Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica

COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI

7.09.2007

Soluzione problema 1

La frequenza di lavoro coincide con la frequenza di risonanza del modo TM_{010}:

$$f'_{010} = \frac{c}{\lambda'_{010}} = \frac{c}{\lambda'_{01}} = \frac{c}{2.613\,a} = 3.827 \text{ GHz}$$

Nell'istante $t = 0$ l'ampiezza del campo elettrico è del modo TM_{010}:

$$\mathcal{A}(0) = \sqrt{\frac{2\mathcal{U}}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{36\pi}10^{-9}}} = 475.6 \text{ V}\sqrt{\text{m}}$$

Poiché alla frequenza di lavoro la resistenza superficiale del rame è $R_s \approx 16$ mΩ e il mezzo contenuto nella cavità è privo di perdite, il fattore di merito del modo TM_{010} risulta:

$$Q = \frac{\eta_0 x_{01}}{2R_s(1 + a/d)} = \frac{377 \cdot 2.405}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 2} = 14167$$

Le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico per $t > 0$ sono:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(t) &= \mathcal{A}(0)\ \mathrm{e}^{-(2\pi f'_{010}/2Q)t}\ \mathbf{E}'_{010} \cos(2\pi f'_{010} t) \\
\vec{\mathcal{H}}(t) &= -\frac{\mathcal{A}(0)}{\eta_0}\ \mathrm{e}^{-(2\pi f'_{010}/2Q)t}\ \mathbf{H}'_{010} \sin(2\pi f'_{010} t)
\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni dei campi modali si ottiene:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(t) &= -\hat{\mathbf{z}}\ \frac{\mathcal{A}(0) J_0(x_{01}R/a)}{a\sqrt{d}\sqrt{\pi}J_1(x_{01})}\ \mathrm{e}^{-(\pi f'_{010}/Q)t} \cos(2\pi f'_{010} t) \\
&= -\hat{\mathbf{z}}\ \frac{47.5}{0.03\sqrt{0.03}\sqrt{\pi}\ 0.52}\ J_0(0.8R_{[cm]})\ \mathrm{e}^{-0.85\cdot 10^{-3}\ t_{[ns]}} \cos(24\ t_{[ns]}) \\
&= -\hat{\mathbf{z}}\ 99.2\ J_0(0.8R_{[cm]})\ \mathrm{e}^{-0.85\cdot 10^{-3}\ t_{[ns]}} \cos(24\ t_{[ns]}) \quad \text{kV/m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{H}}(t) &= \hat{\phi}\ \frac{\mathcal{A}(0) J'_0(x_{01}R/a)}{\eta_0 a\sqrt{d}\sqrt{\pi}J_1(x_{01})}\ \mathrm{e}^{-(\pi f'_{010}/Q)t} \cos(2\pi f'_{010} t) \\
&= -\hat{\phi}\ 263\ J_1(0.8R_{[cm]})\ \mathrm{e}^{-0.85\cdot 10^{-3}\ t_{[ns]}} \cos(24\ t_{[ns]}) \quad \text{A/m}
\end{aligned}$$

Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
7.09.2007

Soluzione problema 2

La matrice di trasmissione della cella elementare è:

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & jZ_0\sin\frac{\theta}{2} \\ j\frac{1}{Z_0}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\frac{1}{Z_0\tan\theta} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & jZ_0\sin\frac{\theta}{2} \\ j\frac{1}{Z_0}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

dove $\theta = \frac{\omega}{c}\, d$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$a_{11} = a_{22} = \cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\tan\theta} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{3}{2}\cos\theta$$

Si possono quindi calcolare le frequenze estreme delle bande di trasmissione imponendo che $(a_{11}+a_{22})/2$ sia uguale a ± 1 ($\delta = 0$ o $\delta = \pi$).

- Caso $\delta = 0$: $\quad \frac{3}{2}\cos\theta^{(0)} = +1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta^{(0)} = \frac{2}{3}$

$$\theta^{(0)} = \frac{2\pi f^{(0)}}{c}\, d = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2n\pi \quad \Rightarrow \quad f^{(0)} = \frac{c}{d}(\pm 0.134 + n) = (\pm 0.134 + n)\ \text{GHz}$$

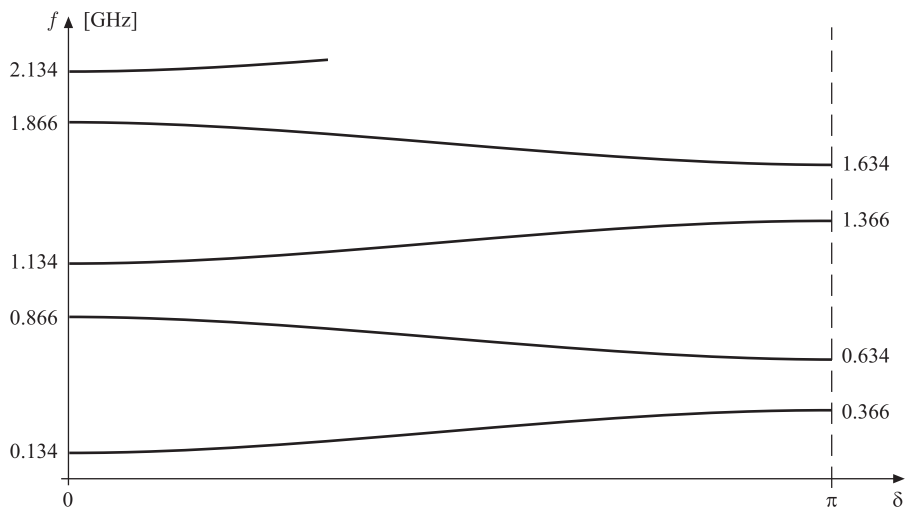
$$f_1^{(0)} = 0.134\ \text{GHz} \quad f_2^{(0)} = 0.866\ \text{GHz} \quad f_3^{(0)} = 1.134\ \text{GHz} \quad f_4^{(0)} = 1.866\ \text{GHz} \quad \ldots$$

- Caso $\delta = \pi$: $\quad \frac{3}{2}\cos\theta^{(\pi)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta^{(\pi)} = -\frac{2}{3}$

$$\theta^{(0)} = \frac{2\pi f^{(\pi)}}{c}\, d = \pi \pm \arccos\frac{2}{3} + 2n\pi \quad \Rightarrow \quad f^{(\pi)} = (\pm 0.134 + n + \frac{1}{2})\ \text{GHz}$$

$$f_1^{(\pi)} = 0.366\ \text{GHz} \quad f_2^{(\pi)} = 0.634\ \text{GHz} \quad f_3^{(\pi)} = 1.366\ \text{GHz} \quad f_4^{(\pi)} = 1.634\ \text{GHz} \quad \ldots$$

Il diagramma di dispersione risulta:



La velocità di gruppo ($v_g = d\omega/d\beta$) deve essere calcolata alla frequenza centrale della prima banda passante, e cioé $f = (f_1^{(\pi)} + f_1^{(0)})/2 = 0.25$ GHz. La relazione di dispersione per la struttura data è:

$$\cos\beta d = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} = \frac{3}{2}\cos\frac{\omega}{c}\, d$$

Derivando entrambi i membri rispetto a β si ha:

$$-d \sin \beta d = \frac{3}{2} \frac{d}{d\beta} \left(\cos \frac{\omega}{c} d \right) = \frac{3}{2} \frac{d\omega}{d\beta} \frac{d}{d\omega} \left(\cos \frac{\omega}{c} d \right) = -\frac{3}{2} \frac{d}{c} \frac{d\omega}{d\beta} \sin \frac{\omega}{c} d$$

da cui si ricava

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c\, \frac{2}{3}\, \frac{\sin \beta d}{\sin \frac{\omega}{c} d} = c\, \frac{2}{3}\, \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta d}}{\sin \frac{\omega}{c} d} = c\, \frac{2}{3}\, \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{4} \cos^2 \frac{2\pi f}{c} d}}{\sin \frac{2\pi f}{c} d}$$

Poiché $\frac{2\pi f}{c} d = \frac{\pi}{2}$ si ottiene:

$$v_g = \frac{2}{3}\, c = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$