Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
8.02.2008

Soluzione problema 1

I modi TE_{10} e TE_{01} della guida sono degeneri e la loro frequenza di taglio è

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0.086} = 1.744 \text{ GHz}$$

Alla frequenza di lavoro, per entrambi i modi l'impedenza modale risulta:

$$Z_c = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(1.744/2.5)^2}} = 1.396\,\eta_0 = 526\ \Omega$$

Poiché i due modi trasportano la stessa potenza ($P_{10} = P_{01} = P_{alimentazione}/2$), le ampiezze delle tensioni modali coincidono e sono pari a

$$|V_{10}| = |V_{01}| = \sqrt{2Z_cP_{10}} = \sqrt{Z_cP_{alimentazione}} = \sqrt{526 \cdot 3000} = 1256 \text{ V}$$

Prima dello sfasatore, i campi associati ai due modi sono in fase. Assumendo nulla la fase in $z = 0$, il campo elettrico al centro della guida in una sezione di coordinata z a sinistra dello sfasatore risulta:

$$\mathbf{E}(a/2, a/2, z) = |V_{10}|\mathrm{e}^{-j\beta z}\mathbf{e}_{10}(a/2, a/2) + |V_{01}|\mathrm{e}^{-j\beta z}\mathbf{e}_{01}(a/2, a/2)$$

Tenendo conto del fatto che $\mathbf{e}_{10}(a/2, a/2) = -\mathbf{u}_y\sqrt{2}/a$ e $\mathbf{e}_{01}(a/2, a/2) = \mathbf{u}_x\sqrt{2}/a$, dopo lo sfasatore si ha:

$$\mathbf{E}(a/2, a/2, z) = \frac{\sqrt{2}|V_{10}|\mathrm{e}^{-j\beta z}}{a}(-\mathbf{u}_y + \mathrm{e}^{-j\phi}\mathbf{u}_x)$$

Dalla precedente espressione risulta evidente che il campo è polarizzato linearmente lungo la diagonale quando $\phi_1 = 0$ o $\phi_2 = \pi$ (le due componenti ortogonali hanno pari ampiezza e sono rispettivamente in controfase o in fase). Inoltre, passando da ϕ_1 a ϕ_2 una componente cambia segno e l'altra rimane immutata, ottenendo così il cambiamento di orientamento del campo da una diagonale all'altra.

Indipendentemente dal valore di ϕ, l'intensità del campo al centro della guida risulta:

$$|\mathbf{E}(a/2, a/2, z)| = \frac{\sqrt{2}|V_{10}|}{a}|-\mathbf{u}_y + \mathrm{e}^{-j\phi}\mathbf{u}_x| = \frac{2|V_{10}|}{a} = 292 \text{ V/cm}$$

Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
8.02.2008

Soluzione problema 2

Ponendo

$$\theta = \beta d = \frac{2\pi f}{c}\, d \approx 2.1 f_{\mathrm{MHz}} \qquad X = \omega L = 2\pi f L \approx 3200 f_{\mathrm{MHz}}$$

la matrice di trasmissione della cella elementare è:

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & jZ_0 \sin\theta \\ j\frac{1}{Z_0}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & jZ_0 \sin\theta \\ j\frac{1}{Z_0}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

da cui

$$a_{11} = a_{22} = \cos 2\theta - \frac{X}{2Z_0}\sin 2\theta$$

$$a_{12} = jZ_0\left(\sin 2\theta + \frac{X}{2Z_0}(\cos 2\theta + 1)\right)$$

$$a_{21} = j\frac{1}{Z_0}\left(\sin 2\theta + \frac{X}{2Z_0}(\cos 2\theta - 1)\right)$$

Le frequenze da considerare per il calcolo dell'impedenza si ottengono risolvendo l'equazione

$$\frac{a_{11}+a_{22}}{2} = \cos\delta \qquad \Rightarrow \qquad \cos 2\theta - \frac{X}{2Z_0}\sin 2\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{cotg} 2\theta = \frac{X}{2Z_0}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\mathrm{cotg}\, 4.2 f_{\mathrm{MHz}} = 5.33 f_{\mathrm{MHz}}$$

La prima soluzione è da ricercare per valori di frequenza tali per cui $0 < 4.2 f_{\mathrm{MHz}} < \pi/2$, mentre la seconda soluzione si trova nell'intervallo $\pi < 4.2 f_{\mathrm{MHz}} < 3\pi/2$. Per tentativi, si ottengono le frequenze

$$f_1 = 0.1875 \text{ MHz} \qquad\qquad f_2 = 0.8047 \text{ MHz}$$

L'espressione dell'impedenza caratteristica è

$$Z = \frac{1}{a_{21}}\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 - 1}\right) = \frac{1}{a_{21}}\sqrt{a_{11}^2 - 1}$$

Sostituendo i valori per i due casi si ottiene

$$Z_1 = 724\ \Omega \qquad\qquad Z_2 = -34.5\ \Omega$$

rispettivamente per il primo e per il secondo modo. Poiché $Z_1 > 0$ il primo è un modo *forward*, mentre il secondo è *backward* perché $Z_2 < 0$.