Misura dello stato di polarizzazione di un'onda incidente

È possibile caratterizzare completamente un segnale a banda limitata, incidente da una determinata direzione, con sole misure di potenza. Infatti, la potenza ricevuta da un ricevitore adattato è :

$$P = (1 - |\Gamma^2|)\, W_{inc}\, A_{eff}\, \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a\, \widetilde{\mathbf{J}}_{inc}^{\mathrm{T}})}{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a)\, \mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})}$$

dove

- Γ è il coefficiente di riflessione nella sezione d'ingresso dell'antenna, nel caso sia usata come trasmittente
- W_{inc} è la densità di potenza incidente (incognita)
- A_{eff} è l'area efficace dell'antenna (supposta praticamente costante entro la banda del segnale)
- $\mathbf{J}_a$ indica la matrice di coerenza del segnale irraggiato dall'antenna nella direzione di provenienza del segnale incidente, qualora l'antenna sia usata in trasmissione
- $\mathbf{J}_{inc}$ la matrice di coerenza (incognita) del segnale incidente

Ricordando che $\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc}) = 2\eta W_{inc}$, e supponendo per semplicità che l'antenna sia adattata ($\Gamma = 0$), si può anche scrivere

$$P = \frac{A_{eff}}{2\eta}\, \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a\, \widetilde{\mathbf{J}}_{inc}^{\mathrm{T}})}{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a)}$$

Supponiamo di fare una prima misura di potenza ricevuta, utilizzando un'antenna che, nella direzione di provenienza del segnale, dà un campo polarizzato secondo $\vec{u}_\theta$. La matrice di coerenza del segnale irraggiato da quest'antenna è :

$$\mathbf{J}_a^{(1)} = 2\,\eta\, W_a^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a^{(1)}) = 2\,\eta\, W_a^{(1)}$$

La potenza $P^{(1)}$ misurata in questo caso è quindi:

$$P^{(1)} = \frac{{A_{eff}}^{(1)}}{2\,\eta}\, [\mathbf{J}_{inc}]_{11}$$

Si può fare una seconda misura utilizzando una seconda antenna (eventualmente la stessa ruotata di 90°) che genera, nella direzione di provenienza del segnale, un campo polarizzato secondo $\vec{u}_\varphi$. La matrice di coerenza del campo irraggiato in questo caso è :

$$\mathbf{J}_a^{(2)} = 2\,\eta\, W_a^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a^{(2)}) = 2\,\eta\, W_a^{(2)}$$

e, di conseguenza, la potenza $P^{(2)}$ misurata è :

$$P^{(2)} = \frac{{A_{eff}}^{(2)}}{2\,\eta}\, [\mathbf{J}_{inc}]_{22}$$

Con due misure di potenza, usando antenne che danno campi polarizzati linearmente in direzioni perpendicolari, si è in grado di definire i valori quadratici medi di due componenti ortogonali del campo, e dedurre la densità di potenza trasportata:

$$W_{inc} = \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})}{2\eta} = \frac{P^{(1)}}{{A_{eff}}^{(1)}} + \frac{P^{(2)}}{{A_{eff}}^{(2)}}$$

Non si è in grado, però, di dire ancora nulla sullo stato di polarizzazione del campo.

Si può fare una terza misura indipendente, utilizzando sempre un'antenna che genera, nella direzione di provenienza del segnale, un campo polarizzato linearmente in un'altra generica direzione $\vec{u}_\theta \cos\psi + \vec{u}_\varphi \sin\psi$. La matrice di coerenza del segnale irraggiato [1] in questo caso è :

$$\mathbf{J}_a^{(3)} = 2\,\eta\, W_a{}^{(3)} \begin{bmatrix} \cos^2\psi & \cos\psi\,\sin\psi \\ \cos\psi\,\sin\psi & \sin^2\psi \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a^{(3)}) = 2\,\eta\, W_a^{(3)}$$

Nel caso (conveniente) in cui si scelga $\psi = \pi/4$ la matrice di coerenza del segnale è

$$\mathbf{J}_a^{(3)} = \eta\, W_a{}^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e la potenza misurata è :

$$\begin{aligned} P^{(3)} &= \frac{A_{eff}{}^{(3)}}{2\,\eta}\,\frac{[\mathbf{J}_{inc}]_{11} + [\mathbf{J}_{inc}]_{22} + ([\mathbf{J}_{inc}]_{12} + [\mathbf{J}_{inc}]_{21})}{2} \\ &= \frac{A_{eff}{}^{(3)}}{2\,\eta}\left(\frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})}{2} + \mathrm{Re}([\mathbf{J}_{inc}]_{12})\right) \end{aligned}$$

A questo punto è chiaro che per completare la definizione di $\mathbf{J}_{inc}$ è necessario realizzare una quarta misura utilizzando un'antenna che dà nella direzione di provenienza del segnale un campo con polarizzazione non lineare. Se scegliamo, ad esempio, una polarizzazione circolare in verso antiorario (componente secondo $\vec{u}_\varphi$ in anticipo di fase di $\pi/2$ rispetto alla componente secondo $\vec{u}_\theta$), avremo che la matrice di coerenza del campo irraggiato è :

$$\mathbf{J}_a^{(4)} = \eta\, W_a^{(4)} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{J}_a^{(4)}) = 2\,\eta\, W_a^{(4)}$$

e la potenza misurata in quest'ultimo caso è data da:

$$\begin{aligned} P^{(4)} &= \frac{A_{eff}{}^{(4)}}{2\,\eta}\,\frac{[\mathbf{J}_{inc}]_{11} - j[\mathbf{J}_{inc}]_{12} + j[\mathbf{J}_{inc}]_{21} + [\mathbf{J}_{inc}]_{22}}{2} \\ &= \frac{A_{eff}{}^{(4)}}{2\eta}\left(\frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})}{2} + \mathrm{Im}([\mathbf{J}_{inc}]_{12}\right) \end{aligned}$$

Riassumendo, si ha:

$$[\mathbf{J}_{inc}]_{11} = \frac{2\,\eta\, P^{(1)}}{A_{eff}{}^{(1)}}$$

$P^{(1)}$ è la potenza ricevuta dall'antenna che dà, nella direzione di provenienza del segnale, un campo di radiazione polarizzato secondo $\vec{u}_\theta$

$$[\mathbf{J}_{inc}]_{22} = \frac{2\,\eta\, P^{(2)}}{A_{eff}{}^{(2)}}$$

$P^{(2)}$ è la potenza ricevuta dall'antenna che dà un campo di radiazione polarizzato secondo $\vec{u}_\varphi$

$$\mathrm{Re}([\mathbf{J}_{inc}]_{12}) = \frac{2\,\eta\, P^{(3)}}{A_{eff}{}^{(3)}} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})}{2}$$

$P^{(3)}$ è la potenza ricevuta dall'antenna che dà un campo di radiazione polarizzato linearmente a 45^o tra $\vec{u}_\theta$ e $\vec{u}_\varphi$

$$\mathrm{Im}([\mathbf{J}_{inc}]_{12}) = \frac{2\,\eta\, P^{(4)}}{A_{eff}{}^{(4)}} - \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})}{2}$$

$P^{(4)}$ è la potenza ricevuta dall'antenna che dà, nella direzione di provenienza del segnale, un campo di radiazione polarizzato circolarmente in verso antiorario

[1] le matrici di coerenza di campi polarizzati linearmente sono reali.

Una volta trovata la matrice di coerenza, è possibile determinare in modo univoco la sua componente completamente polarizzata e la densità di potenza associata alla componente completamente non polarizzata:

$$\mathbf{J}_{inc} = \begin{bmatrix} J^{\mathrm{P}}_{11} & J^{\mathrm{P}}_{12} \\ J^{\mathrm{P}}_{21} & J^{\mathrm{P}}_{22} \end{bmatrix} + \eta W^{\mathrm{NP}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} J^{\mathrm{P}}_{11} &= [\mathbf{J}_{inc}]_{11} - \eta W^{\mathrm{NP}} \\ J^{\mathrm{P}}_{22} &= [\mathbf{J}_{inc}]_{22} - \eta W^{\mathrm{NP}} \\ J^{\mathrm{P}}_{12} &= [\mathbf{J}_{inc}]_{12} \\ J^{\mathrm{P}}_{21} &= [\mathbf{J}_{inc}]_{21} \\ J^{\mathrm{P}}_{11}\, J^{\mathrm{P}}_{22} - J^{\mathrm{P}}_{12} J^{\mathrm{P}}_{21} &= 0 \qquad \text{per la condizione di completa polarizzazione} \end{aligned}$$

dal prodotto membro a membro delle prime due equazioni si ottiene

$$J^{\mathrm{P}}_{11} J^{\mathrm{P}}_{22} = [\mathbf{J}_{inc}]_{11}[\mathbf{J}_{inc}]_{22} - \eta W^{\mathrm{NP}}([\mathbf{J}_{inc}]_{11} + [\mathbf{J}_{inc}]_{22}) + (\eta W^{\mathrm{NP}})^2$$

e sfruttando le altre relazioni

$$(\eta W^{\mathrm{NP}})^2 - \eta W^{\mathrm{NP}}\, \mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc}) + \mathrm{Det}(\mathbf{J}_{inc}) = 0$$

da cui, dovendo essere $0 \leq 2\eta W^{\mathrm{NP}} \leq \mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})$, si ottiene

$$\begin{aligned} \eta W^{\mathrm{NP}} &= \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc}) - \sqrt{\mathrm{Tr}^2(\mathbf{J}_{inc}) - 4\,\mathrm{Det}(\mathbf{J}_{inc})}}{2} = \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}_{inc})}{2}\,(1-m) \\ m &= \sqrt{1 - \frac{4\,\mathrm{Det}(\mathbf{J}_{inc})}{\mathrm{Tr}^2(\mathbf{J}_{inc})}} \qquad \text{grado di polarizzazione} \end{aligned}$$