Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
8.02.2007

Soluzione problema 1

La lunghezza d'onda alla frequenza di lavoro è:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{20 \cdot 10^9} = 15 \text{ mm}$$

mentre, per la guida in esame, la lunghezza d'onda di taglio del modo TE_{01} è:

$$\lambda''_{01} = 1.64a = 1.64 \cdot 12 = 19.68 \text{ mm}$$

Pertanto, poiché $\lambda_0 < \lambda''_{01}$, il modo TE_{01} si può propagare.
Alla frequenza di lavoro l'impedenza modale risulta:

$$Z''_{01} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda''_{01}}\right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{15}{19.68}\right)^2}} = 582\ \Omega$$

Essendo il carco disadattato, all'interno della guida si crea un'onda stazionaria. Il campo elettrico massimo si ha nelle sezioni in cui la tensione modale raggiunge il massimo, cioè nei punti dove l'impedenza d'onda vale $Z_{\max} = \mathcal{R} Z''_{01}$. Pertanto l'ampiezza massima della tensione modale assume il valore:

$$|V''_{01}|_{\max} = \sqrt{2 Z_{\max} P_L} = \sqrt{2 \mathcal{R} Z''_{01} P_L} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 582 \cdot 1000} \approx 1870 \text{ V}$$

L'espressione del vettore modale elettrico del modo TE_{01} è

$$\mathbf{e}''_{01}(R, \phi) = \frac{1}{J_0(x'_{01})} \sqrt{\frac{1}{\pi x'^2_{01}}} \frac{x'_{01} J'_0(x'_{01} R/a)}{a}\ \vec{u}_\phi = -\frac{J_1(x'_{01} R/a)}{a \sqrt{\pi} J_0(x'_{01})}\ \vec{u}_\phi$$

In una data sezione, l'ampiezza del campo modale raggiunge il valore massimo quando $|J_1(x'_{01} R/a)|$ è massimizzato nell'intervallo $0 \leq R \leq a$. Dai grafici delle funzioni di Bessel si deduce $J_0(x'_{01}) \approx -0.42$ e $|J_1|_{\max} \approx 0.58$, da cui

$$|\mathbf{e}''_{01}|_{\max} = \frac{0.58}{12 \cdot \sqrt{\pi} \cdot 0.42} = 0.68 \text{ cm}^{-1}$$

Il campo massimo all'interno della guida assume quindi il valore:

$$E_{\max} = |V''_{01}|_{\max} |\mathbf{e}''_{01}|_{\max} = 1870 \cdot 0.68 \approx 1272 \text{ V/cm}$$

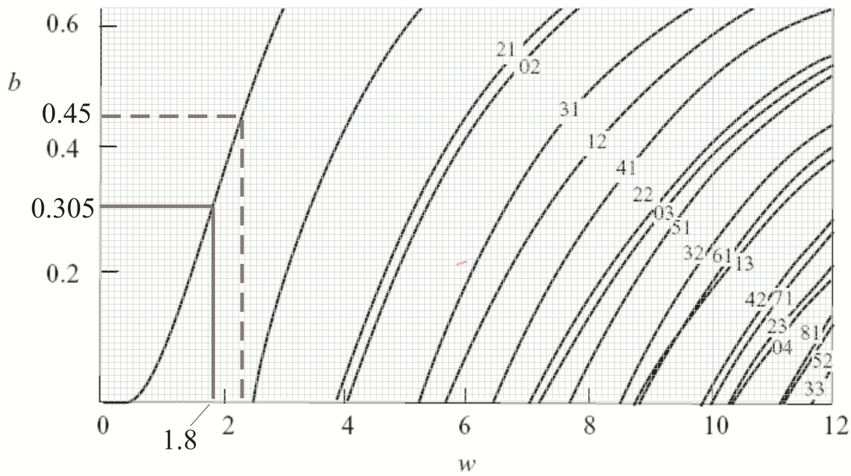
Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
8.02.2007

Soluzione problema 2

Alla lunghezza d'onda di lavoro si ha:

$$w = k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{2\pi}{1.55}\, 3.7\sqrt{1.446^2 - 1.441^2} = 1.8$$

Dal diagramma di dispersione si ottiene $b \approx 0.305$ (v. linee grigie continue in figura).



Nel caso in esame il contrasto d'indice di rifrazione $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = 3.45 \cdot 10^{-3} \ll 1$ e quindi la costante di propagazione può essere calcolata come:

$$\beta \approx k_0 n_2(1 - b\Delta) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2(1 + b\Delta) = \frac{2\pi}{1.55} 1.441\,(1 + 0.3 \cdot 3.45 \cdot 10^{-3}) = 5.8475 \text{ rad}/\mu\text{m}$$

La velocità di fase risulta quindi:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0 \beta}\,\frac{c}{n_1} = \frac{2\pi \cdot 1.441}{1.55 \cdot 5.835}\,\frac{c}{n_1} = 1.00241\,\frac{c}{n_1} = 2.0797 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

La velocità di gruppo è data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \approx \frac{\omega' - \omega}{\beta' - \beta} = 2\pi \frac{\frac{1}{\lambda_0'} - \frac{1}{\lambda_0}}{\beta' - \beta}\, c = 2\pi n_1 \frac{\frac{1}{\lambda_0'} - \frac{1}{\lambda_0}}{\beta' - \beta}\,\frac{c}{n_1} = k_0 n_1 \frac{\frac{\lambda_0}{\lambda_0'} - 1}{\beta' - \beta}\,\frac{c}{n_1}$$

Considerando $\lambda_0' = 0.8\lambda_0$ si ha $w' = w/0.8 = 2.25$ e dal grafico (linee tratteggiate in figura) si deduce $b' \approx 0.45$ da cui

$$\beta' \approx \frac{2\pi}{\lambda_0'}\, n_2(1 + b'\Delta) = \frac{2\pi}{0.8 \cdot 1.55}\, 1.441\,(1 + 0.45 \cdot 3.45 \cdot 10^{-3}) = 7.31301 \text{ rad}/\mu\text{m}$$

Si ottiene quindi

$$v_g = \frac{2\pi}{\lambda_0}\, n_1\, \frac{\frac{1}{0.8} - 1}{\beta' - \beta}\,\frac{c}{n_1} = \frac{2\pi}{1.55}\, 1.446\, \frac{\frac{1}{0.8} - 1}{7.31301 - 5.8475}\,\frac{c}{n_1} = 0.999915\,\frac{c}{n_1} = 2.07451 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$