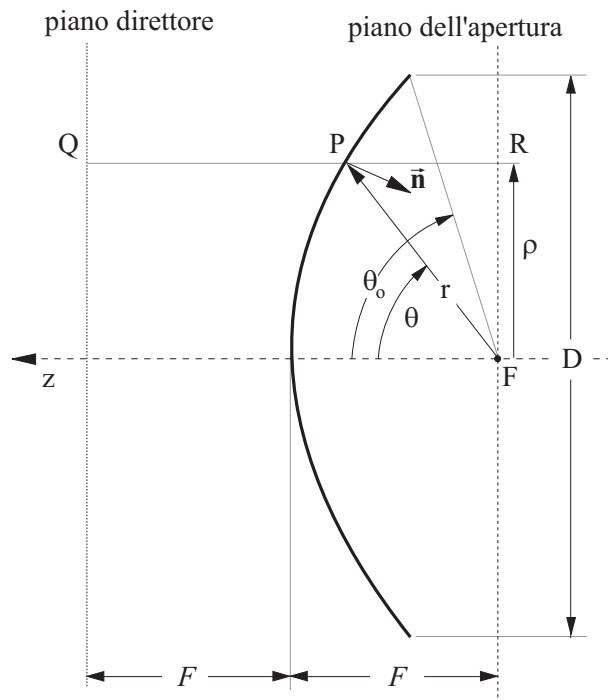


Analisi del paraboloide ideale



Un paraboloide di rivoluzione è il luogo dei punti equidistanti da un punto detto *fuoco* (F) ed un piano detto *direttore*. La metà della distanza tra il fuoco ed il piano direttore è chiamata *distanza focale* F . Nel sistema di riferimento sferico con origine nel fuoco e asse polare perpendicolare al piano direttore, il punto generico $P = \{r, \theta, \varphi\}$ sulla superficie del paraboloide è definito da:

$$r = 2F - r \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad r = \frac{F}{\cos^2(\vartheta/2)}$$

Il punto R, proiezione di P sul piano dell'apertura, avendo assunto come piano dell'apertura il piano parallelo al piano direttore passante per il fuoco, è individuato dalle coordinate $\{\rho, \varphi\}$ dove ρ è legato a θ dalla relazione:

$$\rho = r \sin \vartheta = 2F \operatorname{tg}(\vartheta/2)$$

Da semplici considerazioni geometriche, si ricava che la normale \vec{n} alla superficie del paraboloide è definita da:

$$\vec{n} = -\frac{\nabla r \cos^2(\vartheta/2)}{|\nabla r \cos^2(\vartheta/2)|} = -\vec{u}_r \cos(\vartheta/2) + \vec{u}_\vartheta \sin(\vartheta/2)$$

Infine, assunto che il riflettore sia costituito dalla sola parte di superficie parabolica per cui $\vartheta < \vartheta_0$, (ϑ_0 è l'angolo di semiapertura dell'angolo solido sotto cui il riflettore è visto dal fuoco) si ha che il diametro D dell'apertura è dato da:

$$D = 4F \operatorname{tg}(\vartheta_0/2)$$

Consideriamo un paraboloide illuminato da una sorgente primaria posta sul fuoco, e siano:

- W_{in} la potenza in ingresso dell'illuminatore
- $g(\vartheta, \varphi)$ il suo guadagno
- $\vec{p}(\vartheta, \varphi)$ la polarizzazione del campo irraggiato.
- $\psi(\vartheta, \varphi)$ la fase del campo irraggiato (a meno del termine e^{-jkr} e dell'eventuale fase associata alla polarizzazione)

Supponiamo che la sorgente sia sufficientemente piccola in modo tale che il paraboloide si trovi nella zona di campo lontano della sorgente. In queste condizioni, si può scrivere il campo incidente sul paraboloide nella forma:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{inc} &= \sqrt{\frac{\eta W_{in}}{2\pi}} \frac{e^{-jkr}}{F} \cos^2(\vartheta/2) \sqrt{g(\vartheta, \varphi)} e^{j\psi(\vartheta, \varphi)} \vec{p}(\vartheta, \varphi) & (\vartheta \leq \vartheta_o) \\ \vec{H}_{inc} &= \frac{\vec{u}_r \times \vec{E}_{inc}}{\eta}\end{aligned}$$

Il campo elettromagnetico riflesso si propaga secondo $-\vec{u}_z$ ¹ e, sulla stessa superficie del paraboloide, è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{rif} &= 2(\vec{n} \cdot \vec{E}_{inc})\vec{n} - \vec{E}_{inc} \\ &= \sqrt{\frac{\eta W_{in}}{2\pi}} \frac{e^{-jkr}}{F} \cos^2(\vartheta/2) \sqrt{g(\vartheta, \varphi)} e^{j\psi(\vartheta, \varphi)} \vec{p}_{rif}(\vartheta, \varphi) \\ \vec{H}_{rif} &= -\frac{\vec{u}_z \times \vec{E}_{rif}}{\eta}\end{aligned}$$

dove \vec{p}_{rif} è il vettore di polarizzazione del campo riflesso, dato da ²:

$$\vec{p}_{rif} = 2(\vec{n} \cdot \vec{p})\vec{n} - \vec{p}$$

Dato che i raggi riflessi sono paralleli, lungo essi l'intensità del campo elettromagnetico rimane costante, varia solo la fase. Pertanto il campo sull'apertura è dato da:

$$\begin{aligned}\vec{E}_a(\rho, \varphi) &= \vec{E}_{rif} e^{-jkr \cos \vartheta} \\ &= \sqrt{\frac{\eta W_{in}}{2\pi}} \frac{e^{-j2kF}}{F} \cos^2(\vartheta/2) \sqrt{g(\vartheta, \varphi)} e^{j\psi(\vartheta, \varphi)} \vec{p}_{rif}(\vartheta, \varphi) \\ \vec{H}_a(\rho, \varphi) &= -\frac{\vec{u}_z \times \vec{E}_a}{\eta}\end{aligned}$$

con $\vartheta = 2 \arctan \frac{\rho}{2F}$.

Nel caso di polarizzazione lineare, \vec{p} e \vec{p}_{rif} sono reali per cui risulta che il campo sull'apertura è equifase se $\psi(\vartheta, \varphi)$ è costante almeno per $\vartheta \leq \vartheta_o$, cioè se l'illuminatore ha un centro di fase proprio, almeno limitatamente all'angolo solido di semiapertura ϑ_o .

¹Il versore \vec{u}_{rif} che identifica la direzione del raggio riflesso è definito dalla relazione: $\vec{u}_{rif} = \vec{u}_{inc} - 2(\vec{u}_{inc} \cdot \vec{n})\vec{n}$. Ponendo $\vec{u}_{inc} = \vec{u}_r$ e usando l'espressione di \vec{n} , si verifica immediatamente che $\vec{u}_{rif} = -\vec{u}_z$

²Si verifica immediatamente che l'espressione di \vec{p}_{rif} rappresenta effettivamente un vettore di polarizzazione in quanto soddisfa le relazioni $\vec{p}_{rif} \cdot \vec{u}_z = 0$, $\vec{p}_{rif} \cdot \vec{p}_{rif}^* = 1$.

Per studiare la polarizzazione del campo sull'apertura è conveniente determinare preventivamente qual'è la polarizzazione \vec{p}_{co} della sorgente che dà sull'apertura una polarizzazione lineare uniforme, ad esempio nella direzione \vec{u}_x . Proiettando su \vec{u}_r ed \vec{u}_φ l'equazione:

$$2(\vec{n} \cdot \vec{p}_{co})\vec{n} - \vec{p}_{co} = \vec{u}_x$$

e ricordando che necessariamente $\vec{p}_{co} \cdot \vec{u}_r = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} 2(\vec{p}_{co} \cdot \vec{u}_\varphi \sin \vartheta/2)(-\cos \vartheta/2) &= \sin \vartheta \cos \varphi \\ -\vec{p}_{co} \cdot \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\vec{p}_{co} = -\vec{u}_\varphi \cos \varphi + \vec{u}_\varphi \sin \varphi$$

che è la polarizzazione del campo irraggiato da una sorgente di Huygens con dipolo elettrico diretto secondo \vec{u}_x e dipolo magnetico secondo \vec{u}_y . La polarizzazione ad essa incrociata

$$\vec{p}_{cross} = -\vec{u}_\varphi \sin \varphi - \vec{u}_\varphi \cos \varphi$$

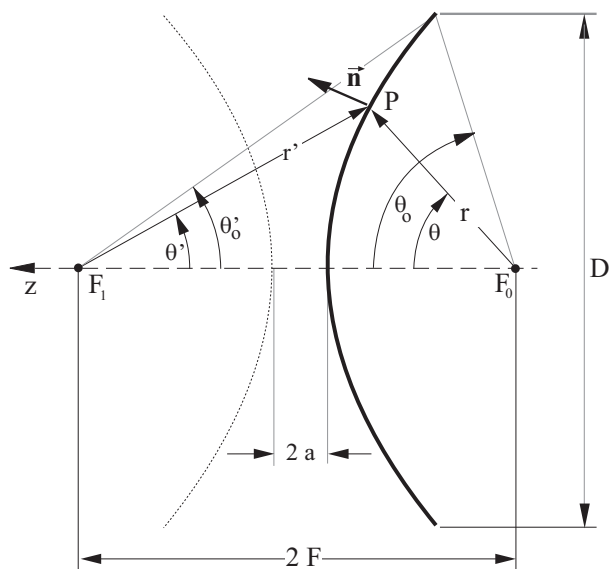
è la polarizzazione del campo irraggiato dalla stessa sorgente di Huygens ruotata di 90 gradi attorno all'asse z che dà sull'apertura un campo polarizzato uniformemente secondo \vec{u}_y . Pertanto, una sorgente di piccole dimensioni con vettore di radiazione diretto secondo \vec{u}_x (ad esempio un dipolo orientato secondo \vec{u}_x , una tromba piramidale alimentata con il modo TE_{10} polarizzato secondo \vec{u}_x , ...) il cui campo di radiazione ha polarizzazione

$$\vec{p} = \frac{\vec{u}_x - \vec{u}_r(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_r)}{|\vec{u}_x - \vec{u}_r(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_r)|} = \frac{\vec{u}_\varphi \cos \vartheta \cos \varphi - \vec{u}_\varphi \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

produce sull'apertura un campo la cui polarizzazione \vec{p}_a è data da:

$$\begin{aligned} \vec{p}_a &= \vec{u}_x(\vec{p} \cdot \vec{p}_{co}^*) + \vec{u}_y(\vec{p} \cdot \vec{p}_{cross}^*) \\ &= \frac{-\vec{u}_x(\cos \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \vec{u}_y(1 - \cos \vartheta) \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Analisi dell'iperboloide ideale



Un iperboloide di rivoluzione è il luogo dei punti per cui la differenza delle distanze dai due fuochi F_0 ed F_1 è costante ed uguale a $2a = 2F/e$, dove F è la distanza focale ed e l'eccentricità ($e > 1$). Nel sistema di riferimento sferico con origine in F_0 e asse polare passante per F_1 si ha:

$$r' - r = 2a$$

$$e = \frac{F}{a} > 1 \quad \text{eccentricità}$$

$$M = \frac{e+1}{e-1} > 1 \quad \text{magnificazione}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - 2F\vec{u}_z$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}_r - \vec{r}'/r'}{|\vec{u}_r - \vec{r}'/r'|} = \frac{\vec{u}_r(1 + e \cos \vartheta) - \vec{u}_\vartheta e \sin \vartheta}{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}$$

$$r = \frac{F(e^2 - 1)}{e(1 + e \cos \vartheta)}$$

$$r' = \frac{F(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)}{e(1 + e \cos \vartheta)}$$

$$\text{tg}(\vartheta/2) = M \text{tg}(\vartheta'/2)$$

Consideriamo ora un iperboloide illuminato da una sorgente primaria posta sul fuoco F_1 . Con le stesse ipotesi del caso precedente, ricordando che sulla superficie dell'iperboloide $r' = 2a + r$,

si trova che il campo incidente sull'iperboloide è dato da:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{inc} &= \sqrt{\frac{\eta W_{in}}{2\pi}} \frac{e^{-jkr_o}}{r'_o} \sqrt{g(\vartheta', \varphi)} e^{j\psi(\vartheta', \varphi) - 2ka} \vec{p}(\vartheta', \varphi) \\ \vec{H}_{inc} &= \frac{\vec{u}_{r'} \times \vec{E}_{inc}}{\eta}\end{aligned}$$

dove r_o e r'_o sono i valori di r e r' calcolati sulla superficie dell'iperboloide di l'eccentricità e :

$$\begin{aligned}r_o &= \frac{F(e^2 - 1)}{e(1 + e \cos \vartheta)} \\ r'_o &= \frac{F(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)}{e(1 + e \cos \vartheta)}\end{aligned}$$

Il campo riflesso si propaga secondo \vec{u}_r ³, pertanto esso può essere pensato come generato da una sorgente puntiforme posta sul fuoco F_0 coincidente con l'origine del sistema di riferimento. Il campo per $r > r_o$ è dato da:

$$\begin{aligned}\vec{E}|_{r>r_o} &= \vec{E}|_{r=r_o} \frac{r_o}{r} e^{-jk(r-r_o)} \\ &= \sqrt{\frac{\eta W_{in}}{2\pi}} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{g_{eq}(\vartheta, \varphi)} e^{j\psi_{eq}(\vartheta, \varphi)} \vec{p}_{rif}(\vartheta, \varphi) \quad (\vartheta < \vartheta_o)\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}g_{eq}(\vartheta, \varphi) &= \frac{(e^2 - 1)^2}{(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)^2} g(\vartheta', \varphi) \\ \psi_{eq}(\vartheta, \varphi) &= \psi(\vartheta', \varphi) - 2ka \\ \vec{p}_{rif}(\vartheta, \varphi) &= 2 \left[\vec{n}(\vartheta) \cdot \vec{p}_{inc}(\vartheta', \varphi) \right] \vec{n}(\vartheta) - \vec{p}_{inc}(\vartheta'(\vartheta), \varphi) \\ \vartheta' &= 2 \arctg \left(M^{-1} \text{tg} \vartheta / 2 \right)\end{aligned}$$

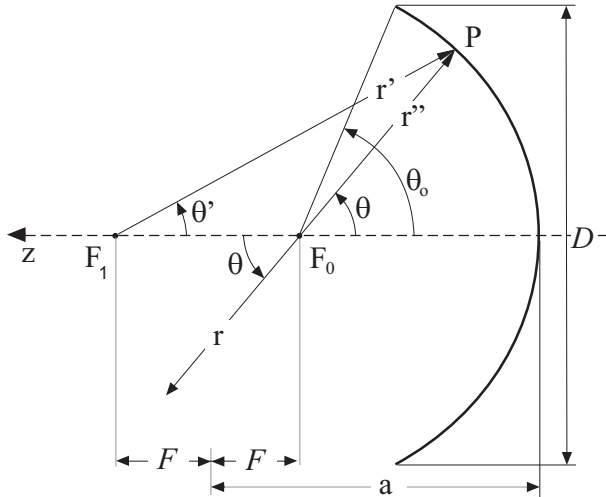
ed M è la magnificazione dell'iperboloide.

Si può verificare che se la polarizzazione del campo irradiato dalla sorgente posta in F_1 entro l'angolo solido definito da $\vartheta' < \vartheta'_o$ è uguale alla polarizzazione di una sorgente di Huygens con asse diretto come \vec{u}_z , la polarizzazione del campo irraggiato entro l'angolo solido $\vartheta < \vartheta_o$ dalla sorgente equivalente posta in F_0 è quella della sorgente di Huygens avente momenti di dipolo elettrico e magnetico paralleli a quelli della sorgente posta in F_1 .

³infatti, sapendo che $\vec{u}_{inc} = \vec{r}'/r'$, dall'espressione della normale $\vec{n} = \frac{\vec{u}_r - \vec{r}'/r'}{|\vec{u}_r - \vec{r}'/r'|}$, si ricava:

$$\begin{aligned}\vec{u}_{rif} &= \vec{u}_{inc} - 2(\vec{u}_{inc} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ &= \frac{\vec{r}'}{r'} - 2 \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{r}'/r' - 1}{2(1 - \vec{u}_r \cdot \vec{r}'/r')} (\vec{u}_r - \vec{r}'/r') = \vec{u}_r\end{aligned}$$

Analisi dell'ellissoide ideale



Un ellissoide di rivoluzione è il luogo dei punti per cui la somma delle distanze dai due fuochi F_0 ed F_1 è costante ed uguale a $2a = 2F/e$, dove F è la distanza focale ed e l'eccentricità ($e < 1$). Nel sistema di riferimento sferico con origine in F_0 e asse polare passante per F_1 si ha:

$$r' + r'' = 2a$$

$$e = \frac{F}{a} < 1 \quad \text{eccentricità}$$

$$M = \frac{1+e}{1-e} > 1 \quad \text{magnificazione}$$

$$\vec{r}' = \vec{r}'' - 2F\vec{u}_z$$

$$\vec{n} = -\frac{\vec{r}''/r'' + \vec{r}'/r'}{|\vec{r}''/r'' + \vec{r}'/r'|} = \frac{\vec{u}_r(1 + e \cos \vartheta) + \vec{u}_\vartheta e \sin \vartheta}{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}$$

$$r'' = \frac{F(1 - e^2)}{e(1 + e \cos \vartheta)}$$

$$r' = \frac{F(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)}{e(1 + e \cos \vartheta)}$$

$$\text{tg}(\vartheta/2) = M \text{tg}(\vartheta'/2)$$

Consideriamo ora un ellissoide illuminato da una sorgente primaria posta sul fuoco F_1 . Con le stesse ipotesi dei casi precedenti, ricordando che sulla superficie dell'ellissoide $r' = 2a - r''$, si trova che il campo incidente sul riflettore è dato da:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{inc} &= \sqrt{\frac{\eta W_{in}}{2\pi}} \frac{e^{jkr'}}{r'} \sqrt{g(\vartheta', \varphi)} e^{j\psi(\vartheta', \varphi) - 2ka} \vec{p}(\vartheta', \varphi) \\ \vec{H}_{inc} &= \frac{\vec{u}_{r'} \times \vec{E}_{inc}}{\eta}\end{aligned}$$

dove r'_o e r''_o sono calcolati sulla superficie dell'ellissoide:

$$\begin{aligned}r' &= \frac{F(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)}{e(1 + e \cos \vartheta)} \\ r'' &= \frac{F(1 - e^2)}{e(1 + e \cos \vartheta)}\end{aligned}$$

Il campo riflesso si propaga secondo $-\vec{r}''/r'' = \vec{u}_r$ ⁴, pertanto esso converge sul fuoco F_0 e, dopo averlo oltrepassato, può essere pensato come generato da una sorgente puntiforme posta nell'origine del sistema di riferimento coincidente con F_0 . Il campo, dopo il passaggio per il fuoco è dato da:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{rif} \frac{r''}{r} e^{-jk(r+r'')} e^{-j\pi} \\ &= \sqrt{\frac{\eta W_{in}}{2\pi}} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{g_{eq}(\vartheta, \varphi)} e^{j\psi_{eq}(\vartheta, \varphi)} \vec{p}_{rif}(\vartheta, \varphi) \quad (\vartheta < \vartheta_o)\end{aligned}$$

dove:

$$g_{eq}(\vartheta, \varphi) = \frac{(1 - e^2)^2}{(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)^2} g(\vartheta', \varphi + \pi)$$

$$\psi_{eq}(\vartheta, \varphi) = \psi(\vartheta', \varphi + \pi) - 2ka - \pi$$

$$\vec{p}_{rif}(\vartheta, \varphi) = 2 \left[\vec{n}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) \cdot \vec{p}_{inc}(\vartheta', \varphi + \pi) \right] \vec{n}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) - \vec{p}_{inc}(\vartheta', \varphi + \pi)$$

$$\vartheta' = 2 \arctg \left(M^{-1} \text{tg} \vartheta / 2 \right)$$

ed M è la magnificazione dell'ellissoide.

Anche per l'ellissoide, si può verificare che se la polarizzazione del campo irradiato dalla sorgente posta in F_1 entro l'angolo solido definito da $\vartheta' < \vartheta'_o$ è uguale alla polarizzazione di una sorgente di Huygens con asse diretto come $-\vec{u}_z$, la polarizzazione del campo irraggiato entro l'angolo solido $\vartheta < \vartheta_o$ dalla sorgente equivalente posta in F_0 è quella della sorgente di Huygens avente momenti di dipolo elettrico e magnetico paralleli a quelli della sorgente posta in F_1 .

⁴infatti, ponendo $\vec{u}_{inc} = \vec{r}'/r'$, dall'espressione della normale $\vec{n} = -\frac{\vec{r}''/r'' + \vec{r}'/r'}{|\vec{r}''/r'' + \vec{r}'/r'|}$, si ricava:

$$\begin{aligned}\vec{u}_{rif} &= \vec{u}_{inc} - 2(\vec{u}_{inc} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ &= \frac{\vec{r}'}{r'} - 2 \frac{\vec{r}'' \cdot \vec{r}' / (r' r'') + 1}{2(1 + \vec{r}'' \cdot \vec{r}' / (r' r''))} (\vec{r}''/r'' + \vec{r}'/r') = -\vec{r}''/r'' = \vec{u}_r\end{aligned}$$

Appendice

Dall'equazione dell'iperboloide e dall'espressione di r ed r' si ha:

$$\sin \vartheta' = \frac{r \sin \vartheta}{r'} = \frac{(e^2 - 1) \sin \vartheta}{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}$$

$$\cos \vartheta' = \frac{2F - r \cos \vartheta}{r'} = \frac{(e^2 + 1) \cos \vartheta + 2e}{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}$$

$$\tan \vartheta' / 2 = \frac{\sin \vartheta'}{1 + \cos \vartheta'} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \tan \vartheta / 2$$

Il vettore di polarizzazione del campo irraggiato dalla sorgente di Huygens posta in F_1 con momento di dipolo elettrico diretto secondo x e momento di dipolo magnetico diretto secondo y può essere scritto nella forma $\vec{p} = \vec{u}_\varphi \times (\vec{r}'/r') \cos \varphi + \vec{u}_\varphi \sin \varphi$. Si nota che \vec{u}_φ è perpendicolare a \vec{r}' per cui $\vec{u}_\varphi \times (\vec{r}'/r')$ ha modulo unitario. Risulta:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{rif} &= 2(\vec{n} \cdot \vec{p})\vec{n} - \vec{p} \\ &= 2 \frac{\vec{u}_r - \vec{r}'/r'}{\sqrt{2 - 2\vec{u}_r \cdot \vec{r}'/r'}} \cdot \left(\frac{\vec{u}_\varphi \times \vec{r}'}{r'} \cos \varphi + \vec{u}_\varphi \sin \varphi \right) \frac{\vec{u}_r - \vec{r}'/r'}{\sqrt{2 - 2\vec{u}_r \cdot \vec{r}'/r'}} - \left(\frac{\vec{u}_\varphi \times \vec{r}'}{r'} \cos \varphi + \vec{u}_\varphi \sin \varphi \right) \\ &= \left(\frac{\vec{u}_r - \vec{r}'/r'}{1 - \vec{u}_r \cdot \vec{r}'/r'} (\vec{u}_r - \vec{r}'/r' \cdot \vec{u}_\varphi \times \vec{r}'/r') \right) \cos \varphi - \vec{u}_\varphi \sin \varphi \\ &= \vec{u}_\vartheta \cos \varphi - \vec{u}_\varphi \sin \varphi \end{aligned}$$