Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
25.02.2008

Soluzione problema 1

Alla frequenza di 5 GHz, la lunghezza d'onda di lavoro in aria (λ_0) e nel dielettrico con costante dielettrica relativa ϵ_r (λ_d) risultano:

$$\lambda_0 = c/f = 60 \text{ mm} \qquad \lambda_d = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r} = \lambda_0/\sqrt{3} = 34.64 \text{ mm}$$

Verifichiamo quali modi si possono propagare:

$$\lambda''_{10} = 2a = 64 \text{ mm} \begin{cases} > \lambda_d & \text{si può propagare nel dielettrico} \\ > \lambda_0 & \text{si può propagare in aria} \end{cases}$$

$$\lambda''_{20} = a = 32 \text{ mm} \begin{cases} < \lambda_d & \text{non si può propagare nel dielettrico} \\ < \lambda_0 & \text{non si può propagare in aria} \end{cases}$$

Quindi la potenza incidente viene tutta trasportata dal modo TE_{10}.
L'impedenza modale nei due tratti risulta:

$$Z''_{10aria} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda''_{10})^2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(60/64)^2}} = 2.874\,\eta_0 = 1083\ \Omega$$

$$Z''_{10diel} = \frac{\eta_0/\sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{1-(\lambda_d/\lambda''_{10})^2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{3}\sqrt{1-(34.64/64)^2}} = 0.687\,\eta_0 = 259\ \Omega$$

Lo strato in quarto d'onda realizza l'adattamento se la sua impedenza modale è la media geometrica fra quella in aria e quella nel dielettrico:

$$Z''_{10a} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_a}\sqrt{1-(\lambda_0/\sqrt{\epsilon_a}/\lambda''_{10})^2}} = \sqrt{Z''_{10aria}Z''_{10diel}} = \sqrt{1.974}\,\eta_0$$

da cui

$$\epsilon_a = \frac{1}{1.974} + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda''_{10}}\right)^2 = \frac{1}{1.974} + \left(\frac{60}{64}\right)^2 = 1.386$$

La lunghezza dello strato risulta:

$$d = \frac{\lambda_{g_a}}{4} = \frac{\lambda_0/\sqrt{\epsilon_a}}{4\sqrt{1-(\lambda_0/\sqrt{\epsilon_a}/\lambda''_{10})^2}} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\epsilon_a-(\lambda_0/\lambda''_{10})^2}} = \frac{60}{4\sqrt{1.386-(60/64)^2}} = 21 \text{ mm}$$

Il valore massimo dell'ampiezza del campo viene raggiunto sulla mezzeria della guida e, nel tratto in aria, è uguale per ogni sezione z dato che la guida è chiusa su un carico adattato. Poiché tutta la potenza incidente viene trasmessa nella guida in aria, il valore massimo raggiunto dal campo elettrico risulta

$$|\mathbf{E}|_{max} = |V''_{10}||\mathbf{e}''_{10}(a/2,y)| = \sqrt{2Z''_{10aria}P_{inc}}\sqrt{\frac{2}{ab}} = \sqrt{\frac{4\cdot 1083\cdot 20000}{32\cdot 16}} = 411 \text{ V/mm}$$

Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica
COMPLEMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI
25.02.2008

Soluzione problema 2
Ponendo

$$\theta/2 = \beta d/2 \qquad B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

la matrice di trasmissione della cella elementare è:

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & jZ_0 \sin\frac{\theta}{2} \\ j\frac{1}{Z_0}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & jZ_0 \sin\frac{\theta}{2} \\ j\frac{1}{Z_0}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

da cui

$$a_{11} = a_{22} = \cos\theta - \frac{Z_0 B}{2}\sin\theta$$
$$a_{12} = jZ_0\left(\sin\theta + \frac{BZ_0}{2}(\cos\theta - 1)\right)$$
$$a_{21} = j\frac{1}{Z_0}\left(\sin\theta + \frac{BZ_0}{2}(\cos\theta + 1)\right)$$

Alla frequenza data risulta

$$a_{11} = a_{22} = 0.1324 \qquad a_{12} = j0.823 Z_0 = j41.15\ \Omega \qquad a_{21} = j1.194/Z_0 = j0.0239\ \Omega^{-1}$$

Risulta $-1 < \frac{a_{11}+a_{22}}{2} < 1$ e pertanto si ha propagazione e lo sfasamento periodico è

$$\delta = \arccos\frac{a_{11}+a_{22}}{2} = 1.438 \text{ rad}$$

L'impedenza caratteristica è

$$Z = \frac{1}{a_{21}}\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 - 1}\right) = \frac{1}{a_{21}}\sqrt{a_{11}^2 - 1} = 41.5\ \Omega$$

Si tratta quindi di un modo *forward*, poiché $Z > 0$.
L'espressione analitica della velocità di gruppo ($v_g = d\omega/d\beta_0$) si ottiene dalla relazione di dispersione per la struttura:

$$\cos\beta_0 d = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} = a_{11} = \cos\frac{\omega}{c}d - \frac{Z_0}{2}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\sin\frac{\omega}{c}d$$

Derivando entrambi i membri rispetto alla costante di fase β_0 della struttura periodica, si ha:

$$-d\sin\beta_0 d = \frac{d}{d\beta_0}\left(\cos\frac{\omega}{c}d - \frac{Z_0}{2}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\sin\frac{\omega}{c}d\right) = \frac{d\omega}{d\beta_0}\frac{d}{d\omega}\left(\cos\frac{\omega}{c}d - \frac{Z_0}{2}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\sin\frac{\omega}{c}d\right)$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} v_g = \frac{d\omega}{d\beta_0} &= c\,\frac{\sin\beta_0 d}{\sin\frac{\omega}{c}d + \frac{Z_0}{2}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\cos\frac{\omega}{c}d + \frac{Z_0 c}{2d}\left(C + \frac{1}{\omega^2 L}\right)\sin\frac{\omega}{c}d} \\ &= c\,\frac{\sqrt{1 - \left(\cos\theta - \frac{Z_0 B}{2}\sin\theta\right)^2}}{\sin\frac{\omega}{c}d + \frac{Z_0}{2}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\cos\frac{\omega}{c}d + \frac{Z_0 c}{2d}\left(C + \frac{1}{\omega^2 L}\right)\sin\frac{\omega}{c}d} = 0.433c = 1.3\cdot 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$