Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
17.02.2006

Soluzione problema 1

Alla frequenza di lavoro, la lunghezza d'onda in aria è $\lambda_0 = 30$ mm mentre quella nell'allumina è $\lambda_a = \lambda_0/\sqrt{\epsilon'} = 10$ mm. Verifichiamo quali modi si possono propagare:

$$\lambda''_{10} = 2a = 45.72\,\text{mm} \begin{cases} > \lambda_0 & \text{si propaga in aria} \\ > \lambda_a & \text{si propaga nell'allumina} \end{cases}$$

$$\lambda''_{20} = a = 22.86\,\text{mm} \begin{cases} < \lambda_0 & \text{non si propaga in aria} \\ > \lambda_a & \text{si propaga nell'allumina} \end{cases}$$

Benché nell'allumina possano propagarsi modi superiori, dal vuoto proviene solo il modo TE_{10} e la discontinuità vuoto/allumina è piana e perpendicolare alla direzione di propagazione. Pertanto, nell'allumina viene eccitato solo il modo fondamentale. Sottintendendo che tutte le quantità calcolate d'ora in poi sono riferite a tale modo, la lunghezza d'onda in guida nel tratto in allumina è:

$$\lambda_{g,a} = \frac{\lambda_a}{\sqrt{1-(\lambda_a/\lambda''_{10})^2}} = 10.248 \text{ mm}$$

e lo spessore della finestra in allumina risulta:

$$d = \lambda_{g,a}/2 = 5.124 \text{ mm}$$

Per il tratto in allumina si ha:

$$\gamma d = (\alpha + j\beta)\frac{\lambda_{g,a}}{2} = \left(\frac{\theta_e/2}{1-(\lambda_{g,a}/\lambda''_{10})^2} + j\right)\frac{2\pi}{\lambda_{g,a}}\frac{\lambda_{g,a}}{2} = \frac{\pi\theta_e/2}{1-(\lambda_{g,a}/\lambda''_{10})^2} + j = 1.65\cdot 10^{-4} + j$$

Poiché $\cosh\gamma d \approx -1$ e $\sinh\gamma d \approx -1.65\cdot 10^{-4}$, gli elementi della matrice di trasmissione per il tratto in allumina risultano:

$$a_{11} = a_{22} \approx -1 \qquad a_{12} \approx -1.65\cdot 10^{-4} Z_a \qquad a_{21} \approx -1.65\cdot 10^{-4}/Z_a$$

L'impedenza modale nel vuoto (o nell'aria) e nell'allumina sono:

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda''_{10})^2}} = 500\ \Omega \qquad Z_a = \frac{\eta_0/\sqrt{\epsilon'}}{\sqrt{1-(\lambda_a/\lambda''_{10})^2}} = 128.8\ \Omega$$

I coefficienti di trasmissione e riflessione della potenza risultano:

$$\frac{P_{rif}}{P_{inc}} = \left|\frac{2Z_0}{a_{11}Z_0 + a_{12} + Z_0(Z_0 a_{21} + a_{22})}\right|^2 = 9\cdot 10^{-8}$$

$$\frac{P_{tr}}{P_{inc}} = \left|\frac{a_{11}Z_0 + a_{12} - Z_0(Z_0 a_{21} + a_{22})}{a_{11}Z_0 + a_{12} + Z_0(Z_0 a_{21} + a_{22})}\right|^2 = 0.999317$$

da cui

$$P_{diss} = \left(1 - \frac{P_{rif}}{P_{inc}} - \frac{P_{tr}}{P_{inc}}\right) P_{inc} = 13.65 \text{ W}$$

Si noti che la presenza delle perdite non introduce riflessione ai fini pratici.

Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
17.02.2006

Soluzione problema 2

La frequenza f_r di risonanza del modo TEM_1 è data da:

$$f_r = \frac{c}{\lambda_r} = \frac{c}{2d} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0.5} = 300 \text{ MHz}$$

Poiché le perdite nel dielettrico possono essere trascurate, il fattore di merito per il modo TEM_1 della cavità è dato da:

$$Q = \left(\frac{R_s}{\eta k_r} \int_{S_V} |\mathbf{H}|^2 dS \right)^{-1} = \left(\frac{R_s \lambda_r}{2\pi\eta} \int_{S_V} |\mathbf{H}|^2 dS \right)^{-1} = \left(\frac{R_s d}{\pi\eta} \int_{S_V} |\mathbf{H}|^2 dS \right)^{-1}$$

dove k_r indica il numero d'onda di risonanza del modo e S_V è l'intera superficie laterale della cavità. Alla frequenza di lavoro si ha $R_s = 4.5$ mΩ. Inoltre, indicando con $\mathbf{h}_0$ il campo magnetico modale del cavo coassiale di sezione coincidente con quella della cavità in esame (normalizzato in modo che $\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} |\mathbf{h}_0|^2 R dR d\phi = Z_0/\eta_0$), si ha

$$\mathbf{H}(R,\phi,z) = \sqrt{\frac{2\eta_0}{Z_0 d}}\, \mathbf{h}_0(rR,\phi) \cos\frac{\pi z}{d} = \mathbf{u}_\phi \sqrt{\frac{2\eta_0}{Z_0 d}}\, \frac{1}{2\pi R} \cos\frac{\pi z}{d}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int_{S_V} |\mathbf{H}|^2 dS &= \int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} |\mathbf{H}(R,\phi,0)|^2 dS + \int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} |\mathbf{H}(R,\phi,d)|^2 dS \\
&+ \int_0^{2\pi}\int_0^{d} |\mathbf{H}(R_i,\phi,d)|^2 dS + \int_0^{2\pi}\int_0^{d} |\mathbf{H}(R_e,\phi,d)|^2 dS \\
&= 2\, \frac{2\eta_0}{Z_0 d} \int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} |\mathbf{h}_0(R,\phi,0)|^2 R dR d\phi + \frac{2\eta_0}{Z_0 d} \left(\frac{1}{2\pi R_i} + \frac{1}{2\pi R_e} \right) \int_0^d \cos^2\frac{\pi z}{d} dz \\
&= \frac{4}{d} + \frac{\eta_0}{2\pi Z_0}\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right) = \frac{4}{d} + \frac{1}{\log(R_e/R_i)} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right) = 0.3227 \text{ cm}^{-1}
\end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene:

$$Q = \left(\frac{R_s d}{\pi\eta} \int_{S_V} |\mathbf{H}|^2 dS \right)^{-1} = \left(\frac{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{\pi \cdot 377}\, 0.3227 \right)^{-1} = 16310$$