

# Guide periodiche

Appunti dal Corso di Complementi di Campi Elettromagnetici

Prof. Giuseppe Conciauro

Fac. di Ingegneria, Università di Pavia, a.a. 2009-2010

La Fig. 1 mostra alcuni esempi di strutture periodiche unidimensionali, chiuse o aperte. Esse sono dotate di "simmetria di traslazione", per cui il mezzo e le condizioni al contorno sono invarianti rispetto allo spostamento  $d$  (periodo) in una direzione assegnata. Strutture di questo tipo sono di notevole interesse pratico e trovano diverse applicazioni, fra le quali:

- strutture d'interazione fra onde elettromagnetiche e fasci di particelle cariche, come quelle usate in certi tipi di acceleratori di particelle (acceleratori lineari) e in alcuni amplificatori a microonde (TWT: Traveling Wave Tubes, BWT: Backward Wave Tubes);
- filtri passabanda o stop-banda;
- antenne (nel caso delle strutture aperte);

Nelle prime due applicazioni vengono sfruttate due proprietà generali delle strutture periodiche:

- è possibile realizzare guide ad onda lenta, che possono essere progettate in modo che la velocità di fase possa uguagliare quella delle particelle (sempre minore di  $c$ );
- la propagazione è possibile in certe bande di frequenza e impedita in altre.

Nell'applicazione alle antenne (Leaky Wave Antennas) viene sfruttato l'irraggiamento che è possibile avere, sotto opportune condizioni, nelle strutture aperte. Nella seguente trattazione viene considerata la sola possibilità di propagazione guidata, che è possibile avere sia nelle strutture chiuse che in quelle aperte.

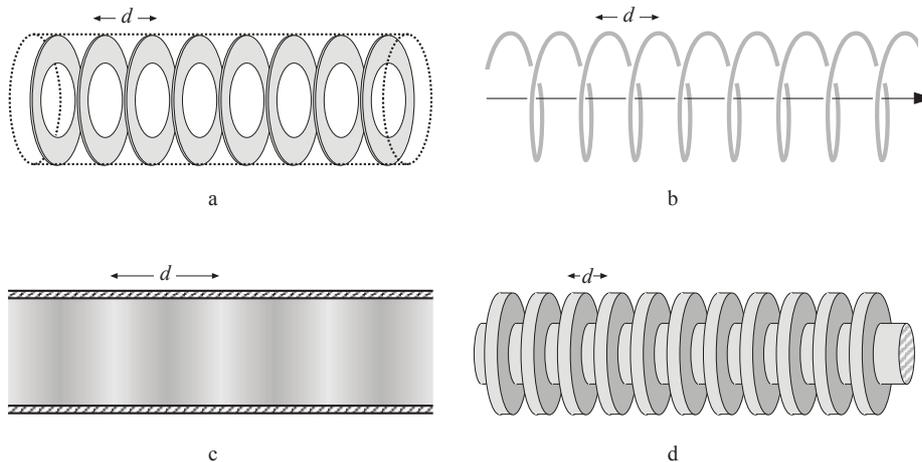


Fig. 1. Esempi di strutture periodiche unidimensionali. *a* - guida circolare caricata da diaframmi metallici; *b* - elica; *c* - guida d'onda contenente un mezzo dotato di inomogeneità periodica; *d* - conduttore cilindrico corrugato.

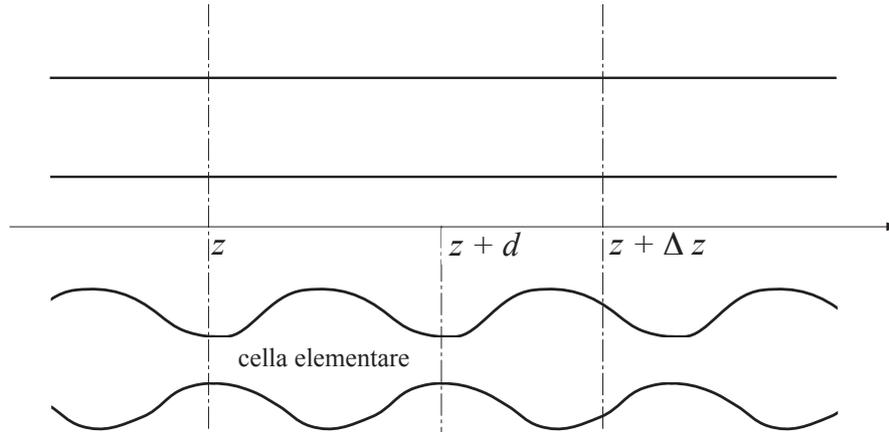


Fig. 2. Guida cilindrica (alto) e struttura periodica unidimensionale (basso).

### I. MODI DI FLOQUET

Nei modi delle guide d'onda cilindriche i campi considerati in due sezioni trasversali poste alle ascisse  $z$  e  $z + \Delta z$  (Fig. 2) differiscono solo per l'ampiezza e/o la fase. Infatti, indicata con  $\psi$  una componente qualsiasi del campo, si ha

$$\psi(x, y, z) = \phi(x, y)e^{-\gamma z} \quad \text{e quindi} \quad \psi(x, y, z + \Delta z) = \psi(x, y, z)e^{-\gamma \Delta z} \quad (\forall \Delta z)$$

Campi dotati di analoga proprietà non possono esistere in una guida periodica, dato che le condizioni al contorno e le caratteristiche del mezzo sono generalmente diverse nelle due sezioni. E' solo possibile avere campi che mantengono immutata la propria struttura quando si opera una traslazione pari ad un numero intero di periodi:

$$\psi(x, y, z + nd) = \psi(x, y, z)e^{-\gamma nd} \quad (n = \pm 1, 2, \dots) \quad (1)$$

I campi dotati di questa proprietà vengono detti "modi di Floquet". Si verifica immediatamente che la forma di una generica componente deve essere del tipo

$$\psi(x, y, z) = \phi(x, y, z)e^{-\gamma z} \quad \text{dove} \quad \phi(x, y, z + nd) = \phi(x, y, z) \quad (2)$$

Dunque, a differenza di quanto avviene nei modi delle guide cilindriche, nei modi di Floquet la funzione  $\phi$  dipende anche da  $z$ , ed è periodica (con periodo  $d$ ) rispetto a questa variabile.

L'importanza dei modi di Floquet deriva dal fatto che un generico campo in una struttura periodica può essere rappresentato come combinazione lineare di questi modi.

### II. STRUTTURE COSTITUITE DA GIUNZIONI IN GUIDA CONNESSE IN CASCATA

Consideriamo preliminarmente una struttura periodica chiusa, costituita da giunzioni in guida identiche, collegate in cascata (Fig. 3). Per semplicità supponiamo che nelle guide di collegamento si possa propagare il solo modo dominante e che tali guide siano tanto lunghe da poter ignorare, sulle sezioni di collegamento fra una guida e la successiva, la presenza dei modi evanescenti creati dalle discontinuità (giunzioni unimodali). Sotto queste condizioni ciascuna cella periodica può essere rappresentata come una giunzione a due porte, in cui si ha lo stesso modo, su entrambe le porte. Se si concentra l'attenzione sulla cella con la porta d'ingresso coincidente con l'origine dell'asse  $z$ , i campi trasversali in  $z = 0$  e  $z = d$  sono rappresentati da

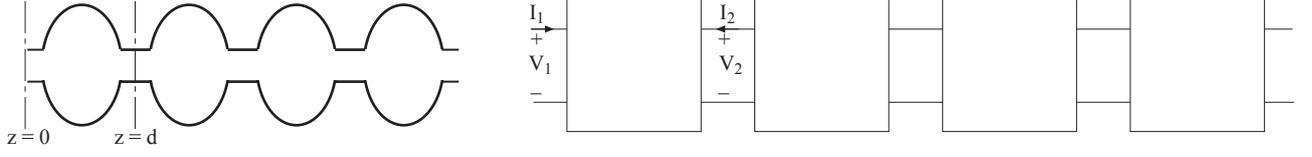


Fig. 3. Guida periodica costituita da giunzioni a due porte identiche, connesse in cascata.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T(x, y, 0) &= V_1 \mathbf{e}(x, y) & \mathbf{H}_T(x, y, 0) &= I_1 \mathbf{h}(x, y) \\ \mathbf{E}_T(x, y, d) &= V_2 \mathbf{e}(x, y) & \mathbf{H}_T(x, y, d) &= -I_2 \mathbf{h}(x, y)\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{h}$ , sono i vettori modali elettrico e magnetico del modo dominante,  $V_1$  e  $V_2$  sono le tensioni modali e  $I_1$ ,  $-I_2$  sono le correnti modali entranti nella prima e nella seconda cella. Si ha

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

dove è stata introdotta la matrice di trasmissione “tensione/corrente” della cella elementare. Per la (1), in un modo di Floquet deve aversi

$$\mathbf{E}_T(x, y, d) = \mathbf{E}_T(x, y, 0)e^{-\gamma d} \quad \mathbf{H}_T(x, y, d) = \mathbf{H}_T(x, y, 0)e^{-\gamma d}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = e^{-\gamma d} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = e^{\gamma d} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

L'ultima di queste equazioni indica che l'esponenziale è un autovalore della matrice  $[a]$ . Pertanto

$$e^{2\gamma d} - (a_{11} + a_{22})e^{\gamma d} + \text{Det}[a] = 0$$

Poiché  $\text{Det}[a] = 1$  (a causa della reciprocità), moltiplicando per  $e^{-\gamma d}$  si ottiene immediatamente

$$\cosh \gamma d = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \quad (3)$$

Se la struttura è senza perdite  $a_{11}$  e  $a_{22}$  sono reali. Pertanto si possono verificare i seguenti tre casi

$$\begin{aligned}\text{Caso I: } \frac{a_{11} + a_{22}}{2} &\geq 1 & \gamma d &= \pm \text{arcosh} \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \\ \text{Caso II: } -1 < \frac{a_{11} + a_{22}}{2} &< 1 & \gamma d &= \pm j \text{arccos} \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \\ \text{Caso III: } \frac{a_{11} + a_{22}}{2} &\leq -1 & \gamma d &= \pm \text{arcosh} \frac{|a_{11} + a_{22}|}{2} + j\pi\end{aligned}$$

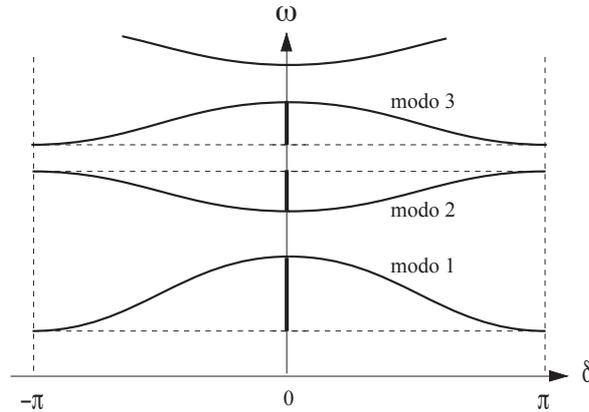


Fig. 4. Esempio di andamento della sfasamento periodico al variare della frequenza. I tratti ingrossati sull'asse  $\omega$  indicano le bande passanti dei primi tre modi.

Nei casi I e III l'esponenziale  $e^{\gamma d}$  è reale positiva (caso I) o reale negativa (caso III). In entrambi l'ampiezza delle tensioni e delle correnti si attenua esponenzialmente nella direzione  $\pm z$ , mentre la fase rimane immutata (caso I) o varia periodicamente di  $\pi$  (caso III). In questo caso il modo di Floquet è stazionario-evanescente. Nel caso II si ha

$$e^{-\gamma d} = e^{-j\delta} \quad \text{dove} \quad \delta = \pm \arccos \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \quad (4)$$

L'ampiezza delle tensioni e delle correnti rimane immutata, mentre la fase ritarda progressivamente di  $\delta$  nel verso di  $z$  o di  $-z$ , secondo che, nella precedente espressione si scelga la soluzione col segno superiore ( $0 \leq \delta \leq \pi$ ) o inferiore ( $-\pi \leq \delta \leq 0$ ). In questo caso si ha un modo di Floquet che si propaga senza attenuazione, nel verso positivo o negativo dell'asse  $z$ .

I parametri di trasmissione variano con la frequenza secondo leggi dipendenti dalla struttura della cella elementare. Gli intervalli di frequenza in cui si ha propagazione sono le bande passanti della guida periodica, a ciascuna delle quali corrisponde un modo di Floquet. Esse sono delimitate dalle frequenze per le quali risulta

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \pm 1 \quad (5)$$

L'estremo corrispondente all'equazione con il segno superiore corrisponde allo sfasamento  $\delta = 0$ , quello corrispondente al segno inferiore corrisponde allo sfasamento  $\delta = \pm\pi$ . Dunque, all'interno delle bande passanti lo sfasamento periodico  $\delta$  dei rispettivi modi varia nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . La Fig. 4 mostra un possibile andamento di  $\delta$  per i primi modi<sup>1</sup>.

E' interessante osservare che per ogni frequenza interna alla banda passante di un modo, si può avere propagazione con valori opposti di  $\delta$ , cioè in entrambi i versi dell'asse  $z$  (bidirezionalità). Questa proprietà, che è ovvia nel caso in cui le giunzioni hanno un piano di simmetria trasversale, vale anche nel caso di giunzioni asimmetriche, per le quali  $a_{11} \neq a_{22}$ .

In un modo di Floquet il rapporto fra la tensione e la corrente è uguale all'ingresso di tutti i quadripoli, poiché passando da un quadripolo all'altro sia la tensione, sia la corrente vengono moltiplicate per lo stesso fattore. Tale rapporto definisce la "impedenza caratteristica" del modo:

$$Z_c = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{-I_2}$$

<sup>1</sup>La teoria svolta in questo paragrafo è valida sotto la condizione che le giunzioni siano unimodali. Pertanto i risultati ottenuti valgono entro un certo limite superiore della frequenza.

Introducendo i parametri d'impedenza e osservando che  $-I_2 = I_1 e^{-\gamma d}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = Z_{11}I_1 + Z_{12}(-I_1 e^{-\gamma d}) = (Z_{11} - Z_{12}e^{-\gamma d})I_1 \\ V_2 &= Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 = Z_{12}(-I_1 e^{\gamma d}) + Z_{22}I_2 = (Z_{12}e^{\gamma d} - Z_{22})(-I_1) \end{aligned}$$

Pertanto, si ottiene

$$Z_c = \begin{cases} Z_{11} - Z_{12}e^{-\gamma d} \\ Z_{12}e^{\gamma d} - Z_{22} \end{cases}$$

e anche, considerando la semi-somma delle espressioni al secondo membro

$$Z_c = \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} + Z_{12} \sinh \gamma d \quad (6)$$

Esprimendo i parametri di impedenza con i parametri di trasmissione, si ha pure

$$Z_c = \frac{1}{a_{21}} \left( \frac{a_{11} - a_{22}}{2} + \sinh \gamma d \right) \quad (7)$$

Poiché i parametri d'impedenza di una giunzione senza perdite sono immaginari, la parte reale di  $Z_c$  è nulla nel caso di un modo che non si propaga ( $\sinh \gamma d$  reale), non-nulla nel caso di un modo che si propaga ( $\sinh \gamma d = j \sin \delta$ , immaginario). Pertanto, se il modo non si propaga, le tensioni e le correnti sono in quadratura e non si ha trasmissione d'energia<sup>2</sup>. Al contrario, l'energia viene trasmessa se il modo si propaga.

La potenza trasmessa nel verso positivo di  $z$  è

$$P = \operatorname{Re}(Z_c) \frac{|I_1|^2}{2}$$

dove

$$\operatorname{Re}(Z_c) = jZ_{12} \sin \delta = \frac{\sin \delta}{-ja_{21}} \quad (8)$$

La parte reale di  $Z_c$  non è necessariamente positiva. Pertanto è possibile che la potenza trasmessa nel verso di propagazione sia negativa, cioè che l'energia venga trasmessa in verso opposto a quello di propagazione del modo. Se la potenza è trasmessa nel verso di propagazione il modo viene detto "progressivo", nel caso contrario "retrogrado". Si vedrà successivamente che la natura del modo dipende dal segno della derivata  $d\omega/d\delta$ , che è positivo nei modi "progressivi", negativo in quelli "retrogadi". Per esempio, nel caso rappresentato in Fig. 4, il modo 2 è progressivo, i modi 1 e 3 sono retrogadi.

Come nelle linee di trasmissione, la propagazione di un modo di Floquet non viene turbata se la guida periodica viene troncata, inserendo all'ingresso e all'uscita un carico e un generatore adattati (impedenza uguale a quella caratteristica, v. Fig. 5).

<sup>2</sup>Partendo dalla (7) si giunge alla stessa conclusione, osservando che in assenza di perdite  $a_{11}$  e  $a_{22}$  sono reali, mentre  $a_{21}$  è immaginario

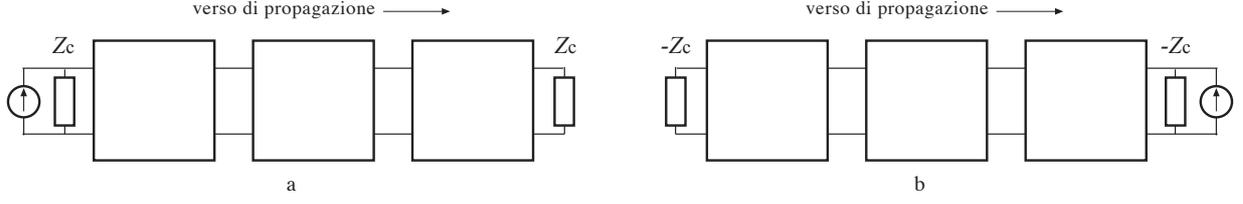


Fig. 5. Guida periodica adattata all'ingresso e all'uscita. a) eccitazione di un modo progressivo; b) eccitazione di un modo retrogrado. Nel secondo caso l'impedenza caratteristica è  $V_2/(-I_2) = -Z_c$  e la sua parte reale è positiva, come nel caso a).

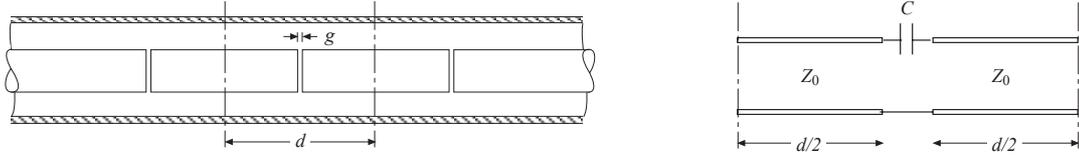


Fig. 6. Cavo coassiale con gap periodici e circuito equivalente della cella elementare.

### III. ESEMPIO: CAVO COASSIALE CON GAP PERIODICI

La precedente teoria permette di ricavare la funzione  $\delta = \delta(\omega)$ , purché siano disponibili le espressioni analitiche dei parametri di trasmissione in funzione della frequenza. Questo avviene, per esempio, quando la cella elementare può essere rappresentata da un circuito equivalente, come nel caso del cavo coassiale con gap periodici (Fig. 6). Se si considera la banda di frequenze in cui nel cavo si può propagare il solo modo TEM, la cella elementare è rappresentata da un quadripolo costituito da due tronchi di linea di trasmissione lunghi  $d/2$  e dalla capacità del gap, connessi in cascata. Indicando con  $Z_0$ ,  $k$  e  $v$  l'impedenza caratteristica, la costante di fase e la velocità di propagazione del cavo e ponendo

$$\theta = kd = \frac{\omega d}{v} \quad X = -\frac{1}{\omega C}$$

si ha

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & jZ_0 \sin \frac{\theta}{2} \\ jZ_0^{-1} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & jZ_0 \sin \frac{\theta}{2} \\ jZ_0^{-1} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

da cui

$$a_{11} = a_{22} = \cos \theta - \frac{X}{2Z_0} \sin \theta \quad a_{21} = j\frac{1}{Z_0} \left[ \sin \theta - \frac{X}{2Z_0} (1 - \cos \theta) \right]$$

Pertanto le bande passanti sono comprese fra i valori di  $\omega$  che soddisfano le equazioni

$$\cos \frac{\omega d}{v} + \frac{1}{2\omega C Z_0} \sin \frac{\omega d}{v} = \begin{cases} 1 & \text{(corrispondente a } \delta = 0) \\ -1 & \text{(corrispondente a } \delta = \pm\pi) \end{cases}$$

All'interno delle bande passanti lo sfasamento periodico è dato da

$$\delta = \pm \arccos a_{11} = \pm \arccos \left( \cos \frac{\omega d}{v} + \frac{1}{2\omega C Z_0} \sin \frac{\omega d}{v} \right) \quad (9)$$

L'andamento tipico di  $\delta$  in funzione di  $\omega$  è del tipo indicato nella Fig. 4. Si osserva che i modi sono alternativamente di tipo retrogrado o progressivo, come si può anche verificare ricavando  $a_{21}$  e considerando il segno della (8). Alla frequenza  $\omega = 0$  non si ha trasmissione, poiché il termine in parentesi nella precedente espressione risulta maggiore di 1. Questo risultato dipende dalla presenza dei gap.

#### IV. MODI DI FLOQUET IN UNA GENERICA GUIDA PERIODICA

Spesso le celle elementari delle guide periodiche non possono essere assimilate a giunzioni unimodali connesse in cascata. In questo caso lo studio dei modi di Floquet deve essere basato direttamente sulla soluzione delle equazioni di Maxwell, con opportune condizioni al contorno.

In un generico modo di Floquet il campo ha la forma

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y, z) e^{-\gamma z} \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_0(x, y, z) e^{-\gamma z} \quad (10)$$

dove  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{H}_0$  sono periodici in  $z$  con periodo  $d$ . Il campo può essere studiato considerando la cella elementare compresa fra i piani  $z = 0$  e  $z = d$ , e imponendo le seguenti condizioni sulle componenti tangenziali di  $\mathbf{E}$  o di  $\mathbf{H}$  prese sui due piani:

$$\mathbf{E}_T(x, y, d) = \mathbf{E}_T(x, y, 0) e^{-\gamma d} \quad \mathbf{H}_T(x, y, d) = \mathbf{H}_T(x, y, 0) e^{-\gamma d} \quad (11)$$

Inoltre, sui conduttori metallici deve essere imposta la condizione di parete elettrica e – se la struttura è aperta – devono pure essere considerate le condizioni all'infinito (condizioni di radiazione). Lo studio, normalmente svolto con metodi numerici (es., Metodo degli Elementi Finiti), porta alla soluzione di un problema matriciale agli autovalori che, risolto a varie frequenze, permette di determinare  $e^{-\gamma d}$  (come autovalore) e  $\mathbf{E}_T(x, y, 0)$ ,  $\mathbf{H}_T(x, y, 0)$  (dal corrispondente autovettore).

Su basi puramente teoriche si può mostrare che si hanno infiniti autovalori e che vale la proprietà di bidirezionalità per cui, ad ogni frequenza gli autovalori sono presenti in coppie corrispondenti a valori opposti di  $\gamma$  (un modo si propaga e/o attenua ugualmente nei versi opposti di  $z$ , anche nel caso di celle periodiche asimmetriche)<sup>3</sup>.

Le potenze che attraversano i piani  $z = 0$  e  $z = d$  sono

$$P(0) = \operatorname{Re} \int_S \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*}{2} \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dx dy \quad P(d) = e^{-2\operatorname{Re}(\gamma d)} P(0)$$

Pertanto, in una guida periodica senza perdite che trasmette energia ( $P(d) = P(0) \neq 0$ ) deve risultare

$$\gamma d = j\delta \quad (-\pi < \delta \leq \pi)$$

dove, come in precedenza,  $\delta$  rappresenta il ritardo di fase subito dal campo fra due sezioni trasversali distanti un periodo. Questo risultato vale anche nel caso di strutture aperte, purché il modo considerato sia “guidato”. Infatti, sotto quest'ipotesi non si ha radiazione e la potenza attiva trasmessa è la stessa in tutte le sezioni trasversali, come nel caso delle strutture chiuse.

Anche nel caso generale la relazione fra  $\omega$  e  $\delta$  evidenzia l'esistenza di infiniti modi e bande passanti. Però, a differenza di quanto visto nel par. II, è possibile che alla stessa frequenza si possano propagare più modi.

<sup>3</sup>Per le proprietà generali delle strutture periodiche si può consultare il recente articolo: D. Pessort, F. Olyslager, “Study of Eigenmodes in Periodic Waveguides Using the Lorentz Reciprocity Theorem”, IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. 52, n.2, Feb. 2004.

## V. ARMONICHE SPAZIALI

Grazie alla periodicit  di  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{H}_0$  si possono considerare i seguenti sviluppi in serie di Fourier

$$\mathbf{E}_0(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{E}}_n(x, y) e^{-jn\frac{2\pi z}{d}} \quad \mathbf{H}_0(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{H}}_n(x, y) e^{-jn\frac{2\pi z}{d}}$$

Nel caso di un modo che si propaga, introducendo questi sviluppi nelle (10) si ottiene la seguente rappresentazione del campo:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{E}}_n(x, y) e^{-j\beta_n z} \quad (12)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{H}}_n(x, y) e^{-j\beta_n z} \quad (13)$$

dove

$$\beta_n = \frac{\delta + 2\pi n}{d} \quad (14)$$

Le funzioni d'onda  $\underline{\mathbf{E}}_n(x, y) e^{-j\beta_n z}$  e  $\underline{\mathbf{H}}_n(x, y) e^{-j\beta_n z}$  prendono il nome di ‘‘armoniche spaziali’’. Esse si propagano con la velocit  di fase

$$v_n = \frac{\omega}{|\beta_n|} \quad (15)$$

nel verso positivo o negativo di  $z$ , in accordo con il segno di  $\beta_n$ . La costante di fase dell'armonica fondamentale ( $n = 0$ )  

$$\beta_0 = \frac{\delta}{d}$$

Essa ha lo stesso segno di  $\delta$  e quindi l'armonica fondamentale si propaga nel verso del ritardo periodico della fase. Le altre armoniche si propagano nell'uno o nell'altro verso, con velocit  decrescente al crescere di  $|n|$ .

  opportuno sottolineare che le singole armoniche spaziali non sono campi fisicamente realizzabili, perch  in genere non soddisfano n  le equazioni di Maxwell, n  le condizioni al contorno. Per esempio,   evidente che un'armonica spaziale non pu  verificare condizioni al contorno variabili con  $z$  (come quelle relative alle strutture di Fig. 1a,b,d), poich   $\underline{\mathbf{E}}_n$  e  $\underline{\mathbf{H}}_n$  sono indipendenti da  $z$ .

Le costanti di fase delle armoniche spaziali si deducono dal diagramma di dispersione della Fig. 7, (diagramma di Brillouin) ottenuto riproducendo periodicamente, con passo  $2\pi/d$ , il diagramma di Fig. 7a. Se, per esempio, si considera la frequenza  $\omega_0$ , dentro la banda in cui si propaga il modo 2, e se si considera la propagazione nel verso positivo, la costante di fase del modo fondamentale   positiva e corrisponde all'ascissa del punto  $P_0$ . Inoltre, le costanti di fase delle altre armoniche corrispondono alle ascisse dei punti  $P_1, P_2, \dots$ , cui corrispondono valori positivi della costante di fase (armoniche spaziali che si propagano nel verso positivo di  $z$ ) e dei punti  $P_{-1}, P_{-2}, \dots$  (armoniche spaziali che si propagano nel verso negativo).

  interessante osservare che tutte le armoniche spaziali hanno la stessa velocit  di gruppo

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta_0} = d \frac{d\omega}{d\delta}$$

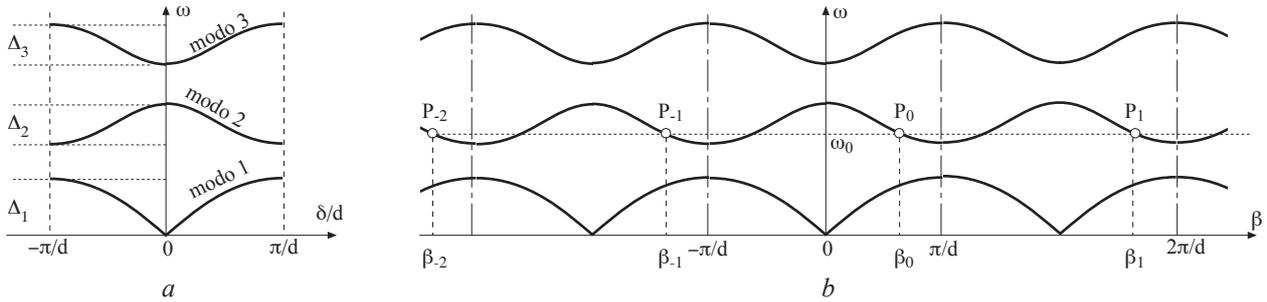


Fig. 7. *a* - rappresentazione grafica di una possibile relazione fra  $\omega$  e  $\delta$ ; *b* - diagramma di Brillouin.

poiché la pendenza della curva di dispersione è identica nei punti  $P_0, P_{\pm 1}, P_{\pm 2}, \dots$ . Questo significa che un segnale modulato (ad esempio un impulso gaussiano con ampiezza di banda molto minore della frequenza portante) si propaga indistorto, poiché tutte le armoniche spaziali (modulate dallo stesso impulso), si propagano indistorte con la stessa velocità  $v_g$ , mantenendo immutata la loro posizione reciproca.

È pure interessante osservare che per alcune armoniche spaziali la velocità di gruppo e la velocità di fase hanno segno opposto. Per esempio, nel caso di figura, alla frequenza  $\omega_0$ , le armoniche con valori non negativi di  $n$  hanno velocità di fase positiva e velocità di gruppo negativa. Poiché la velocità di gruppo è quella con cui si propaga l'energia, in questo esempio il generatore che eccita il modo considerato deve stare sulla destra dell'asse  $z$ , nonostante il segno positivo di  $\delta$  indichi che il modo di Floquet si propaga nel verso positivo di  $z$ . Queste considerazioni giustificano quanto asserito alla fine del par. II.

Per esempio, consideriamo le armoniche spaziali lungo l'asse della struttura considerata nel par. III. Lungo l'asse della struttura il campo elettrico differisce da zero solo all'interno dei gap, dove il campo è diretto secondo l'asse. Nel caso di un modo che si propaga, si ha

$$E_z(0, 0, z) = \begin{cases} (V/d)e^{-j\frac{\delta z}{d}} & \text{nei gap} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove  $V$  è la tensione ai gap. Sviluppando in serie di Fourier si ha

$$E_{0z} = \frac{V}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi g}{d}}{\frac{n\pi g}{d}} e^{-jn\frac{2\pi z}{d}}$$

Pertanto, sull'asse della struttura, lo sviluppo in armoniche spaziali di  $E_z$ , è

$$E_z(0, 0, z) = \frac{V}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi g}{d}}{\frac{n\pi g}{d}} e^{-j\beta_n z} \quad \beta_n = \frac{\delta + 2\pi n}{d}$$

dove  $\delta$  è dato dalla (9). L'armonica fondamentale ( $E_{0z}(0, 0, z) = (V/d)e^{-j\beta_0 z}$ ) corrisponde nel dominio del tempo alla funzione d'onda

$$\mathcal{E}_{0z}(0, 0, z, t) = (V/d) \cos(\omega t - \beta_0 z)$$

La Fig. 8 rappresenta la propagazione dell'armonica fondamentale e la corrispondente oscillazione del campo nei gap.

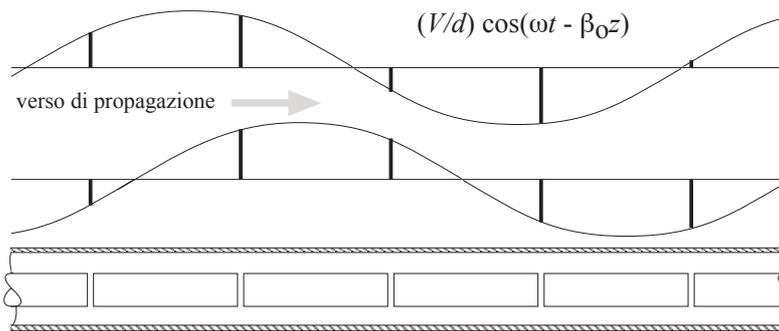


Fig. 8. Armonica fondamentale e campi ai gap in due istanti successivi ( $\beta_0 > 0$ ).

## VI. STRUTTURE D'INTERAZIONE FRA CAMPO E.M. E PARTICELLE CARICHE

Le armoniche spaziali sono particolarmente importanti nello studio delle strutture d'interazione fra campi e particelle. Per esempio, in strutture come l'elica o la guida circolare caricata da diaframmi, esistono modi in cui  $E_z$  è particolarmente intenso lungo l'asse e che, grazie a questo fatto, possono interagire efficacemente con particelle cariche che si muovono lungo l'asse stesso. La forza che agisce su un elettrone che si muove con la velocità  $v$ , passando nella sezione  $z = 0$  all'istante  $t = 0$ , è

$$\mathcal{F} = -q_e \text{Re} \left\{ E_z(0, 0, vt) e^{j\omega t} \right\} = -q_e \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{E}_{nz}(0, 0) e^{j(\omega t - \beta_n vt)} = -q_e \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{E}_{nz}(0, 0) e^{j\beta_n (v_n - v)t}$$

dove  $z = vt$  è la posizione dell'elettrone all'istante  $t$ . I termini della sommatoria oscillano con legge sinusoidale, tanto più rapidamente quanto maggiore è la differenza fra  $v$  e  $v_n$ , e rappresentano forze che mediamente compiono un lavoro nullo. Fa eccezione il caso in cui  $v$  è uguale alla velocità di fase di una delle armoniche spaziali (*condizione di sincronismo*), perché in questo caso si ha una forza costante nel tempo. Tale forza dà luogo ad uno scambio energetico costante nel tempo fra campo ed elettroni: nei TWT (tubi a onda progressiva) la forza è opposta al moto, gli elettroni perdono energia cinetica e l'onda acquista energia elettromagnetica; negli acceleratori lineari la forza agisce nel verso del moto, determinando un incremento dell'energia cinetica degli elettroni a spese dell'energia elettromagnetica dell'onda.