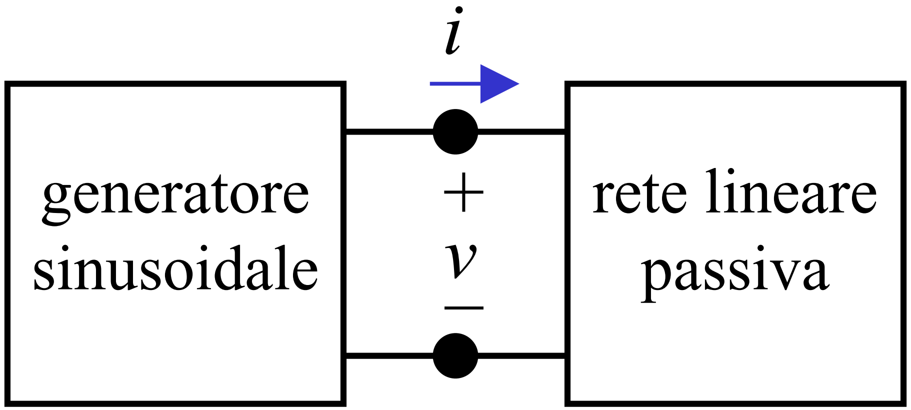
# Potenza istantanea in regime sinusoidale




$$v(t) = V\cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I\cos(\omega t + \theta_i)$$

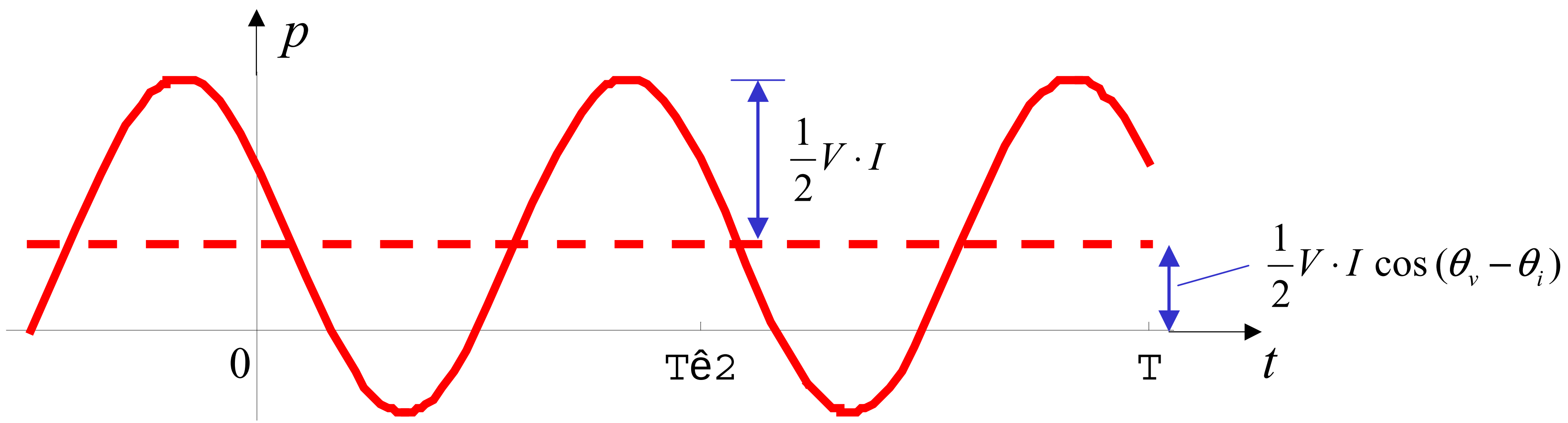
La potenza istantanea è:

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = V\cdot I\cos(\omega t + \theta_v)\cos(\omega t + \theta_i)$$

$$= \frac{1}{2}V\cdot I\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2}V\cdot I\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

# Potenza istantanea in regime sinusoidale

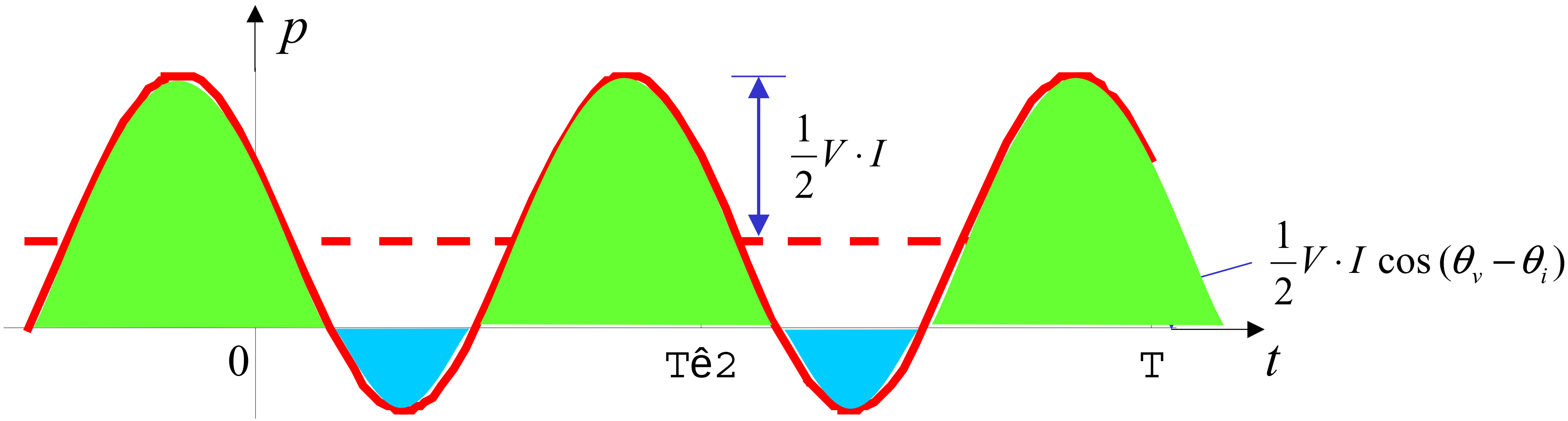
$$p(t) = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$




La potenza istantanea è periodica con periodo $T/2$

# Potenza istantanea in regime sinusoidale

$$p(t) = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$




$p > 0$ potenza assorbita

$p < 0$ potenza erogata

# Potenza media

Nello studio di molti fenomeni (assorbimento della luce da parte dell'occhio umano, misura dell'energia assorbita da un utente, riscaldamento a microonde, ecc.) non conta il valore che la potenza assume istante per istante, ma piuttosto il valore medio della potenza nel tempo:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

# Potenza media

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{ \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \right\} dt$$

poiché

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)\, dt = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\, dt = 0$$

si ha

$$\boxed{P = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

# Potenza media

Considerando i fasori di tensione ($\mathbf{V} = V\angle\theta_v$) e corrente ($\mathbf{I} = I\angle\theta_i$) si ha:

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}V\cdot I\ \angle(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{1}{2}V\cdot I\ \left(\cos(\theta_v - \theta_i) + j\sin(\theta_v - \theta_i)\right)$$

da cui

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^*\right\} = \frac{1}{2}V\cdot I\ \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

# Potenza media

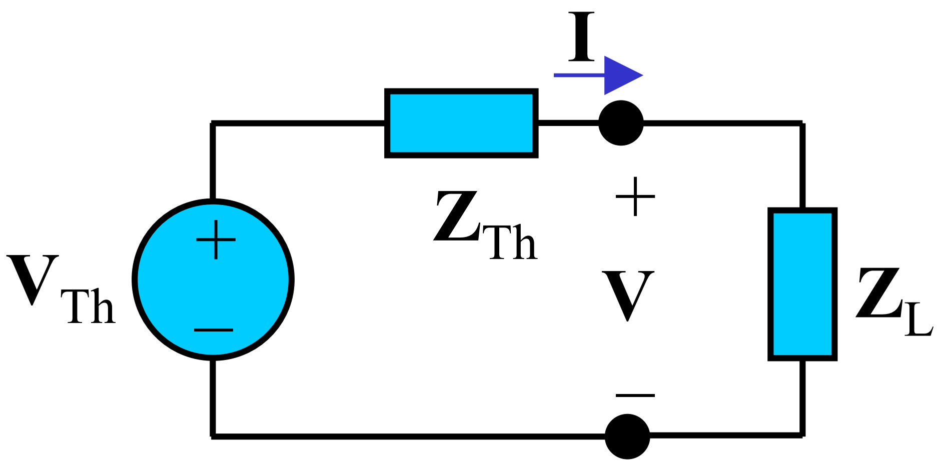
Se $\theta_v = \theta_i$ (tensione e corrente in fase $\rightarrow$ carico resistivo) si ha:

$$P = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} V \cdot I = \frac{1}{2} R \cdot I^2 = \frac{1}{2} R \cdot |\mathbf{I}|^2$$

Se $\theta_v - \theta_i = \pm 90$ (tensione e corrente in quadratura $\rightarrow$ carico reattivo) si ha:

$$P = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) = 0$$

# Potenza media assorbita da un carico




$$\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}} = R_{\mathrm{Th}} + jX_{\mathrm{Th}}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{L}} + jX_{\mathrm{L}}$$

La potenza media assorbita dal carico $\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}$ è:

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{I}^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}\right\}|\,\mathbf{I}\,|^2 = \frac{R_{\mathrm{L}}}{2}|\,\mathbf{I}\,|^2$$

$$= \frac{R_{\mathrm{L}}}{2}\left|\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}}{\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{L}}}\right|^2 = \frac{|\,\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}\,|^2\, R_{\mathrm{L}}/2}{(R_{\mathrm{Th}} + R_{\mathrm{L}})^2 + (X_{\mathrm{Th}} + X_{\mathrm{L}})^2}$$

# Massimo trasferimento di potenza media

Per quale valore di $\mathbf{Z}_\mathrm{L}$ si ha il massimo trasferimento di potenza media?

$$P = \frac{|\mathbf{V}_\mathrm{Th}|^2 R_\mathrm{L}/2}{(R_\mathrm{Th}+R_\mathrm{L})^2+(X_\mathrm{Th}+X_\mathrm{L})^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_\mathrm{L}} = -\frac{|\mathbf{V}_\mathrm{Th}|^2 R_\mathrm{L}(X_\mathrm{Th}+X_\mathrm{L})}{\left[(R_\mathrm{Th}+R_\mathrm{L})^2+(X_\mathrm{Th}+X_\mathrm{L})^2\right]^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_\mathrm{L}} = \frac{|\mathbf{V}_\mathrm{Th}|^2 \left[(R_\mathrm{Th}+R_\mathrm{L})^2+(X_\mathrm{Th}+X_\mathrm{L})-2R_\mathrm{L}(R_\mathrm{Th}+R_\mathrm{L})\right]}{2\left[(R_\mathrm{Th}+R_\mathrm{L})^2+(X_\mathrm{Th}+X_\mathrm{L})^2\right]^2} = 0$$

$$R_\mathrm{L} = R_\mathrm{Th} \qquad X_\mathrm{L} = -X_\mathrm{Th}$$

# Massimo trasferimento di potenza media

In regime sinusoidale, il massimo trasferimento di potenza media si ha quando

$$R_L = R_{Th},\ X_L = -X_{Th} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}^*_{Th}$$

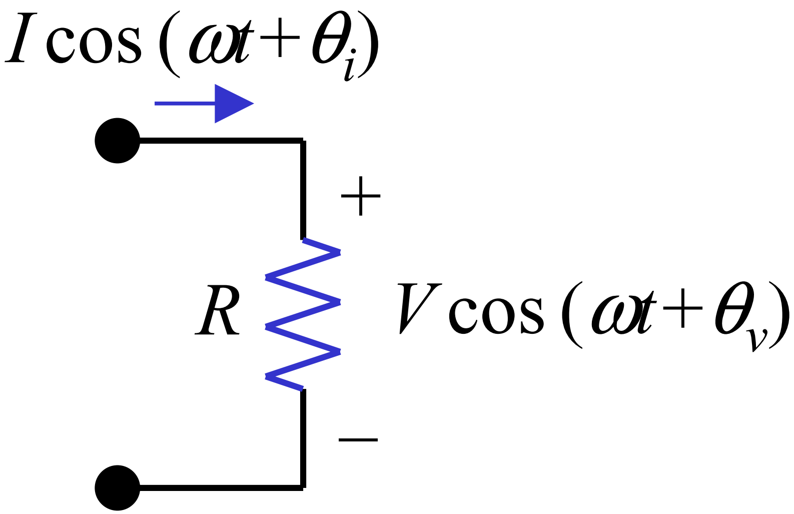
e la potenza media fornita al carico è

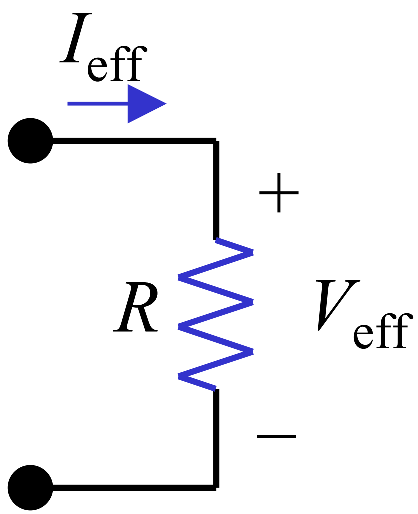
$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}}$$

Quando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}^*_{Th}$ si dice che il carico è adattato al generatore

# Valori efficaci

Il valore efficace di una corrente (tensione) periodica è la corrente (tensione) costante in grado di fornire ad un resistore la stessa potenza della corrente (tensione) periodica



# Valore efficace della corrente

Si ha: $$P = \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot i^2(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot I^2 \cos^2(\omega t + \theta_i)\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot I^2 \, \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)}{2}\, dt = \frac{1}{2} R \cdot I^2$$

ma anche: $$P = R \cdot I_{\text{eff}}^2$$

e quindi:

$$\boxed{I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}}$$

# Valore efficace della tensione

Si ha:
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2}{R}\cos^2(\omega t + \theta_v)\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2}{R}\,\frac{1+\cos(2\omega t + 2\theta_v)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{V^2}{R}$$

ma anche:
$$P = \frac{V_{\mathrm{eff}}^2}{R}$$

e quindi:
$$\boxed{V_{\mathrm{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}}}$$

# Potenza media e valori efficaci

$$P = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

# Potenza apparente e fattore di potenza

$$P = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$S = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ è detta potenza apparente e si misura in VA (voltampere)

$\text{pf} = P/S = \cos(\theta_v - \theta_i)$ è il fattore di potenza

# Fasori efficaci

Definendo i fasori efficaci:

$$\mathbf{V}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}} = V_{\text{eff}} \angle \theta_v \qquad \mathbf{I}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} = I_{\text{eff}} \angle \theta_i$$

si ha:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}}{\mathbf{I}_{\text{eff}}} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \angle (\theta_v - \theta_i)$$

# Fattore di potenza

Il fattore di potenza è il coseno dello sfasamento tra la tensione e la corrente e coincide con il coseno dell'argomento dell'impedenza:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V\angle\theta_v}{I\angle\theta_i} = \frac{V}{I}\angle(\theta_v - \theta_i)$$

- carico resistivo $\Rightarrow \theta_v - \theta_i = 0 \Rightarrow \mathrm{pf} = 1$
  La potenza media coincide con la potenza apparente
- carico reattivo $\Rightarrow \theta_v - \theta_i = \pm 90° \Rightarrow \mathrm{pf} = 0$
  La potenza media è nulla

# Potenza complessa

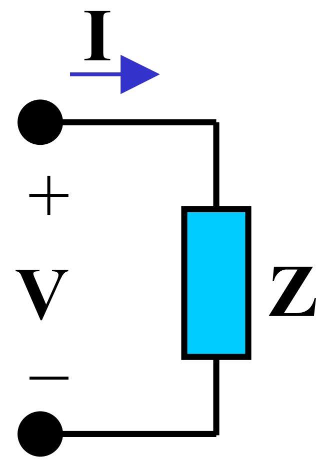
La potenza complessa è:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}V\cdot I\,\left(\cos(\theta_v-\theta_i)+j\sin(\theta_v-\theta_i)\right)$$

$$= \mathbf{V}_{\text{eff}}\cdot\mathbf{I}^*_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\left(\cos(\theta_v-\theta_i)+j\sin(\theta_v-\theta_i)\right)$$

Poiché $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{I}$ e $\mathbf{V}_{\text{eff}} = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{I}_{\text{eff}}$ si ha:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{Z}\cdot|\mathbf{I}|^2 = \mathbf{Z}\cdot|\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}|^2}{\mathbf{Z}^*} = \frac{|\mathbf{V}_{\text{eff}}|^2}{\mathbf{Z}^*}$$



# Potenza complessa

Poiché $\mathbf{Z} = R + jX$ si ha:

$$\mathbf{S} = (R + jX) \cdot |\mathbf{I}_{\mathrm{eff}}|^2 = P + jQ$$

Vale anche:

$$\mathbf{S} = V_{\mathrm{eff}} \cdot I_{\mathrm{eff}} \left( \cos(\theta_v - \theta_i) + j \sin(\theta_v - \theta_i) \right)$$

e quindi:

$P = V_{\mathrm{eff}} \cdot I_{\mathrm{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$ potenza reale o attiva

$Q = V_{\mathrm{eff}} \cdot I_{\mathrm{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i)$ potenza reattiva

# Potenza complessa

$P = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$ è la potenza media fornita al carico. Questa è l'unica potenza utile ed è anche la potenza che il carico realmente dissipa. Si misura in *Watt* (W).

$Q = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i)$ misura lo scambio di energia fra il generatore e la parte reattiva del carico. Si misura in *volt-ampere reattivi* (VAR).

$Q = 0$ per carichi resistivi

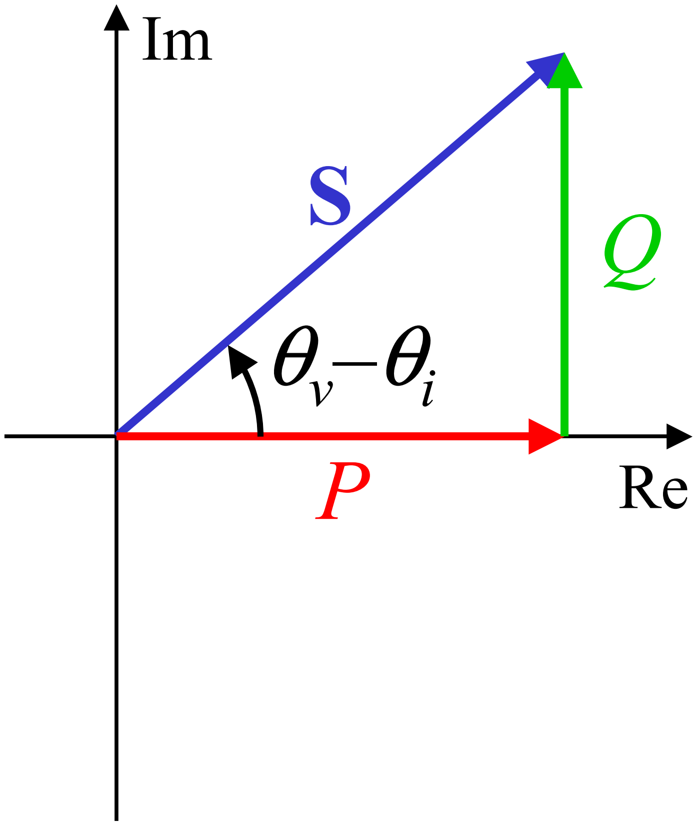
$Q < 0$ per carichi capacitivi ($\theta_v < \theta_i$)

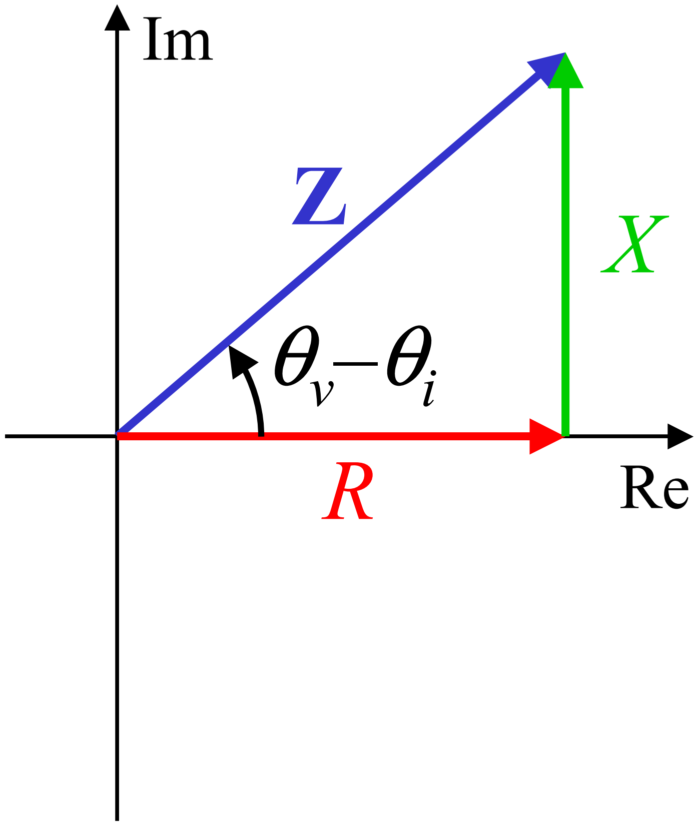
$Q > 0$ per carichi induttivi ($\theta_v > \theta_i$)

# Potenza complessa: riassunto

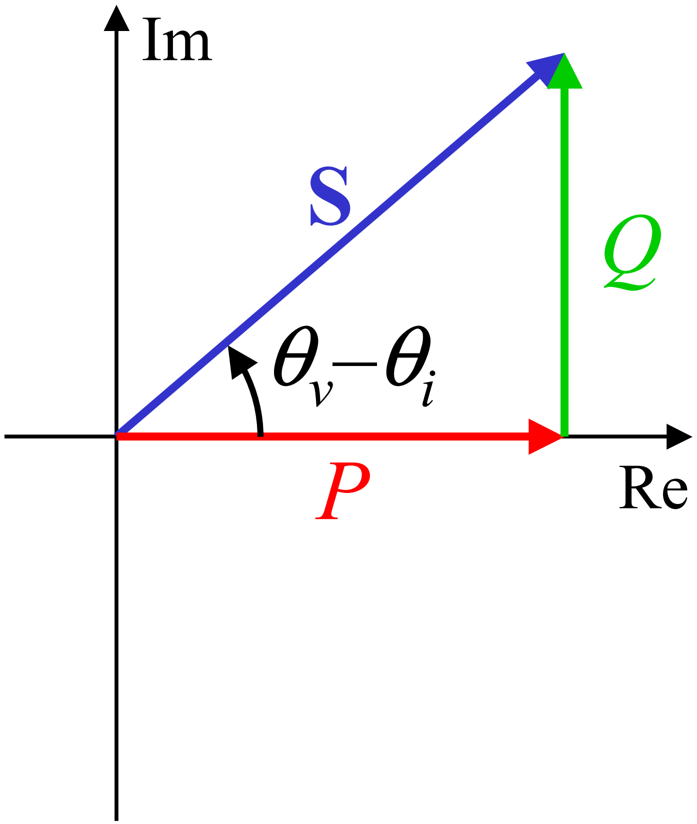
| | |
|---|---|
| $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^* = P + jQ = V_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\,\angle(\theta_v - \theta_i)$ | potenza complessa |
| $S = \lvert\mathbf{S}\rvert = V_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2}$ | potenza apparente |
| $P = \operatorname{Re}\{\mathbf{S}\} = S\cos(\theta_v - \theta_i)$ | potenza reale o attiva |
| $Q = \operatorname{Im}\{\mathbf{S}\} = S\sin(\theta_v - \theta_i)$ | potenza reattiva |
| $\frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)$ | fattore di potenza |

# Triangolo delle potenze

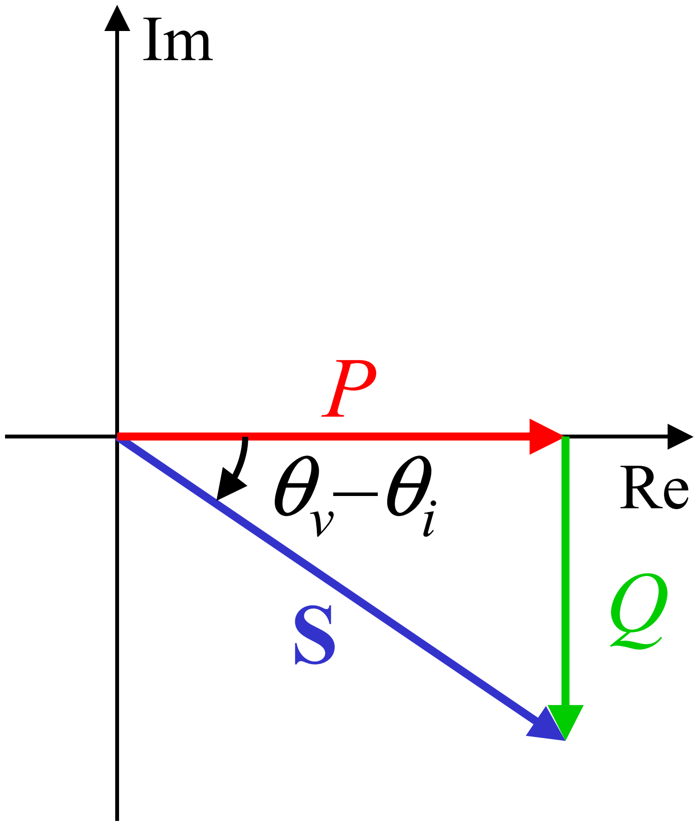


# Triangolo delle potenze




Carico induttivo $Q > 0$




Carico capacitivo $Q < 0$

# Conservazione della potenza complessa

**In un circuito, la potenza complessa, la potenza reale e la potenza reattiva si conservano**

Se il circuito include $N$ elementi, con la convenzione degli utilizzatori si ha:

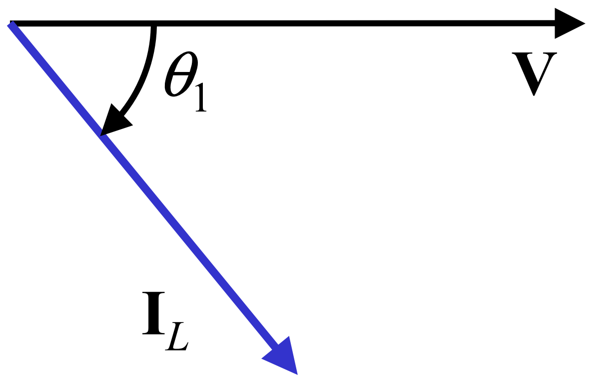
$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{S}_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{N} P_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{N} Q_n = 0$$

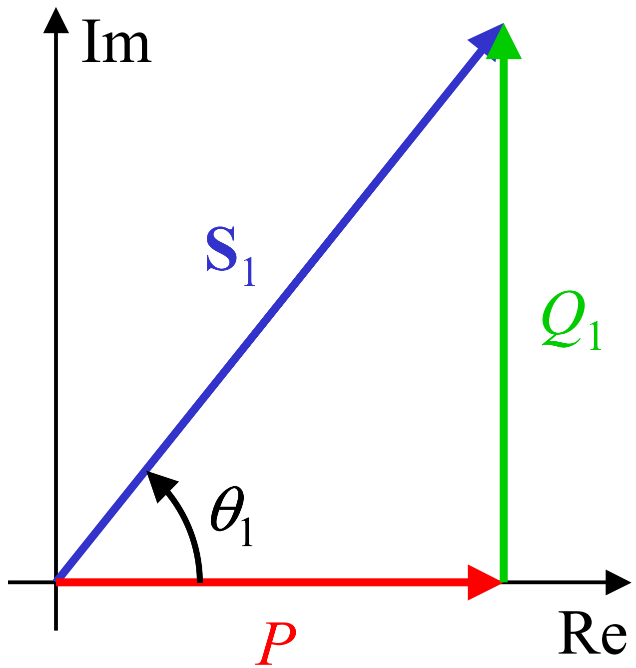
In generale, la legge di conservazione non vale per le potenze apparenti:

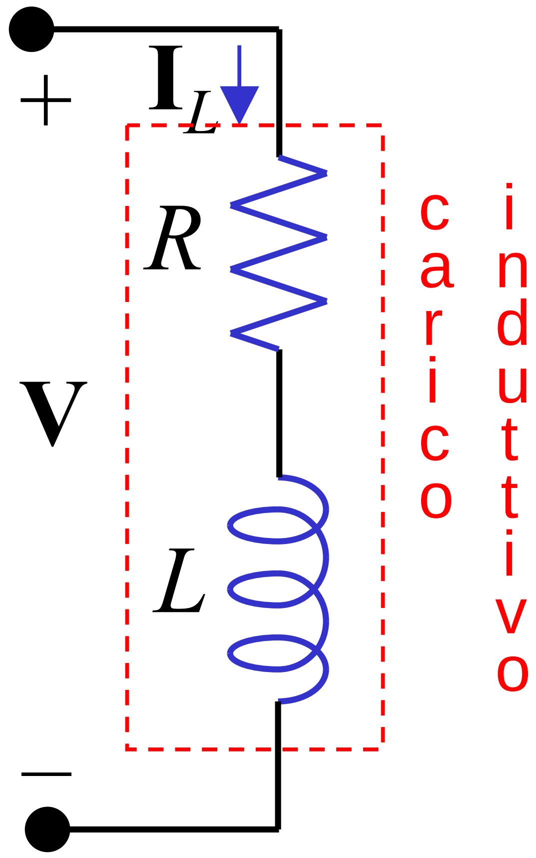
$$\sum_{n=1}^{N} S_n = \sum_{n=1}^{N} |\mathbf{S}|_n \neq 0$$

# Rifasamento

Molti carichi domestici e industriali sono di tipo induttivo. Essi hanno quindi un fattore di potenza $\mathrm{pf} > 0$.

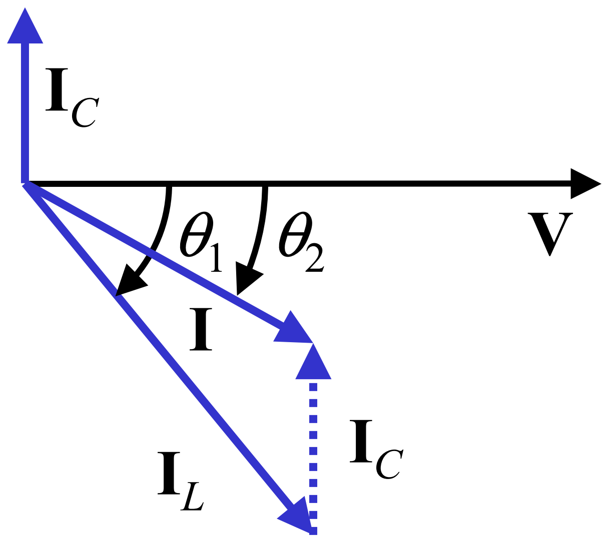


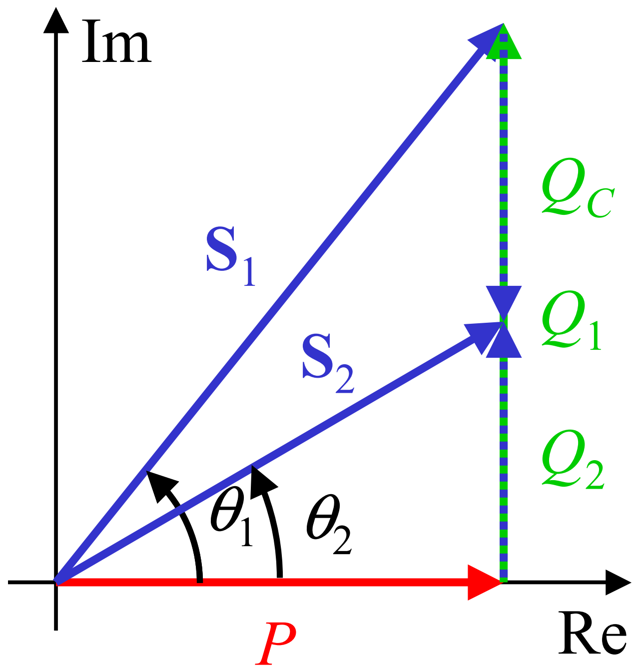



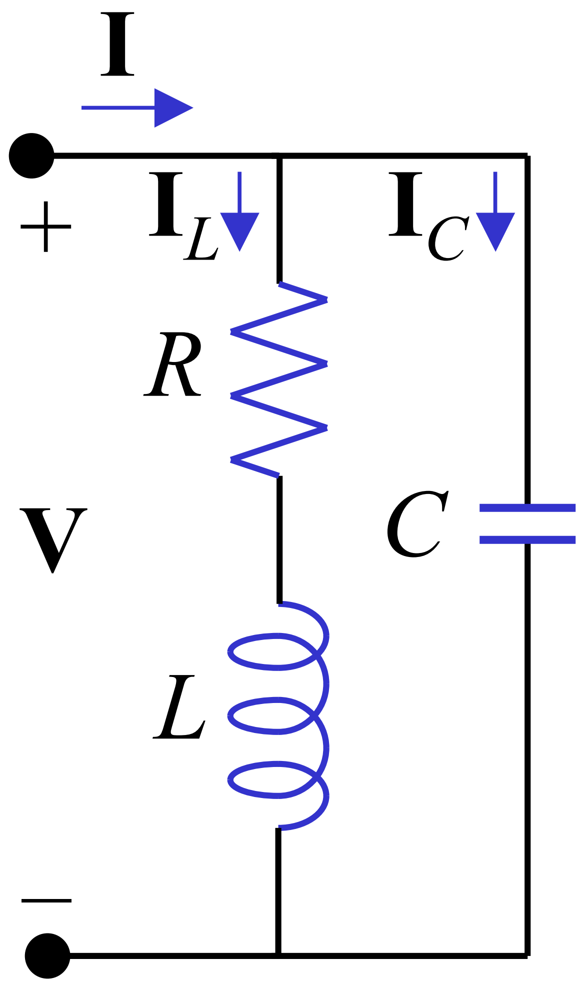



# Rifasamento

Il fattore di potenza può essere massimizzato introducendo una capacità in parallelo al carico.



# Rifasamento

Per il carico induttivo originale si ha:

$$P = S_1 \cos\theta_1 \qquad\qquad Q_1 = S_1 \sin\theta_1 = P \,\mathrm{tg}\,\theta_1$$

Per aumentare il fattore di potenza da $\cos\theta_1$ a $\cos\theta_2$ senza alterare la potenza reale ($P = S_2 \cos\theta_2$) si deve avere

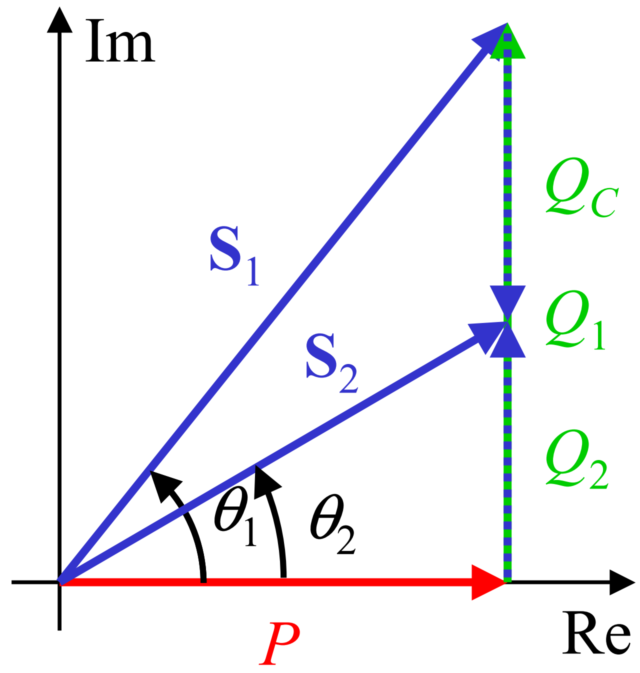
$$Q_2 = S_2 \sin\theta_2 = P \,\mathrm{tg}\,\theta_2$$

da cui

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P\,(\mathrm{tg}\,\theta_1 - \mathrm{tg}\,\theta_2)$$

Ricordando che $Q_C = V^2_{\mathrm{eff}}/X_C = \omega C V^2_{\mathrm{eff}}$ si ottiene

$$C = \frac{Q_C}{\omega V^2_{\mathrm{eff}}} = \frac{P(\mathrm{tg}\,\theta_1 - \mathrm{tg}\,\theta_2)}{\omega V^2_{\mathrm{eff}}}$$



# Rifasamento

Il rifasamento riduce l'ampiezza della corrente in ingresso al carico ($|\mathbf{I}| < |\mathbf{I}_L|$) a parità di potenza reale assorbita.