'integrale al secondo membro, viceversa, è noto in forma analitica; bisogna distinguere tre casi:

1. se le due funzioni di base coincidono, il dominio di integrazione è costituito dai due triangoli su cui è definita la funzione di base; in questo caso l'integrale risulta:

$$\int_S \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) dS = \frac{l_i^2}{48 A_1} [3 l_{1,1}^2 + 3 l_{2,1}^2 - l_i^2] + \frac{l_i^2}{48 A_2} [3 l_{1,2}^2 + 3 l_{2,2}^2 - l_i^2] \quad (9)$$

dove A_1 indica l'area del primo triangolo, $l_{1,1}$ ed $l_{2,1}$ i due lati del primo triangolo, su cui non è definita la funzione di base; analogamente sono definite le grandezze relative al secondo triangolo.

2. se le due funzioni di base appartengono a triangoli distinti, ma i supporti delle due funzioni presentano un triangolo comune, tale triangolo rappresenta il dominio di integrazione; il valore dell'integrale risulta:

$$\int_S \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) dS = \pm \frac{l_i l_k}{48 A_T} [l_i^2 + l_k^2 - 3 l_x^2] \quad (10)$$

dove A_T rappresenta l'area dell'unico triangolo comune, l_x è il terzo lato del triangolo, sul quale non sono definite funzioni di base; il segno \pm dipende dal fatto che sul triangolo comune le due funzioni di base siano definite con lo stesso segno o meno.

3. se le due funzioni sono distinte ed i supporti delle funzioni non presentano triangoli comuni, il valore dell'integrale è nullo.

Per ottenere la matrice dei coefficienti di proiezione, bisogna risolvere il problema (7); questo si può ottenere fattorizzando la matrice \mathbf{F} con il metodo di Cholesky [12], e risolvendo poi il problema con un numero di passi pari alla dimensione della matrice \mathbf{F} .

Si è osservato¹ che i campi modali \mathbf{H} proiettati non soddisfano la condizione di ortogonalità: se da un lato la perdita dell'ortogonalità tra i modi rappresenta una conseguenza inevitabile della discretizzazione del campo con funzioni lineari a tratti, la perdita della normalità costituisce un problema non trascurabile, in quanto l'errore incide direttamente sulla precisione con cui vengono calcolate le matrici.

Tuttavia, risulta banale imporre ai campi la condizione di normalità: infatti, il campo modale \mathbf{H} proiettato sulle funzioni di base ed espresso dalla relazione (6), deve soddisfare la condizione:

$$\int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_T dS = 1 \quad (11)$$

Si ottiene:

$$c^2 \sum_{i,k} a_i a_k \int_S \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) dS = 1 \quad (12)$$

Il termine c rappresenta il fattore di normalizzazione, per il quale bisogna moltiplicare i coefficienti di proiezione a_i per ottenere campi normalizzati.

Introducendo il formalismo matriciale, si ha:

$$c^2 \mathbf{a}_T \mathbf{F} \mathbf{a} = 1 \quad (13)$$

¹ A questo proposito è risultata estremamente proficua una discussione con il Prof. Arcioni.

Utilizzando la relazione (8), si ottiene:

$$c^2 \mathbf{a}_T \mathbf{H} = 1 \quad (14)$$

Si ricava quindi che il fattore di normalizzazione vale:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_T \mathbf{H}}} \quad (15)$$

Per ciascun modo di porta si trova un diverso fattore correttivo di rinormalizzazione, per il quale va moltiplicato il vettore dei coefficienti di proiezione relativo al modo considerato.

4. TERMINE DI VALOR PRINCIPALE

Per la determinazione delle matrici \mathbf{L}' ed \mathbf{L}'' , occorre calcolare il termine di valor principale estratto, del cui significato fisico si è già discusso.

Il termine di valor principale è rappresentato dal seguente integrale:

$$\int \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \, dS \quad (16)$$

il cui valore può essere calcolato in forma analitica. A tale scopo, si utilizzano le relazioni tra i campi modali elettrico e magnetico:

$$\int \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \, dS = - \int \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j(\mathbf{r}) \, dS \quad (17)$$

La normale \mathbf{n} ha verso entrante, secondo la convenzione adottata nella definizione della matrice di ammettenza.

Il campo modale \mathbf{H} può essere proiettato sulle funzioni di base di porta, con le modalità espresse nel Paragrafo precedente, per cui il problema (16) si riduce al calcolo dell'integrale:

$$\int \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_j(\mathbf{r}) \, dS \quad (18)$$

L'integrale (18) è nullo se i supporti delle due funzioni di base sono disgiunti, cioè non presentano triangoli comuni.

Anche nel caso in cui le due funzioni di base \mathbf{f}_i ed \mathbf{f}_j coincidano, il valore dell'integrale è nullo, in quanto è identicamente nullo l'integrando.

Nel caso in cui i supporti delle funzioni di base \mathbf{f}_i ed \mathbf{f}_j condividano uno stesso triangolo, e le due funzioni non siano coincidenti, il valore dell'integrale risulta diverso da zero, ed il triangolo comune rappresenta il dominio di integrazione:

$$\int_T \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_j(\mathbf{r}) \, dS = \pm \frac{l_i l_j}{4 A^2} \int_T \boldsymbol{\rho}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_j(\mathbf{r}) \, dS \quad (19)$$

dove il segno \pm dipende dal segno con cui le due funzioni sono definite sul triangolo comune. Per il calcolo dell'integrale si considera il sistema di coordinate normalizzate [40] in Fig. 4; si definiscono:

$$\boldsymbol{\rho}_i = \xi \mathbf{c} - \eta \mathbf{a} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\rho}_j = \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{a} = \xi \mathbf{c} + (1 - \eta) \mathbf{a} \quad (21)$$

L'area del triangolo e la normale entrante \mathbf{n} sono definite dalla relazione:

$$A = \frac{|\mathbf{c} \times (-\mathbf{a})|}{2} \quad (22)$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{c} \times (-\mathbf{a})}{|\mathbf{c} \times (-\mathbf{a})|} \quad (23)$$

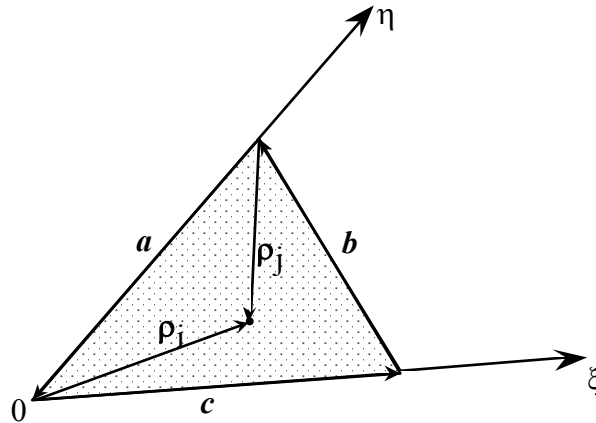


Fig. 4 - Il sistema di coordinate normalizzate

L'integrale (19) calcolato nel sistema di coordinate normalizzate risulta:

$$\begin{aligned} \int_T \boldsymbol{\rho}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_j(\mathbf{r}) \, dS &= 2 A \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_j) \, d\eta \\ &= -\frac{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2}{6} \end{aligned} \quad (24)$$

Applicando poi il teorema di Carnot al prodotto scalare $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ e, quindi, la formula di Erone, con alcuni passaggi algebrici (non riportati per brevità), si può riscrivere il risultato (24) nella forma seguente:

$$\int_T \boldsymbol{\rho}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_j(\mathbf{r}) \, dS = -\frac{2}{3} A^2 \quad (25)$$

dove A rappresenta l'area del triangolo.

Si osservi che la scelta dei nodi da cui sono spiccate le funzioni di base $\boldsymbol{\rho}_i$ e $\boldsymbol{\rho}_j$ è arbitraria: se la funzione $\boldsymbol{\rho}_i$ fosse spiccata dal nodo che precede quello da cui esce $\boldsymbol{\rho}_j$, anziché da quello che segue, l'espressione (25) risulterebbe con il segno cambiato.

5. NUOVI INTEGRALI SINGOLARI

Nella valutazione delle matrici introdotte in questo lavoro, come anticipato nel Paragrafo 2, si presentano problemi analoghi a quelli affrontati in [7], per la presenza di singolarità della funzione integranda in alcuni punti del dominio di integrazione.

Le matrici \mathbf{X} e \mathbf{T} , dopo la proiezione dei campi magnetici modali di porta, possono essere trattate in modo del tutto analogo alle matrici \mathbf{S} e \mathbf{V} , almeno per quanto riguarda la parte singolare: infatti, la funzione di Green di tipo elettrico e quella di tipo magnetico hanno la stessa parte singolare.

Le matrici \mathbf{L}' ed \mathbf{L}'' , invece, presentano una funzione integranda diversa, che non può essere ricondotta direttamente ad un caso già trattato.

Del termine di valor principale estratto si è già discusso nel Paragrafo precedente, resta da considerare il secondo integrale, inteso nel senso del valor principale; dopo la proiezione dei campi modali di porta sulle funzioni di base, l'integrale da calcolare risulta:

$$\int_T \int_{T'} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' dS \quad (26)$$

Anche in questo caso, si possono configurare tre possibili situazioni:

1. i due triangoli T e T' sono disgiunti: l'integrazione può essere fatta per via numerica, con il metodo della quadratura gaussiana;
2. i due triangoli sono coincidenti: la singolarità è già considerata esplicitamente dal termine di valor principale:

$$\int_T \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{R}}{R^3} \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' dS \quad (27)$$

mentre l'integrale della parte singolare sulla parte restante della superficie $T'-S_\varepsilon$ fornisce un contributo nullo; infatti:

$$\int_T \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T'-S_\varepsilon} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' dS = 0 \quad (28)$$

in quanto l'integrando è nullo perché \mathbf{f}_i , \mathbf{R} ed \mathbf{f}_j sono complanari.

3. i triangoli T e T' condividono un lato o un vertice comune: la funzione integranda diverge in corrispondenza del lato o del vertice comune, a causa della singolarità del rotore della funzione di Green, e non è possibile calcolare l'integrale per via numerica con il metodo di quadratura gaussiana. Rispetto al caso trattato in [7], la situazione risulta peggiore, in quanto il rotore della funzione di Green presenta una singolarità più forte della funzione di Green stessa ($1/R^2$ rispetto a $1/R$), e quindi l'integrale numerico non converge al risultato corretto nemmeno aumentando la regola di integrazione gaussiana. L'unica soluzione resta il metodo proposto in [7], con una prima integrazione analitica sul triangolo sorgente, che elimini la singolarità, seguita da un'integrazione numerica sul secondo triangolo.

L'espressione analitica dell'integrale sul triangolo sorgente, nel caso della funzione (26), non può essere ricondotta direttamente ad uno dei casi presentati in [7]; tale espressione viene ricavata nel seguito di questo Paragrafo.

Si osserva che l'integrazione analitica riguarda solo la parte singolare del rotore della funzione di Green, in quanto la parte regolare dell'integrale può sempre essere calcolata numericamente. Il problema, pertanto, si riduce alla valutazione del seguente integrale:

$$\int_{T'} \int_T \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \frac{1}{8\pi R} \left[\underline{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right] \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' dS \quad (29)$$

L'espressione (29) può essere riscritta nella forma:

$$\int_T \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \left[\int_{T'} \frac{1}{8\pi R} \left(\underline{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right) \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' \right] dS \quad (30)$$

L'operatore rotore e l'operatore integrale su T' possono essere scambiati, in quanto il primo opera sulle coordinate non accentate (relative al punto campo) ed il secondo sulle coordinate accentate (relative al punto sorgente).

Si osservi ora che l'integrale in parentesi nell'espressione (30) è identico a quello calcolato in [7] e riportato nella relazione (5): definendo $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ il termine in parentesi nella (30)

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \int_{T'} \frac{1}{R} \left(\underline{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right) \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' \quad (31)$$

si tratta ora di applicare l'operatore di rotore alla funzione $\mathbf{I}(\mathbf{r})$. In questo modo, dalla (29), si ottiene:

$$\int_{T'} \int_T \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \frac{1}{8\pi R} \left[\underline{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right] \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' dS = \frac{1}{8\pi} \int_T \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{I}(\mathbf{r}) dS \quad (32)$$

L'espressione di $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ è riportata in [7] nella forma:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = 4 \mathbf{I}_1 - 2 (\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}'_\beta) \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_{\text{NC}} \quad (33)$$

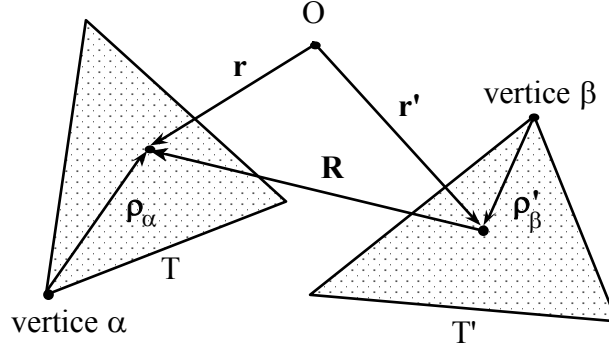


Fig. 5 - Quantità geometriche associate ai triangoli T e T' .

La forma analitica di \mathbf{I}_0 è riportata in [29] e in [27]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0 &= \int_{T'} \frac{1}{R} dS' = \\ &= \sum_{i=1}^3 P_i^0 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} - |d| \left(\tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

La notazione adottata è identica a quella utilizzata in [38], riportata di seguito e in Fig. 6.

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ = vettori posizione dei vertici del triangolo

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_{i+2} - \mathbf{r}_{i+1} \quad (i = 1, 3)$$

$$l_i = |\mathbf{l}_i|$$

$$\mathbf{R}_i^+ = \mathbf{r}_{i+2} - \mathbf{r}$$

$$R_i^+ = |\mathbf{R}_i^+|$$

$$\mathbf{R}_i^- = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}$$

$$R_i^- = |\mathbf{R}_i^-|$$

$$l_i^- = \frac{\mathbf{l}_i}{l_i} \cdot \mathbf{R}_i^-$$

$$l_i^+ = \frac{\mathbf{l}_i}{l_i} \cdot \mathbf{R}_i^+ = l_i^- + l_i$$

$$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_i^+$$

$$P_i^0 = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{R}_i^+$$

$$R_i^0 = \sqrt{(P_i^0)^2 + d^2}$$

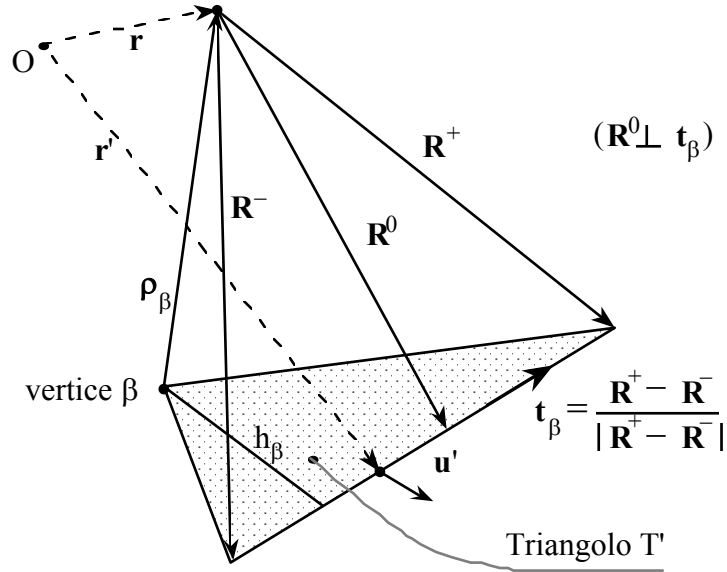


Fig. 6 - Definizione di alcune quantità utilizzate.

Il termine \mathbf{I}_1 viene ricavato in [38] e riportato in [16] con un'espressione differente, che risulta più adatta al calcolo analitico:

$$\mathbf{I}_1 = \int_{T'} \frac{\boldsymbol{\rho}'_{\beta}}{R} dS' = \mathbf{I}_W + \left[\boldsymbol{\rho}_{\beta} - \mathbf{n} (\boldsymbol{\rho}_{\beta} \cdot \mathbf{n}) \right] \mathbf{I}_0 \quad (35)$$

dove $\boldsymbol{\rho}_{\beta}$ è definito dalla relazione $\boldsymbol{\rho}_{\beta} = \boldsymbol{\rho}'_{\beta} + \mathbf{R}$ e \mathbf{I}_W è l'espressione riportata da Wilton *et al.* [38]:

$$\mathbf{I}_W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\left(R_i^0 \right)^2 \ln \frac{R_i^+ + I_i^+}{R_i^- + I_i^-} + R_i^+ I_i^+ - R_i^- I_i^- \right] \mathbf{u}_i \quad (36)$$

\mathbf{I}_{NC} rappresenta la parte dell'integrale non ciclica sui tre lati del triangolo:

$$\mathbf{I}_{NC} = -\mathbf{t}_{\beta} h_{\beta} \left(R_{\beta}^+ - R_{\beta}^- \right) + \left(\mathbf{R}_{\beta}^+ - \mathbf{t}_{\beta} \mathbf{R}_{\beta}^+ \cdot \mathbf{t}_{\beta} \right) h_{\beta} \ln \frac{R_{\beta}^+ + \mathbf{t}_{\beta} \cdot \mathbf{R}_{\beta}^+}{R_{\beta}^- + \mathbf{t}_{\beta} \cdot \mathbf{R}_{\beta}^-} \quad (37)$$

Applicando all'espressione di $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ definita in (33) l'operatore differenziale di rotore, ed utilizzando la relazione (35), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{I}(\mathbf{r}) &= -2 \int_{T'} \frac{\mathbf{R} \times \boldsymbol{\rho}'_{\beta}}{R^3} dS' = \\
&= 4 \nabla \times \mathbf{I}_W - 2 \left[\boldsymbol{\rho}_{\beta} - 2 \mathbf{n} (\boldsymbol{\rho}_{\beta} \cdot \mathbf{n}) \right] \times \nabla I_0 + \nabla \times \mathbf{I}_{NC}
\end{aligned} \tag{38}$$

Si dimostra che:

$$\nabla \times \mathbf{I}_W(\mathbf{r}) = \int_{T'} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^3} (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) dS' = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{l_i} d \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} \tag{39}$$

Il rotore del termine non ciclico sui lati del triangolo è nullo:

$$\nabla \times \mathbf{I}_{NC} = - \int_{C'} \left(\nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \boldsymbol{\rho}'_{\beta} \cdot \mathbf{u}' dl' = 0 \tag{40}$$

dove l'integrale è definito sul contorno C' del triangolo T' .

Il gradiente di I_0 , infine, risulta:

$$\begin{aligned}
\nabla I_0 &= - \int_{T'} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dS' = \\
&= \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i \left[- \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} + \frac{l_i^+}{|d| + R_i^+} - \frac{l_i^-}{|d| + R_i^-} \right] + \\
&+ \frac{l_i}{l_i} \left[-P_i^0 \left(\frac{1}{|d| + R_i^+} - \frac{1}{|d| + R_i^-} \right) \right] + \\
&+ \mathbf{n} \left[- \frac{d}{|d|} \left(\tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \right]
\end{aligned} \tag{41}$$

Combinando i precedenti risultati, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{I}(\mathbf{r}) &= 4 \nabla \times \mathbf{I}_W - 2 \left[\boldsymbol{\rho}_\beta - 2 \mathbf{n} (\boldsymbol{\rho}_\beta \cdot \mathbf{n}) \right] \times \nabla I_0 = \\
&= 4 \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{l}_i}{l_i} d \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} - 2 \left[\boldsymbol{\rho}_\beta - 2 \mathbf{n} (\boldsymbol{\rho}_\beta \cdot \mathbf{n}) \right] \times \\
&\times \left\{ \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i \left[-\ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} + \frac{l_i^+}{|d| + R_i^+} - \frac{l_i^-}{|d| + R_i^-} \right] + \right. \\
&\quad + \frac{\mathbf{l}_i}{l_i} \left[-P_i^0 \left(\frac{1}{|d| + R_i^+} - \frac{1}{|d| + R_i^-} \right) \right] + \\
&\quad \left. + \mathbf{n} \left[-\frac{d}{|d|} \left(\tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \right] \right\} \quad (42)
\end{aligned}$$

VERIFICA DEI RISULTATI

In questo ultimo Capitolo, si presentano alcuni risultati ottenuti con il programma realizzato, che dimostrano la validità del metodo e consentono di valutarne i vantaggi, soprattutto in termini di tempi di calcolo e di miglioramento delle prestazioni.

Nella prima parte del Capitolo, si considera una struttura semplice, il tronco di guida, per una valutazione dell'errore commesso nel calcolo dei termini di bassa frequenza; per il tronco di guida si possono valutare analiticamente i termini di bassa frequenza della matrice di ammettenza, ed è quindi possibile quantificare l'errore commesso nel calcolo di Y_{-1} e Y_1 al variare di alcuni parametri significativi.

Si dimostra che l'errore maggiore si commette nella valutazione del termine Y_1 , a causa della sommatoria sui modi della sfera, e che l'errore percentuale diminuisce infittendo la segmentazione superficiale e migliorando l'integrazione numerica.

Nella seconda parte del Capitolo viene analizzata una struttura più complessa, un trasduttore ortomodale di interesse applicativo; si evidenzia, in questo caso, una sensibile riduzione dei tempi di calcolo, di notevole interesse se si considera che la struttura è stata studiata con il nuovo programma senza tenere conto delle proprietà di simmetria: l'utilizzo di queste proprietà, non ancora possibile per problemi di implementazione, consentirebbe un ulteriore abbassamento del tempo di calcolo.

Questo ed altri possibili sviluppi futuri vengono discussi nell'ultima sezione del Capitolo.

1. CONFRONTO CON ESPRESSIONI ANALITICHE

Una valutazione della precisione con cui il programma calcola i termini di bassa frequenza può essere ottenuta dall'analisi di una struttura semplice, della quale si conosca l'espressione analitica dei parametri di ammettenza; una struttura particolarmente adatta a tale scopo è il tronco di guida.

Infatti, di questa struttura sono note in forma analitica tutti i parametri che entrano nell'espressione della matrice di ammettenza, cosicché è possibile valutare separatamente i diversi tipi di errore: gli errori dovuti alla rappresentazione delle correnti, alle integrazioni numeriche, al troncamento delle serie, ...

Nel caso del tronco di guida di sezione rettangolare (Fig. 1), l'espressione dell'ammettenza di ingresso del modo fondamentale TE_{10} è:

$$Y = Y_0 \operatorname{cotgh}(\gamma d) \quad (1)$$

dove Y_0 rappresenta l'ammettenza modale caratteristica e γ indica la costante di propagazione del modo considerato.

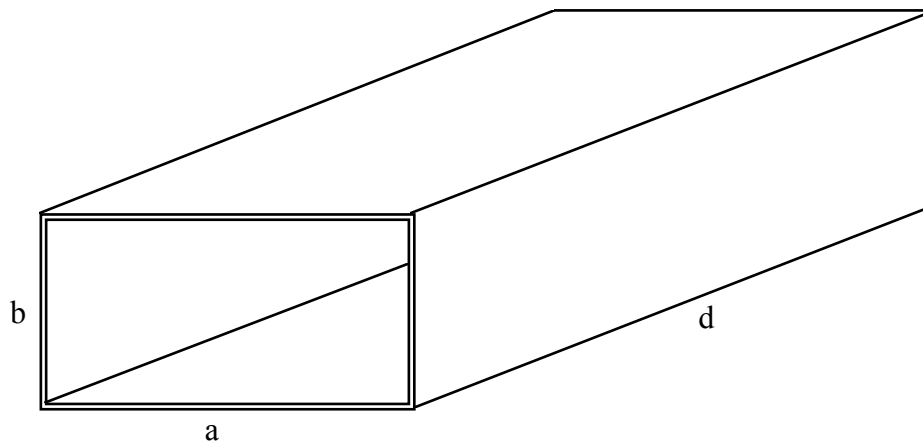


Fig. 1 - Il tronco di guida rettangolare.

Per calcolare i termini di bassa frequenza, l'espressione (1) deve essere espansa in serie di potenze di k per $k \rightarrow 0$. In questo caso, Y_0 e γ hanno le seguenti espressioni:

$$Y_0 = \frac{\sqrt{\kappa_c^2 - k^2}}{j\eta k} \quad (2)$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa_c^2 - k^2} \quad (3)$$

Dall'espansione di Y in serie di potenze di k , si ottiene:

$$Y = \frac{1}{j\eta k} Y_{-1} + \frac{jk}{\eta} Y_1 + O(k^3) \quad (4)$$

dove i termini di bassa frequenza sono:

$$Y_{-1} = \kappa_c \operatorname{cotgh}(\kappa_c d) \quad (5)$$

$$Y_1 = \frac{\operatorname{cotgh}(\kappa_c d)}{2 \kappa_c} - \frac{d \operatorname{cosech}^2(\kappa_c d)}{2} \quad (6)$$

Per il modo TE_{10} della guida rettangolare, il numero d'onda di taglio è:

$$\kappa_c = \frac{\pi}{a} \quad (7)$$

I valori che i termini di bassa frequenza Y_{-1} e Y_1 assumono al variare del rapporto d/a sono rappresentati nei grafici seguenti; nell'esempio, si considera la guida WR-90, cioè la guida standard per la banda X (8.2 - 12.4 GHz.), che ha le seguenti dimensioni:

$$a = 22.86 \text{ mm.}$$

$$b = 10.16 \text{ mm.}$$

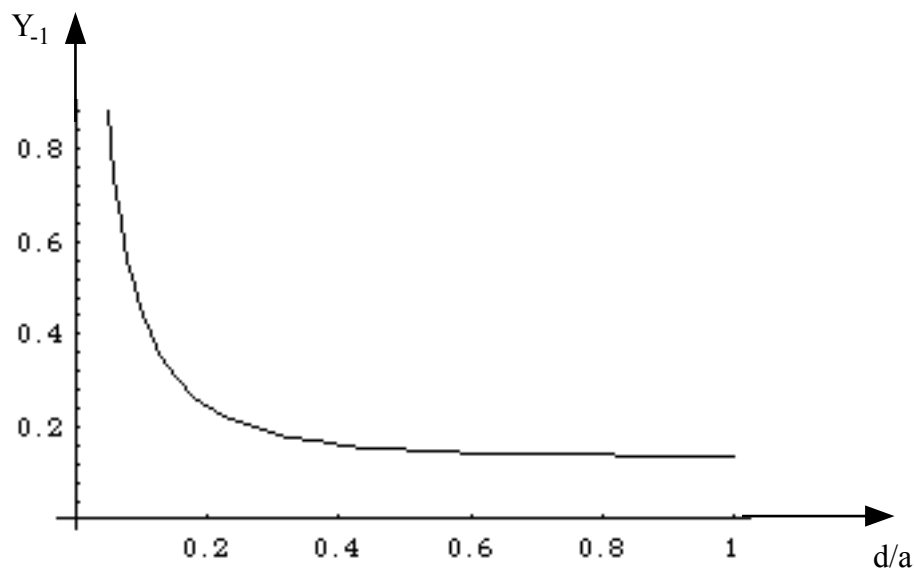


Fig. 2 - Andamento di Y_{-1} per la guida WR-90 al variare del rapporto d/a .

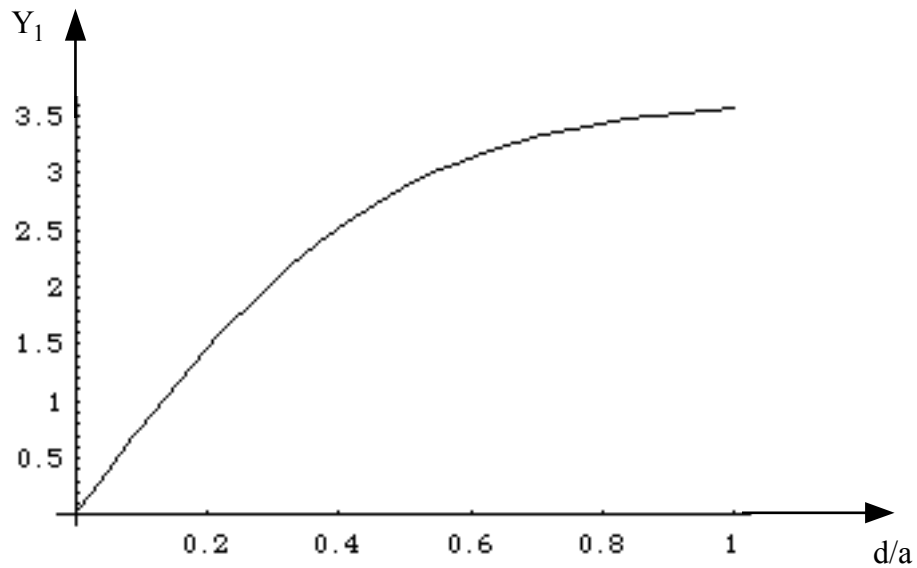


Fig. 3 - Andamento di Y_1 per la guida WR-90 al variare del rapporto d/a .

Si osservi che per valori sufficientemente elevati del rapporto d/a , cioè per tronchi di guida lunghi, i termini di bassa frequenza tendono a valori asintotici: il termine Y_{-1} tende a κ_c , mentre il termine Y_1 tende a $1/2\kappa_c$; su questo principio si basa il metodo di analisi che utilizza espressioni approssimate per i termini di bassa frequenza quando le guide sono sufficientemente lunghe.

Il vantaggio dell'approccio presentato in questo lavoro consiste proprio nella possibilità di valutare i parametri di ammettenza anche nel caso di tronchi di guida corti.

Nei Paragrafi successivi i valori dei termini di bassa frequenza calcolati con il nuovo metodo vengono messi a confronto con i valori teorici, per la guida WR-90.

2. IL TERMINE Y_{-1}

Il primo termine, detto *termine induttivo*, dello sviluppo in serie dei parametri di ammettenza viene calcolato in forma chiusa con le relazioni ricavate nel Capitolo 3.

Questo consente di ottenere valori molto precisi, tanto più prossimi al valore corretto quanto più è fitta la segmentazione della superficie della struttura e sofisticato il metodo con cui vengono effettuate le integrazioni numeriche.

Nel seguito, si presentano i risultati ottenuti per differenti infittimenti della segmentazione superficiale, per diverse regole di integrazione numerica, e al variare del rapporto d/a : per i vari casi, si considera l'errore rispetto al valore teorico.

Nella Tabella 1, sono riportati gli errori percentuali ottenuti per tre diversi valori di segmentazione e per diversi valori della lunghezza d , calcolati con la regola di integrazione standard (10 punti per triangolo): l'incremento della regola di integrazione consente lievi miglioramenti dei valori ottenuti.

	$\lambda / 20$	$\lambda / 10$	$\lambda / 6$
$d = a$	0.90 %	2.3 %	7.7 %
$d = a/2$	0.86 %	1.9 %	5.1 %
$d = a/5$	0.77 %	2.1 %	3.0 %
$d = a/10$	0.73 %	2.4 %	---

Tabella 1 - Errori percentuali nei risultati.

Dalla Tabella 1 si può osservare come la precisione dipenda fortemente dalla segmentazione superficiale: i risultati sono precisi a valori migliori dell'1% con una segmentazione di $\lambda/20$, che però risulta eccessiva in molte applicazioni.

Con dimensioni dei lati dei triangoli dell'ordine di $\lambda/10$, un valore tipico utilizzato per i metodi numerici, si ottengono errori intorno al 2%, spesso accettabili per questo termine, il cui contributo al risultato finale risulta sempre meno importante al crescere della frequenza.

Con una segmentazione decisamente meno fitta, la qualità dei risultati si deteriora, ma $\lambda/6$ costituisce un valore limite per una corretta rappresentazione dei campi.

Si è osservato che la proiezione dei campi modali di porta sulle funzioni di base risulta un'operazione critica: l'aggiunta della procedura di ri-normalizzazione dei campi (di cui si è discusso nel Capitolo 5) ha consentito di ridurre di oltre la metà l'errore nel calcolo di Y_{-1} : un approccio differente, che eviti la proiezione dei campi sulle funzioni di base, consentirebbe un ulteriore miglioramento dei risultati.

Per evitare la proiezione, tuttavia, è necessario calcolare analiticamente integrali del tipo:

$$\int_T \int_{T'} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \, dS \, dS'$$

nel caso di \mathbf{r} ed \mathbf{r}' coincidenti o molto vicini.

Dalla Tabella 1 si osserva inoltre che l'errore medio commesso risulta praticamente indipendente dalla lunghezza del tronco di guida: solo una riduzione eccessiva della lunghezza d , dell'ordine di $a/10$, con una segmentazione poco fine ($\lambda/6$), conduce a risultati non corretti: questo effetto è dovuto ad errori eccessivi nell'integrazione numerica su triangoli fisicamente molto vicini, ma giacenti su piani paralleli: in questo caso, il punto-campo ed il punto-sorgente sono molto prossimi, ma l'integrazione è completamente numerica, in quanto i triangolo non presentano alcun punto o lato in comune (ved. Capitolo 5).

L'incremento della regola di integrazione gaussiana, a fronte di un pesante aumento del tempo di calcolo, consente un miglioramento non sostanziale dei risultati.

Nella Tabella 2 viene considerato l'effetto dell'incremento della regola di integrazione gaussiana nel caso della guida WR-90 considerata in precedenza, per una fissata lunghezza $d = a/2$.

REGOLA DI INTEGRAZIONE	ERRORE PERCENTUALE	TEMPO NORMALIZZATO
10 punti / triangolo	1.9 %	1
20 punti / triangolo	1.5 %	4
35 punti / triangolo	1.3 %	12.25
56 punti / triangolo	1.1 %	31.36

Tabella 2 - Effetto dell'incremento della regola di integrazione.

3. IL TERMINE Y_1

Il secondo termine, detto *termine capacitivo*, risulta dalla somma di un termine espresso in forma chiusa e di un termine rappresentato da una sommatoria sui numeri d'onda risonanti della sfera.

A causa della lenta convergenza della serie, l'accuratezza nella determinazione dei risultati, in questo caso, risulta minore che nel caso precedente: la precisione ottenibile è dell'ordine di qualche per cento.

Il semplice incremento del numero di modi sferici calcolati non conduce a buoni risultati: infatti, gli integrali che coinvolgono i modi sferici che risuonano a frequenze molto elevate vengono calcolati in modo scadente, quando la dimensione dei triangoli che discretizzano la struttura diventa paragonabile o maggiore della lunghezza d'onda di risonanza del modo.

Anche in questo caso, si possono ottenere miglioramenti con una segmentazione più fine e con una regola di integrazione più accurata, ma si rimane tuttavia abbastanza lontani dalle precisioni ottenibili con il termine considerato in precedenza.

La vera soluzione a questi problemi è rappresentata dal calcolo di Y_1 in forma chiusa: per quanto detto nel Capitolo 4, è possibile calcolare i termini di bassa frequenza considerando una sfera di raggio tendente all'infinito, utilizzando quindi le funzioni di Green dello spazio libero anziché quelle del risuonatore sferico; per lo spazio libero, si conosce l'espressione in forma chiusa anche della funzione \underline{G} introdotta nel Capitolo 4, ed è quindi possibile calcolare il termine Y_1 in forma chiusa.

L'utilizzo della funzione di Green dello spazio libero presenta anche altri vantaggi:

1. le espressioni delle funzioni di Green sono molto più semplici, e quindi richiedono minori tempi di calcolo;
2. inoltre, nel caso del risuonatore sferico, le funzioni di Green sono calcolate interpolando campioni delle funzioni $f_1 \dots f_5$ definite nel Capitolo 2, al fine di ridurre i tempi di calcolo, ma questo introduce inevitabilmente degli errori;
3. le funzioni di Green dello spazio libero possono essere calcolate direttamente nel sistema di riferimento (x,y,z) , anziché nel sistema di riferimento (r,s,t) : la conversione da un sistema di riferimento all'altro risulta molto onerosa, al punto che richiede circa l'80% del tempo globale impiegato per il calcolo delle funzioni di Green.

Per queste motivazioni, sarebbe conveniente utilizzare le funzioni di Green dello spazio libero anche per il calcolo della Y_{-1} , benché di questa sia nota l'espressione in forma chiusa anche se si utilizzano le funzioni di Green del risuonatore sferico.

4. ANALISI DI UNA STRUTTURA COMPLESSA

Nella parte finale del Capitolo vengono messi a confronto il nuovo metodo ed il metodo originale, che utilizza l'approssimazione delle guide lunghe: si dimostra che, a fronte di risultati molto simili, con il nuovo metodo si ottiene una riduzione considerevole dei tempi di calcolo.

Le cause della diminuzione dei tempi sono di duplice natura:

1. l'eliminazione dei tronchi di guida terminali consente di ridurre il numero di triangoli che discretizzano la superficie della struttura;
2. si riduce il raggio minimo della sfera che racchiude la struttura e, di conseguenza, il numero di modi della sfera che risuonano nella banda di interesse.

Accanto alla diminuzione dei tempi, si assiste ad un miglioramento nella determinazione dei modi risonanti della struttura: infatti, aumenta il rapporto tra il numero di modi interni e il numero di modi esterni e, dato il minor numero di modi esterni, migliora la capacità di discriminare quelli interni da quelli esterni.

I vantaggi del nuovo metodo sono più spiccati nel caso di strutture costituite da un nucleo centrale compatto, nel quale si innestano le guide terminali; una struttura per la quale risulti particolarmente vantaggiosa l'applicazione del nuovo metodo è il trasduttore ortomodale (OMT) rappresentato in Fig. 4.

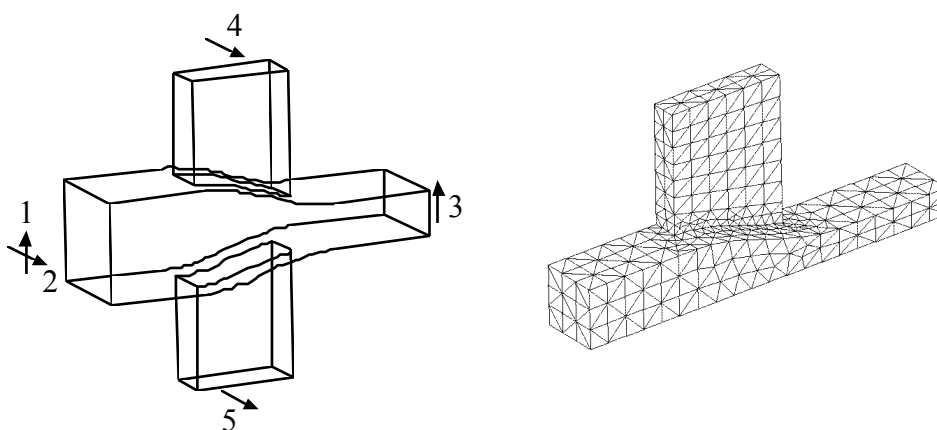


Fig. 4 - Geometria del trasduttore ortomodale analizzato e discretizzazione superficiale di un quarto della struttura.

Nell'OMT presentato, la guida quadrata (di lato 22.86 mm.) supporta due modi degeneri con polarizzazioni ortogonali, il TE_{10} e il TE_{01} .

La guida quadrata è connessa attraverso il corpo centrale rastremato ad una guida centrale e a due laterali (tutte WR-90), disposte simmetricamente.

Per ragioni di simmetria, il modo TE_{10} della guida quadrata (porta 1) si accoppia con il modo fondamentale della guida centrale (porta 3), mentre il modo TE_{01} si accoppia in eguale misura con le due guide laterali (porte 4 e 5).

Il trasduttore ortomodale è stato analizzato su tutta la banda X con il vecchio programma e, per confronto, con un programma commerciale per l'analisi di circuiti, HFSS, prodotto dalla Hewlett-Packard: i risultati, presentati ad un recente convegno [9], si sono dimostrati in buon accordo.

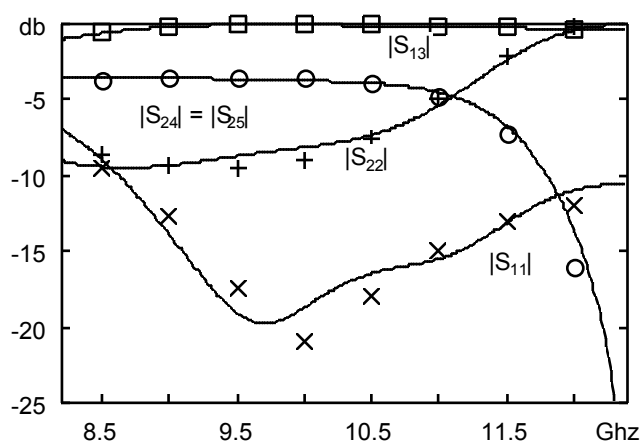


Fig. 5 - Andamento in frequenza dei parametri di diffusione, ottenuti con il programma originale (tratto continuo) e con HFSS (segni discreti).

Per la caratterizzazione dell'OMT con le guide lunghe, analizzato dal programma originale, è stato possibile sfruttare le due simmetrie della struttura: pertanto, solo un quarto della superficie è discretizzato in 516 elementi triangolari; il raggio della sfera è $a = 43$ cm. e nella rappresentazione dei campi sono stati considerati 1709 modi della sfera; il tempo per il calcolo su tutta la banda è stato di circa 10 minuti. Il numero di modi risonanti trovati è 488, di cui solo 79 interni (il 16%).

Con il programma originale, non è possibile analizzare l'OMT senza tenere conto delle simmetrie, a causa dell'eccessiva dimensione del problema matriciale agli autovalori: la struttura completa, in questo caso, è costituita da oltre 2000 elementi triangolari, ed il numero di modi del risonatore sferico che risuonano nella banda di interesse è di circa 1700; la dimensione del problema è dell'ordine di $N_{\text{triangoli}}/2 + N_{\text{modi}}$, quindi in questo caso risulta di circa 2700.

Il nuovo programma, invece, considera una struttura ridotta, nella quale i tronchi di guida sono stati notevolmente accorciati (Fig. 6): per discretizzare la superficie dell'intera struttura sono stati utilizzati 726 elementi triangolari, il raggio della sfera è di 23.5 cm. ed il numero di modi sferici considerati è limitato a 298.

Si ha una sensibile diminuzione del numero di modi risonanti calcolati: il programma trova 78 modi, di cui 22 interni (il 28%), e la capacità di discriminazione tra modi interni e modi esterni (quantificabile attraverso il rapporto tra le intensità dei campi all'interno e all'esterno della struttura) appare migliorata.

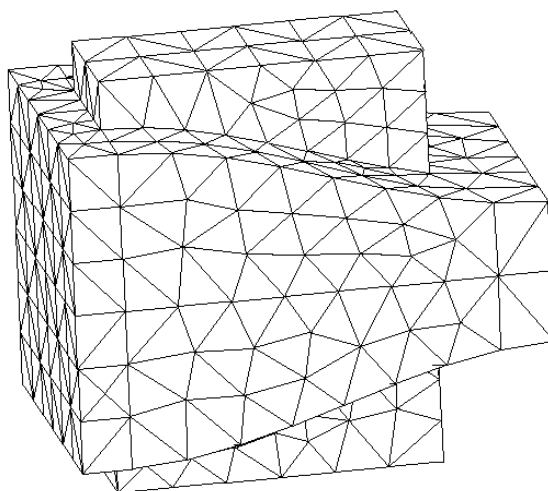


Fig. 6 - Segmentazione dell'OMT con le guide troncate.

Questo consente di ottenere l'analisi completa della struttura in 6' 40", cioè un tempo minore di quello che il programma originale impiegava per caratterizzare la struttura considerando le due simmetrie.

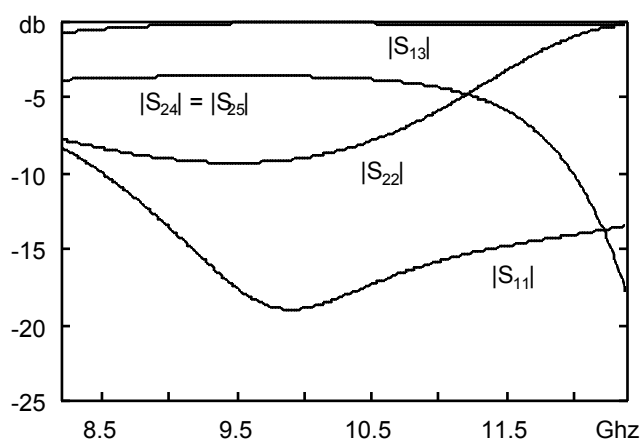


Fig. 7 - Andamento in frequenza dei parametri di diffusione, ottenuti con il nuovo programma.

I parametri di diffusione dell'OMT, ottenuti con questo nuovo metodo, sono rappresentati in Fig. 7: essi non si discostano in modo significativo dai precedenti (Fig. 5), e l'errore predominante è introdotto dal termine Y_1 , calcolato in forma di serie.

Con il nuovo programma non è ancora possibile tenere conto delle simmetrie, poiché ciò avrebbe complicato notevolmente la scrittura del codice, e per la prima stesura si è preferito evitare eccessive difficoltà implementative.

Tuttavia, l'introduzione delle simmetrie consentirebbe un miglioramento significativo delle prestazioni del programma; infatti, è possibile stimare con buona precisione il tempo di calcolo delle singole routine in relazione al numero di elementi che costituiscono la struttura e, sulla base di queste stime, si può affermare che il tempo richiesto dal nuovo programma per l'analisi dell'OMT, sfruttando le due simmetrie, si ridurrebbe a soli 30 secondi.

Questo ulteriore miglioramento potrebbe risultare decisivo per la realizzazione di un sistema automatico di progetto e di ottimizzazione di componenti tridimensionali in guida d'onda: un programma del genere è già stato sviluppato per il caso bidimensionale, dove il tempo di analisi di circuiti mediamente complessi si aggira sui 5÷10 secondi.

5. CONCLUSIONI E PROSPETTIVE

In questa sezione conclusiva, si vuole ripercorrere brevemente il cammino che ha condotto alla stesura di questo lavoro.

Il punto di partenza è costituito dal programma preesistente, in grado di calcolare la matrice di ammettenza generalizzata di circuiti tridimensionali in guida d'onda; a causa delle approssimazioni fatte sui termini di bassa frequenza, tuttavia, è necessario rispettare la condizione che i tronchi di guida siano lunghi almeno $\lambda/2$; l'utilizzo di questo programma, pertanto, risulta oneroso, soprattutto nei casi in cui la giunzione è costituita da un corpo centrale, di dimensioni ridotte, sul quale si innestano i tronchi di guida.

Il nuovo approccio, del quale si presentano in modo dettagliato gli sviluppi teorici nel Capitolo 3, consente di calcolare i termini di bassa frequenza senza ipotesi restrittive, ma a costo di alcune complicazioni teoriche (quali la necessità di considerare sorgenti magnetiche, il calcolo della funzione di Green magnetica del risonatore sferico e i problemi legati all'integrazione numerica in presenza delle singolarità della funzione di Green).

I vantaggi derivanti dall'applicazione del nuovo metodo sono illustrati in questo Capitolo, e sono legati principalmente a:

1. una forte riduzione dei tempi di calcolo;
2. una migliore discriminazione dei modi risonanti della struttura;
3. la possibilità di analizzare strutture particolarmente complesse sezionandole in sotto-blocchi da studiare separatamente.

Ulteriori affinamenti del metodo sono possibili, e gli sviluppi vanno in tre direzioni:

1. l'utilizzo della funzione di Green dello spazio libero, nel calcolo delle matrici implicate nella determinazione dei termini di bassa frequenza, consentirebbe di esprimere anche il termine \mathbf{Y}_1 in forma chiusa: questo condurrebbe ad una riduzione dell'errore nella determinazione di \mathbf{Y}_1 , attualmente rilevante.
2. il calcolo diretto degli integrali relativi ai campi modali di porta eviterebbe la proiezione dei campi magnetici sulle funzioni di base, operazione che si è dimostrata essere critica: questo ridurrebbe gli errori in entrambi i termini di bassa frequenza.
3. la possibilità di sfruttare le simmetrie della struttura consentirebbe una forte riduzione dei tempi di calcolo: quando i tempi richiesti per l'analisi di una struttura mediamente complessa fossero dell'ordine del minuto, si potrebbe pensare all'implementazione di un sistema di progetto e di ottimizzazione automatica per circuiti tridimensionali in guida d'onda.

CALCOLO DELLA FUNZIONE g_m

In questa Appendice viene descritta la procedura per il calcolo in forma chiusa della funzione di Green scalare $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nel caso particolare di una cavità sferica di raggio a . Per quanto dimostrato nel Capitolo 2, la funzione $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ soddisfa le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{V} \\ \frac{\partial}{\partial n} g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \tag{1}$$

Nell'equazione che determina $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è necessario aggiungere il termine $1/V$ (dove V è il volume della cavità); in caso contrario, il problema non ammette soluzione ([35], cap. 1). L'aggiunta di un termine $1/V$ non ha alcun effetto sui campi.

Nel caso della cavità sferica, dunque, si risolve il problema seguente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{3}{4\pi a^3} \\ \frac{\partial}{\partial n} g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \tag{2}$$

La funzione scalare $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si può scrivere come somma di tre contributi: il primo termine g_δ contiene la singolarità; il secondo termine g_v deve avere un laplaciano uguale a $1/V$; il terzo contributo g_m^0 è la soluzione dell'equazione di Laplace omogenea e deve soddisfare la condizione al contorno.

La funzione $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si esprime, quindi, nella forma:

$$g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_\delta + g_v + g_m^0 \quad (3)$$

Si consideri la **prima componente**: il termine g_δ contiene la singolarità ed è uguale al termine singolare della funzione scalare di tipo elettrico (e della funzione di Green dello spazio libero).

$$g_\delta = \frac{1}{4\pi R} \quad (4)$$

dove R è la distanza tra il punto-sorgente e il punto-campo:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} \quad (5)$$

Il laplaciano della funzione g_δ fornisce la δ .

Per quanto riguarda il **secondo termine**, la funzione g_v deve avere il laplaciano uguale all'inverso del volume della cavità; si dimostra che una soluzione risulta essere:

$$g_v = \frac{r^2 + r'^2 - 3a^2}{8\pi a^3} \quad (6)$$

La **terza componente**, infine, è la funzione g_m^0 , che si trova come soluzione del problema omogeneo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{\partial}{\partial n} (g_\delta + g_v) \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \quad (7)$$

Calcolando il valore della derivata normale sulla base dei risultati già acquisiti, il problema diventa:

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi(a-r')^2} - \frac{1}{4\pi a^2} \quad \text{per } r = a \end{aligned} \quad (8)$$

La soluzione del problema è del tipo:

$$g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(u) \quad (9)$$

dove la funzione $P_n(u)$ rappresenta il polinomio di Legendre di ordine n , e gli a_n sono coefficienti da determinare in modo tale che la funzione g_m^0 soddisfi la condizione al contorno.

Si dimostra che $\nabla^2 g_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$: l'espressione (9), infatti, rappresenta uno sviluppo in funzioni armoniche della cavità sferica ([24], pag. 1264).

La funzione g_δ può essere espansa in forma di serie ([15], pag. 1027):

$$g_\delta = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} = \frac{1}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(u) \quad (\text{per } r < r') \quad (10)$$

La derivata della funzione g_δ rispetto alla normale, calcolata per $r = a$ utilizzando l'espressione in forma di serie (10), risulta:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} g_\delta \right|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{a^{n+2}} (n+1) P_n(u) \quad (11)$$

Si osservi che il termine della sommatoria corrispondente a $n = 0$ vale $-1/4\pi a^2$. Estraeendo dunque il primo termine dalla sommatoria si ottiene:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} g_\delta \right|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^n}{a^{n+2}} (n+1) P_n(u) - \frac{1}{4\pi a^2} \quad (12)$$

D'altra parte, calcolando il valore della derivata normale della funzione g_δ utilizzando l'espressione in forma chiusa (4), si ottiene:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} g_\delta \right|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi(a^2 - r'^2)} \quad (13)$$

Dal confronto delle espressioni (12) e (13) risulta:

$$-\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^n}{a^{n+2}} (n+1) P_n(u) = -\frac{1}{4\pi(a^2 - r'^2)} + \frac{1}{4\pi a^2} \quad (14)$$

Si calcoli ora la derivata normale di g_m^0 (per $r = a$) per determinare i coefficienti a_n :

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} g_m^0 \right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n a^{n-1} P_n(u) \quad (15)$$

La condizione al contorno (8) è verificata se (14) e (15) sono uguali a meno del segno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n a^{n-1} P_n(u) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^n}{a^{n+2}} (n+1) P_n(u) \quad (16)$$

La relazione (16) permette di determinare a_n :

$$a_n = \frac{1}{4\pi} \frac{n+1}{n} \frac{r'^n}{a^{2n+1}} \quad n = 1.. \infty \quad (17)$$

La soluzione g_m^0 del problema omogeneo si ottiene sostituendo i coefficienti a_n nell'espressione (9):

$$g_m^0 = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} h^n P_n(u) \quad (18)$$

La sommatoria di (18) può essere espressa in forma chiusa. Si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} h^n P_n(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2hu+h^2}} - \ln \frac{\sqrt{1-2hu+h^2} - hu + 1}{2} - 1 \quad (19)$$

Introducendo la funzione ausiliaria f_0 si ottiene una forma più compatta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} h^n P_n(u) = f_0 - \ln \frac{1/f_0 - hu + 1}{2} - 1 \quad (20)$$

dove f_0 è definita nel Capitolo 2.

In definitiva, la funzione scalare $g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ha la seguente forma:

$$\boxed{g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} + \frac{r^2 + r'^2 - 3a^2}{8\pi a^3} + \frac{1}{4\pi a} \left[f_0 - \ln \frac{1/f_0 - hu + 1}{2} - 1 \right]} \quad (21)$$

B

CALCOLO DELLA FUNZIONE $\underline{\mathbf{G}}_m$

La funzione diadica di Green $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ rappresenta il primo termine solenoidale dello sviluppo proposto (nel Capitolo 2) per la funzione di Green magnetica $\underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e contiene la singolarità debole, proporzionale a R^{-1} .

Per quanto detto nel Capitolo 2, la funzione $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si ricava come soluzione del problema seguente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \underline{\mathbf{I}} - \nabla \nabla' g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m) &= 0 \quad \text{sul contorno} \end{aligned} \tag{1}$$

Il problema (1), al solito, è risolto nel caso particolare di cavità sferica di raggio a .

1. ESPANSIONE MODALE DI $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

La procedura adottata per il calcolo della funzione di Green magnetica $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è formalmente identica a quella utilizzata in [11] per il calcolo della funzione di Green elettrica $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e segue il metodo generale descritto in [22]: si basa essenzialmente su uno sviluppo modale della $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in autofunzioni della cavità sferica.

Nel caso di una cavità sferica di raggio a , la funzione solenoidale $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si scrive nella forma:

$$\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{k^2} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{r}'_0) S' + (\nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \mathbf{r}'_0) S'' \quad (2)$$

dove \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}'_0 sono i versori nelle direzioni \mathbf{r} e \mathbf{r}' . Le funzioni S' e S'' sono date da:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n \sum_{m=0}^n \frac{2(n-m)!}{\varepsilon_m (n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta') \cos[m(\varphi - \varphi')] \\ S'' &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Y_n \sum_{m=0}^n \frac{2(n-m)!}{\varepsilon_m (n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta') \cos[m(\varphi - \varphi')] \end{aligned} \quad (3)$$

r, ϑ, φ e r', ϑ', φ' sono le coordinate sferiche di \mathbf{r} e \mathbf{r}' rispettivamente, P_n^m sono le funzioni associate di Legendre, ed $\varepsilon_m = 2$ per $m = 0$, $\varepsilon_m = 1$ per $m \neq 0$.

Le stesse funzioni S' e S'' si possono riscrivere come sommatorie a un solo indice, per le proprietà delle funzioni associate di Legendre ($u = \cos\vartheta$):

$$S' = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n P_n(u) \quad S'' = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Y_n P_n(u) \quad (4)$$

Rispetto alla trattazione svolta in [11] per la funzione di Green di tipo elettrico, si ha solamente lo scambio tra le funzioni Y_n e Z_n , dovuto al fatto che la funzione di Green magnetica soddisfa una condizione al contorno diversa dalla funzione di Green elettrica.

Le funzioni Y_n e Z_n sono note in forma chiusa:

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{j_n(kr)}{k j_n'(ka)} [n_n'(ka) j_n(kr') - n_n(kr') j_n'(ka)] \\ Z_n &= \frac{j_n(kr)}{k j_n(ka)} [n_n(ka) j_n(kr') - n_n(kr') j_n(ka)] \end{aligned} \quad (5)$$

dove j_n e n_n sono le funzioni di Bessel sferiche, definite come:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x) \quad n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_{n+1/2}(x) \quad (6)$$

La funzione $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si può rappresentare come la somma di una parte singolare, nota a priori in quanto identica alla parte singolare della $\underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, e di una parte regolare, che dipende dalle condizioni al contorno.

$$\boxed{\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi R} \left(\underline{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{R} \mathbf{R}}{R^2} \right) + \underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \quad (7)$$

Per la dipendenza da k dei tre termini che compongono la funzione di Green magnetica (nell'espressione proposta nel Capitolo 2), vale la relazione:

$$\frac{1}{8\pi R} \left(\underline{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{R} \mathbf{R}}{R^2} \right) + \underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} (k^2 \underline{\mathbf{G}}_M) \quad (8)$$

Pertanto, sostituendo (2) e (4) nella (8), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi R} \left(\underline{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{R} \mathbf{R}}{R^2} \right) + \underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{r}_0') \frac{1}{8\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\partial^2}{\partial k^2} Z_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \Big|_{k=0} P_n(u) \quad (9) \\ + (\nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \mathbf{r}_0') \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Y_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) P_n(u) \end{aligned}$$

2. DETERMINAZIONE DI $\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ IN FORMA DI SERIE

La relazione (9) richiede il calcolo dei limiti (per $k \rightarrow 0$) della funzione Y_n e della derivata seconda della funzione Z_n .

Si osservi, dalla definizione di Y_n e Z_n , che entrambe le funzioni hanno una parte dipendente dalle condizioni al contorno, ed una parte indipendente, nella quale non compare il raggio a della cavità sferica.

Questa osservazione porta a concludere che il secondo membro della relazione (9) presenta un termine indipendente da a , il quale fornisce la parte singolare di $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, e una parte dipendente dalle condizioni al contorno, il cui contributo corrisponde a $\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Dalle definizioni (5) risulta:

$$\begin{aligned} Y_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) &= \frac{r}{2n+1} \left(\frac{r}{r'}\right)^n + \frac{na}{(n+1)(2n+1)} h^{n+1} \\ \frac{\partial^2}{\partial k^2} Z_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \Big|_{k=0} &= \frac{r}{2n+1} \left(\frac{r}{r'}\right)^n \left(\frac{r'^2}{2n-1} - \frac{r^2}{2n+3} \right) + \frac{a h^{n+1}}{2n+3} \left(\frac{r^2 + r'^2}{2n+1} - \frac{2a^2}{2n-1} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Poiché, come si è detto, solo la parte dipendente dal raggio a fornisce un contributo a $\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, si ottiene un'espressione per $\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in forma di serie:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{a^3}{4\pi} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{r}'_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n+1} P_n(u)}{n(n+1)(2n+3)} \left(\frac{r^2 + r'^2}{2a^2} - \frac{2n+1}{2n-1} \right) \\ &+ \frac{a}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \mathbf{r}'_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n+1} P_n(u)}{(n+1)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Gli operatori differenziali che compaiono nella (11) sono ricavati in [11] per il sistema di riferimento $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ adottato e sono riportati di seguito per comodità:

$$(\nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \mathbf{r}'_0) = \frac{\mathbf{s}_0 \mathbf{s}'_0}{r r'} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\mathbf{t}_0 \mathbf{t}'_0}{r r'} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + L \right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{r}_0)(\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{r}'_0) &= \mathbf{r}_0 \mathbf{r}'_0 \frac{1}{r^2 r'^2} L^2 - \mathbf{r}_0 \mathbf{s}'_0 \frac{v}{r^2 r'} L \frac{\partial^2}{\partial r' \partial u} + \mathbf{s}_0 \mathbf{r}'_0 \frac{v}{r^2 r'} L \frac{\partial^2}{\partial r' \partial u} + \\ &- \frac{\mathbf{s}_0 \mathbf{s}'_0}{r r'} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + L \right) \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} + \frac{\mathbf{t}_0 \mathbf{t}'_0}{r r'} \frac{\partial^3}{\partial r \partial r' \partial u} \end{aligned} \quad (13)$$

dove $L = v^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial}{\partial u}$ e $v^2 = 1 - u^2 = \sin^2(\vartheta)$.

Per ragioni di simmetria, la diade $\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ha solo 5 delle 9 possibili componenti, in particolare le componenti $\mathbf{r}\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}\mathbf{s}'$, $\mathbf{s}\mathbf{r}'$, $\mathbf{s}\mathbf{s}'$, $\mathbf{t}\mathbf{t}$.

$$\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{r}_0 \mathbf{r}'_0 G_{rr'}^0 + \mathbf{r}_0 \mathbf{s}'_0 G_{rs'}^0 + \mathbf{s}_0 \mathbf{r}'_0 G_{sr'}^0 + \mathbf{s}_0 \mathbf{s}'_0 G_{ss'}^0 + \mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0 G_{tt}^0 \quad (14)$$

Applicando ora gli operatori differenziali definiti dalle relazioni (12) e (13) all'espressione (11), si ottengono le componenti di $\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$G_{rr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+3} h^{n-1} P_n(u) \left(\frac{r^2 + r'^2}{2a^2} - \frac{2n+1}{2n-1} \right) \quad (15)$$

$$G_{rs'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{v}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1} P_n'(u)}{2n+3} \left(\frac{(n+1)r^2}{2a^2} + \frac{(n+3)r'^2}{2a^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n-1} \right) \quad (16)$$

$$G_{sr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -G_{rs'}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_{ss'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} P_n'(u) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{h}{(n+1)^2} - \frac{u(n+3)}{2a^2 n(2n+3)} (r^2 + r'^2) + \frac{u(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)(2n+3)} \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3} h^{n-1} P_n(u) \left(\frac{n+3}{2a^2} (r^2 + r'^2) - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n-1} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} G_{tt}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} P_n'(u) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{(n+3)}{2a^2 n(2n+3)} (r^2 + r'^2) - \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)(2n+3)} - \frac{h u}{(n+1)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} h^n P_n(u) \end{aligned} \quad (19)$$

Le componenti di $\underline{\mathbf{G}}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ricavate in forma di serie possono essere rimaneggiate con semplici passaggi algebrici, in modo tale da esprimere le componenti in termini di serie di cui si conosca un'espressione in forma chiusa.

$$G_{rr'}^0 = \frac{1}{4\pi a} \left[\frac{r^2 + r'^2}{2a^2} S_1 + \frac{1}{4} (S_3 - S_2) \right] \quad (20)$$

$$G_{rs'}^0 = \frac{v}{4\pi a} \left[\frac{r^2}{2a^2} S_4 + \frac{r'^2}{2a^2} S_5 + \frac{1}{4} (S_7 - S_6) \right] \quad (21)$$

$$G_{ss'}^0 = \frac{1}{4\pi a} \left[S_8 + \frac{S_{13} - S_{12}}{4} + u \frac{3S_6 + S_7 - 2S_{10}}{6} + \frac{r^2 + r'^2}{2a^2} \left(u \frac{2S_5 - S_9}{3} + S_{11} \right) \right] \quad (22)$$

$$G_{tt}^0 = \frac{1}{4\pi a} \left[S_{14} - u S_8 + \frac{1}{6} (2S_{10} - 3S_6 - S_7) + \frac{r^2 + r'^2}{6a^2} (S_9 - 2S_5) \right] \quad (23)$$

Le serie S_i hanno le seguenti espressioni:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+3} h^{n-1} P_n(u) \quad (24)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n-1} h^{n-1} P_n(u) \quad (25)$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n+3} h^{n-1} P_n(u) \quad (26)$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3} h^{n-1} P_n'(u) \quad (27)$$

$$S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n+3} h^{n-1} P_n'(u) \quad (28)$$

$$S_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n-1} h^{n-1} P_n'(u) \quad (29)$$

$$S_7 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} h^{n-1} P_n'(u) \quad (30)$$

$$S_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} h^n P_n'(u) \quad (31)$$

$$S_9 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n} h^{n-1} P_n'(u) \quad (32)$$

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} h^{n-1} P_n'(u) \quad (33)$$

$$S_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{2n+3} h^{n-1} P_n(u) \quad (34)$$

$$S_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2(2n+1)}{2n-1} h^{n-1} P_n(u) \quad (35)$$

$$S_{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2(2n+1)}{2n+3} h^{n-1} P_n(u) \quad (36)$$

$$S_{14} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} h^n P_n(u) \quad (37)$$

3. DETERMINAZIONE DI $\underline{G}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ IN FORMA CHIUSA

Per le serie (24)-(37) può essere ricavata un'espressione in forma chiusa:

$$S_1 = \frac{1}{2}(u-h) f_0^3 - 2 f_0 f_1 \quad (38)$$

$$S_2 = (-3h + 2u + 2h^2u - hu^2) f_0^5 + (u-h) f_0^3 + (3u-h) f_0 - 4 h^2 f_0 f_1 \quad (39)$$

$$S_3 = (-3h + 2u + 2h^2u - hu^2) f_0^5 - (u-h) f_0^3 + 4 f_0 f_1 \quad (40)$$

$$S_4 = \frac{1}{2} f_0^3 + f_0^2 f_3 \quad (41)$$

$$S_5 = \frac{1}{2} f_0^3 - 3 f_0^2 f_3 \quad (42)$$

$$S_6 = (1 - 2h^2 + hu) f_0^5 + 2 f_0^3 + 3 f_0 - 6 h^2 f_0^2 f_3 \quad (43)$$

$$S_7 = (1 - 2h^2 + hu) f_0^5 - 2 f_0^2 f_3 \quad (44)$$

$$S_8 = f_0^3 f_5 \quad (45)$$

$$S_9 = f_0^3 + 3 f_0 + 3hu f_0^2 f_4 \quad (46)$$

$$S_{10} = 2(1 - 2h^2 + hu) f_0^5 + 3 f_0^3 + f_0 + hu f_0^2 f_4 \quad (47)$$

$$S_{11} = \frac{1}{2}(u-h) f_0^3 + 2 f_0 f_1 + u f_0 - hv^2 f_0^2 f_4 \quad (48)$$

$$S_{12} = (-3h + 2u + 2h^2u - hu^2) f_0^5 + 2(u-h) f_0^3 + (8u - 3h) f_0 - 12h^2 f_0 f_1 + hv^2 f_0^2 f_4 \quad (49)$$

$$S_{13} = (-3h + 2u + 2h^2u - hu^2) f_0^5 + \frac{4}{3} f_0 f_1 + \frac{1}{3} u f_0 - \frac{1}{3} hv^2 f_0^2 f_4 \quad (50)$$

$$S_{14} = -h f_0 f_2 \quad (51)$$

Le funzioni $f_0 - f_4$ corrispondono a quelle definite in [6] e riportate nel Capitolo 2; si definisce la funzione f_5 come:

$$f_5 = \frac{1}{hv^2 f_0^3} \left[u \ln \left(\frac{1/f_0 + h - u}{1 - u} \right) + \ln \left(\frac{1/f_0 - hu + 1}{2} \right) \right] \quad (52)$$

Le funzioni $f_0 - f_5$ sono regolari, ma presentano delle forme indeterminate per $h \rightarrow 0$, $u \rightarrow \pm 1$ e $h, u \rightarrow +1$; in questi casi, per la valutazione numerica delle funzioni, si rende necessario il passaggio al limite. Per quanto riguarda le funzioni $f_0 - f_4$, il calcolo dei limiti intorno ai punti critici è sviluppato in [11], mentre per la f_5 risulta:

- per $h \rightarrow 0$

$$f_5 = \frac{1}{4}h - \frac{5}{12}uh^2 + \frac{1}{32}(9 - 5u^2)h^3 \quad (53)$$

- per $u \rightarrow +1$:

$$f_5 = \frac{1}{2} (1 - h)^2 \left[1 + (1 - h) \frac{\log(1 - h)}{h} \right] + \frac{1}{8} (1 - u) \left[(2 + 7h + h^2) + 2(1 + 4h + h^2)(1 - h) \frac{\log(1 - h)}{h} \right] \quad (54)$$

- per $u \rightarrow -1$:

$$f_5 = \frac{1}{2} (1 + h)^2 \left[-1 + (1 + h) \frac{\log(1 + h)}{h} \right] + \frac{1}{8} (1 + u) \left[(-2 + 7h - h^2) + 2(1 - 4h + h^2)(1 + h) \frac{\log(1 + h)}{h} \right] \quad (55)$$

- per $h \rightarrow +1, u \rightarrow +1$:

$$f_5 \rightarrow 1 \quad (56)$$

Si può, infine, scrivere l'espressione in forma chiusa delle componenti di $\mathbf{G}_m^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, sostituendo le espressioni (38)-(51) nelle (20)-(23). Ciò che si ottiene è:

$$\mathbf{G}_{rr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{16\pi a} \left[\frac{r^2 + r'^2 - 2a^2}{a^2} (u - h) f_0^2 - (3u - h) - 4 \left(\frac{r^2 + r'^2}{a^2} - 1 - h^2 \right) f_1 \right] \quad (57)$$

$$\mathbf{G}_{rs'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{v f_0^2}{16\pi a} \left[\left(\frac{r^2 + r'^2}{a^2} - 2 \right) f_0 - \frac{3}{f_0} + 2 \left(\frac{r^2}{a^2} - 3 \frac{r'^2}{a^2} - 1 + 3 h^2 \right) f_3 \right] \quad (58)$$

$$\mathbf{G}_{sr'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \mathbf{G}_{rs'}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (59)$$

$$\mathbf{G}_{ss'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{4\pi a} \left[\left(\frac{r^2 + r'^2}{2 a^2} - 1 \right) \frac{u-h}{2} f_0^2 + f_0^2 f_5 - \frac{3(u-h)}{4} + \left(\frac{r^2 + r'^2}{a^2} + \frac{1}{3} + 3 h^2 \right) (f_1 - u f_0 f_3) - \left(\frac{r^2 + r'^2}{2 a^2} + \frac{1}{3} \right) h f_0 f_4 \right] \quad (60)$$

$$\mathbf{G}_{tt'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{f_0}{4\pi a} \left[\left(\frac{r^2 + r'^2}{2 a^2} - \frac{7}{6} \right) - h f_2 + \left(\frac{r^2 + r'^2}{a^2} + \frac{1}{3} + 3 h^2 \right) f_0 f_3 + \left(\frac{r^2 + r'^2}{2 a^2} + \frac{1}{3} \right) h u f_0 f_4 - u f_0^2 f_5 \right] \quad (61)$$

CALCOLO DEL ROTORE DI $\underline{\mathbf{G}}_M$

In Appendice C viene calcolata in forma chiusa l'espressione del rotore della funzione di Green magnetica, utilizzato per rappresentare i campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} in una cavità sferica, dovuti alle correnti \mathbf{J} ed \mathbf{M} , secondo le relazioni introdotte nel Capitolo 2.

L'espressione di $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_M$ si può mutuare direttamente da quella di $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_E$, utilizzando una proprietà delle funzioni di Green dimostrata da Marcuvitz [22, pag. 92] e riportata nel Capitolo 2; tra i termini incrociati (elettrico-magnetico e magnetico-elettrico) delle funzioni di Green vale la seguente relazione:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_E^T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (1)$$

Per la definizione delle funzioni di Green:

$$\underline{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (2)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m^2 (\kappa_m^2 - k^2)} \quad (3)$$

Sostituendo le definizioni (2) e (3) nella (1), si ottiene:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m (\kappa_m^2 - k^2)} = \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_E^T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m (\kappa_m^2 - k^2)}$$

I termini con la sommatoria si elidono e la proprietà (1) diventa:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_e^T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4)$$

La relazione (4) permette di ricavare $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, quando si conosca $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$; l'espressione di $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e$ è nota in forma chiusa [6]:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi R^3} \mathbf{R} \times \underline{\mathbf{I}} + \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (5)$$

dove il primo termine rappresenta la parte singolare di $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e$:

$$-\frac{1}{4\pi R^3} \mathbf{R} \times \underline{\mathbf{I}} = -\frac{1}{4\pi R^3} [r'v \mathbf{r}_0 \mathbf{t}_0 - (r - r'u) \mathbf{s}_0 \mathbf{t}_0 - rv \mathbf{t}_0 \mathbf{r}_0' - (r' - ru) \mathbf{t}_0 \mathbf{s}_0'] \quad (6)$$

e $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la parte regolare:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_e^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & \frac{f_0^2}{4\pi ar'} \left\{ v \frac{r'^2}{a^2} f_0 \mathbf{r}_0 \mathbf{t}_0 + \left[\left(1 - \frac{r'^2}{a^2} \right) hf_4 - \frac{r'^2}{a^2} (h - u) f_0 \right] \mathbf{s}_0 \mathbf{t}_0 + \right. \\ & \left. + hv(f_0 - f_4) \mathbf{t}_0 \mathbf{r}_0' + \left[\left(1 - \frac{r'^2}{a^2} \right) \left(\frac{1}{f_0} + huf_4 \right) + (h u - 1) f_0 \right] \mathbf{t}_0 \mathbf{s}_0' \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Per ricavare l'espressione in forma chiusa di $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m$, si scambiano nella (5) \mathbf{r} con \mathbf{r}' , \mathbf{s} con \mathbf{s}' e v con $-v$, ed infine si traspone la diade risultante; si ottiene:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi R^3} \mathbf{R} \times \underline{\mathbf{I}} + \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_e^{0T}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (8)$$

dove $\nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_e^{0T}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ è dato da:

$$\begin{aligned} \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_e^{0T}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = & \frac{f_0^2}{4\pi ar} \left\{ -hv(f_0 - f_4) \mathbf{r}_0 \mathbf{t}_0 - v \frac{r^2}{a^2} f_0 \mathbf{t}_0 \mathbf{r}_0' + \right. \\ & \left. + \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(\frac{1}{f_0} + huf_4 \right) + (h u - 1) f_0 \right] \mathbf{s}_0 \mathbf{t}_0 + \right. \\ & \left. + \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) hf_4 - \frac{r^2}{a^2} (h - u) f_0 \right] \mathbf{t}_0 \mathbf{s}_0' \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Si noti che il rotore della funzione di Green magnetica e di quella elettrica hanno la stessa parte singolare.

Sostituendo le espressioni (9) e (6) in (8), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = & \left[-\frac{hvf_0^2(f_0 - f_4)}{4\pi ar} - \frac{1}{4\pi R^3} r'v \right] \mathbf{r}_0 \mathbf{t}_0 + \\
& + \left[\frac{f_0^2}{4\pi ar} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(\frac{1}{f_0} + huf_4 \right) + \frac{(hu-1)f_0^3}{4\pi ar} + \frac{r-r'u}{4\pi R^3} \right] \mathbf{s}_0 \mathbf{t}_0 + \\
& + \left[-\frac{rvf_0^3}{4\pi a^3} + \frac{rv}{4\pi R^3} \right] \mathbf{t}_0 \mathbf{r}_0' + \\
& + \left[\frac{hf_0^2 f_4}{4\pi ar} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - \frac{r(h-u)f_0^3}{4\pi a^3} + \frac{r'-ru}{4\pi R^3} \right] \mathbf{t}_0 \mathbf{s}_0'
\end{aligned} \tag{10}$$

L'espressione completa del rotore della funzione di Green magnetica si ottiene sommando al rotore della parte quasi-statica (10) la componente modale:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{h}_m(\mathbf{r}')}{\kappa_m (\kappa_m^2 - k^2)} \tag{11}$$

Si osservi, in conclusione, che il calcolo di $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_m$ può essere condotto anche per via diretta, applicando l'operatore di rotore alla espressione di $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Nel sistema di coordinate $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$, il rotore di una diade simmetrica è dato da:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{B}} = & \left[\frac{u}{rv} B_{tt} - \frac{v}{r} \frac{\partial B_{tt}}{\partial u} - \frac{1}{rv} B_{ss'} \right] \mathbf{r}_0 \mathbf{t}_0 + \left[\frac{1}{rv} B_{rs'} - \frac{1}{r} B_{tt} - \frac{\partial B_{tt}}{\partial r} \right] \mathbf{s}_0 \mathbf{t}_0 + \\
& + \left[\frac{1}{r} B_{sr'} + \frac{\partial B_{sr'}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial B_{rr'}}{\partial u} \right] \mathbf{t}_0 \mathbf{r}_0' + \left[\frac{1}{r} B_{ss'} + \frac{\partial B_{ss'}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial B_{rs'}}{\partial u} \right] \mathbf{t}_0 \mathbf{s}_0'
\end{aligned} \tag{12}$$

Per questo approccio, tuttavia, si consiglia di procedere con l'ausilio di programmi di calcolo (ad esempio "Mathematica" [39]), e di applicare l'operatore di rotore alla funzione $\underline{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ espressa in forma di serie. Le serie ottenute risultano sommabili in maniera abbastanza agevole, e consentono una verifica della relazione ottenuta.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [2] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, "*ANAPLAN-W a new CAD tool for the wideband analysis of planar waveguide circuits*", Proc. of the 1987 International Microwave Symposium, Rio de Janeiro, Brazil, July 27-30, 1987.
- [3] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, "Wideband Analysis of Planar Waveguide Circuits", *Alta Frequenza*, special issue "Focus on computer oriented design techniques for microwave circuits", vol LVII, no. 5, pp. 217-226, June 1988.
- [4] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, "A New Algorithm for the Wide-Band Analysis of Arbitrarily Shaped Planar Circuits", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-36, no. 10, pp. 1426-1437, Oct. 1988.
- [5] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, L. Perregrini, "Fast Analysis of Waveguide Components for Antenna Feed Systems", *Proc. of PIERS 94*, Noordwijk, The Netherlands, 11-15 July, 1994.
- [6] P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, "A New Boundary Integral Approach to the Determination of the Resonant Modes of Arbitrarily Shaped Cavities", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-43, no. 8, pp. 1848-1856, August 1995.
- [7] P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, "On the evaluation of the Double Surface Integrals Arising in the Application of the Boundary Integral Method to 3-D Problems", submitted to *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*

-
- [8] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, L. Perregrini, "Wideband Modeling of Arbitrarily Shaped E-plane Waveguide Components by the Boundary Integral-Resonant Mode Expansion Method", to be published on *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*
- [9] P. Arcioni, G. Conciauro, L. Perregrini, "Analisi a larga banda di giunzioni tridimensionali in guida d'onda", Atti XI RiNEM, Firenze, 1-4 Ottobre 1996, Vol. 2, pp. 415-418.
- [10] M. Bressan, G. Conciauro, "Rapidly converging expressions for dyadic Green's functions for resonators", in *Proc. 1983 URSI Symp. on Electromagnetic Theory* (Santiago de Compostela, Spain), Aug. 23-26, 1983, pp.41-44.
- [11] M. Bressan, G. Conciauro, "Singularity extraction from the electric Green's function for a spherical resonator", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-33, no. 5, pp. 407-414, May 1985.
- [12] V. Comincioli, *Analisi numerica. Metodi modelli applicazioni*, McGraw-Hill, 1990.
- [13] G. Conciauro, P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, "Wideband Modeling of Arbitrarily Shaped H-plane Waveguide Components by the Boundary Integral-Resonant Mode Expansion Method", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-44, no. 7, pp. 1057-1066, Jul. 1996.
- [14] J. N. Franklin, *Matrix Theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1968.
- [15] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1965.
- [16] R. D. Graglia, "On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on plane triangle", *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, vol. AP-41, no. 10, pp. 1448-1455, Oct. 1993.
- [17] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York, Macmillan, 1968.
- [18] R. F. Harrington, "Boundary Integral Formulation for Homogeneous Material Bodies", *Journal of Electromagnetic Waves And Applications*, Vol. 3, 1989.
- [19] M. Kisliuk, "The dyadic Green's functions for cylindrical waveguides and cavities", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-28, no. 8, pp. 894-898, Aug. 1980.
- [20] K. Kurokawa, *An introduction to the theory of microwave circuits*, Academic Press, N.Y. 1969.

-
- [21] D. S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, Oxford: Clarendon Press, 1979
- [22] N. Marcuvitz, L. B. Felsen, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice Hall, 1973.
- [23] R. Mittra, S. W. Lee, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, The McMillian Company, New York, 1971.
- [24] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, Kogakusha, Tokio, 1953.
- [25] R. Muller, *Electromagnetic waveguides and cavities*, Pergamon, N.Y., 1961.
- [26] M. M. Ney, "Method of Moments as Applied to Electromagnetic Problems", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-33, no. 10, pp. 972-980, Oct. 1985.
- [27] E. E. Okon and R. F. Harrington, "The polarizability of electrically small apertures of arbitrarily shape", *IEEE Trans. on Electromagn. Compat.*, vol. EMC-23, no. 4, pp. 359-366, Nov. 1981.
- [28] Y. Rahmat-Samii, "On the question of computation of the dyadic Green's functions at the source region in waveguides and cavities", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, no. 9, pp. 762-765, Sept. 1975.
- [29] S. M. Rao, A. W. Glisson, D. R. Wilton and B. S. Vidula, "A simple numerical solution procedure for statics problems involving arbitrary-shaped surfaces", *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, vol. AP-27, no. 5, pp. 604-608, Sept. 1979.
- [30] S. M. Rao, D. R. Wilton, A. W. Glisson, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape", *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, vol. AP-30, no. 3, pp. 409-418, May 1982.
- [31] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, New York, 1983.
- [32] C. T. Tai, *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory*, Scranton, PA: Intext, 1971.
- [33] C. T. Tai, "Dyadic Green's Functions for a coaxial line", *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, vol. AP-31, no. 2, pp. 355-358, Mar. 1983.
- [34] C. T. Tai, P. Rozenfeld, "Different representations of dyadic Green's functions for a rectangular cavity", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-24, no. 9, pp. 597-601, Sept. 1976.
- [35] J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, Hemisphere Publ. Co., 1985

-
- [36] A. D. Yaghjian, "Electric dyadic Green's functions in source region", *Proc. IEEE*, vol. 68, no. 2, pp. 248-263, Feb. 1980.
- [37] K. S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, Vol. AP-14, no. 3, pp. 302-307, May 1966.
- [38] D. R. Wilton, S. M. Rao, A. W. Glisson, D. H. Schaubert, O. M. Al-Bundak and C. M. Butler, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains", *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, vol. AP-32, no. 3, pp. 276-281, March 1984.
- [39] S. Wolfram, *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*, II Edition, Addison Wesley, 1991.
- [40] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, New York, McGraw-Hill, 1971.