COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI 10. 9. 2004

PROBLEMA 1

La frequenza di risonanza è data da:

$$f'_{010} = \frac{c\, k'_{010}}{2\pi} = \frac{c\, k'_{01}}{2\pi} = \frac{c}{\lambda'_{01}} = \frac{c}{2.613\, D/2}$$

dove D è il diametro della sezione della cavità cilindrica.
Si ha quindi:

$$D = \frac{2c}{2.613\, f'_{010}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^8}{2.613 \cdot 3 \cdot 10^9} = 7.654 \text{ cm} \quad ; \quad d = D = \text{altezza della cavità}$$

Poiché alla frequenza di 3 GHz per il rame si ha $R_S \cong 14\, m\Omega$ il fattore di merito risulta:

$$Q'_{010} = \frac{\eta_0 x_{01}}{2R_S\left(1+\frac{D}{2d}\right)} = \frac{\eta_0 x_{01}}{2R_S\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\eta_0 x_{01}}{3R_S} = \frac{377 \cdot 2.405}{3 \cdot 14 \cdot 10^{-3}} \cong 21600$$

L'energia accumulata nell'istante t=0 è data da:

$$u = \frac{Q'_{010}\, W}{\omega'_{010}} = \frac{21600 \cdot 1}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^9} \cong 1.15\,\mu J$$

~~L'ampiezza~~ Il campo elettrico sull'asse della cavità è dato da:

$$\bar{E}(0,\varphi,z) = A'_{010}\bar{E}'_{010}(0,\varphi,z)$$

dove l'ampiezza A'_{010} è legata all'energia immagazzinata. Supponendo nulla la fase di A'_{010} si ha:

$$A'_{010} = \sqrt{\frac{2u}{\varepsilon_0}} = 510\ V\, m^{1/2}$$

Inoltre, sull'asse della cavità, si ha:

$$\bar{E}'_{010}(0,\varphi,z) = -\frac{\hat{u}_z}{\sqrt{d}\, k'_{010}}\, k'_{01}\, \Psi_{01}(0,\varphi) = -\frac{\hat{u}_z}{\sqrt{d}\sqrt{\pi}\, J_1(x_{01})\, D/2} = -\hat{u}_z\, 91.9\ \frac{V}{m^{3/2}}$$

L'andamento del campo per t>0 è un'oscillazione smorzata, la cui ampiezza è data da:

$$\mathcal{E}(0,\varphi,z,t) = A'_{010}\bar{E}'_{010}\, e^{-\frac{\omega'_{010}}{2Q_i}t}\cos\omega'_{010}t = -\hat{u}_z\, 46.8\, e^{-0.44\, t_{\mu s}} \cos(2\pi\, 3^{10^9} t)$$

KV/m

PROBLEMA 2

La potenza irradiata coincide con il flusso del vettore di Poynting attraverso il piano $z=0$:

$$P_{irr} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{E}(x,y,0)|^2}{2\eta_0}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E_x(x,y,0)|^2}{2\eta_0}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2\eta_0} e^{-2\frac{x^2+y^2}{w_0^2}}\,dx\,dy = \frac{A^2}{2\eta_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{w_0^2}}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2y^2}{w_0^2}}dy =$$

$$= \frac{A^2}{2\eta_0}\sqrt{\frac{\pi}{2/w_0^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2/w_0^2}} = \frac{A^2}{4\eta_0}\pi w_0^2$$

da cui

$$A = \sqrt{\frac{4\eta_0 P_{irr}}{\pi w_0^2}} = \sqrt{\frac{4\cdot 120\pi\cdot 1000}{\pi\, 1^2}} \cong 693\ \frac{V}{m}$$

Il campo elettrico ~~alla~~ all'ascissa z è dato da:

$$|E_x(0,0,z)| = A\frac{w_0}{w(z)} = A\frac{w_0}{w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{\pi w_0^2/\lambda}\right)^2}} = \frac{A}{\sqrt{1+\left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right)^2}}$$

$$|E_x(0,0,100\ km)| = \frac{693}{\sqrt{1+\left(\frac{10^5\cdot 0.05}{\pi\, 1^2}\right)^2}} = 435.4\ \frac{mV}{m}$$

L'intensità di radiazione nella direzione dell'asse z è data da:

$$K = r^2\frac{|E|^2}{2\eta_0} = \frac{(10^5)^2\cdot 435.4\cdot 10^{-3}}{2\eta_0} = 57.7\ \frac{MW}{sterad}$$

Il guadagno dell'antenna è:

$$g = \frac{4\pi K}{P_{irr}} = 72570$$