

Facoltà di Ingegneria  
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in  
Ingegneria Elettronica e Informatica

Campi Elettromagnetici e Circuiti I

Metodi di analisi

# Sommario

---

- Metodo di analisi nodale
- Metodo di analisi agli anelli

# Metodi di analisi

Due metodi sistematici per l'analisi dei circuiti:

## ANALISI NODALE

(basata su KCL e legge di Ohm)

## ANALISI AGLI ANELLI

(basata su KVL e legge di Ohm)

# Analisi nodale

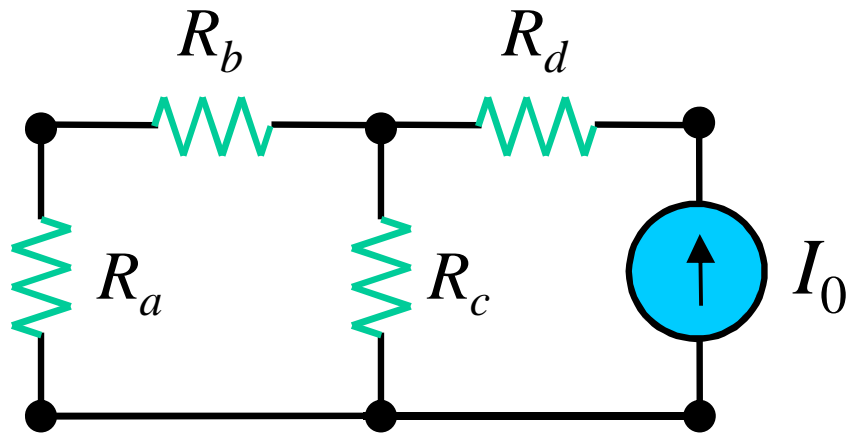
Le incognite sono le tensioni di nodo

Dato un circuito con  $n$  nodi il metodo si articola in tre passi:

1. un qualunque nodo viene scelto come riferimento; si indicano con  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  le tensioni dei rimanenti nodi rispetto al nodo di riferimento;
2. si applica la KCL agli  $n-1$  nodi, usando la legge di Ohm per esprimere le correnti di ramo in funzione delle tensioni di nodo;
3. si risolvono le equazioni così ottenute, ricavando le tensioni di nodo  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ .

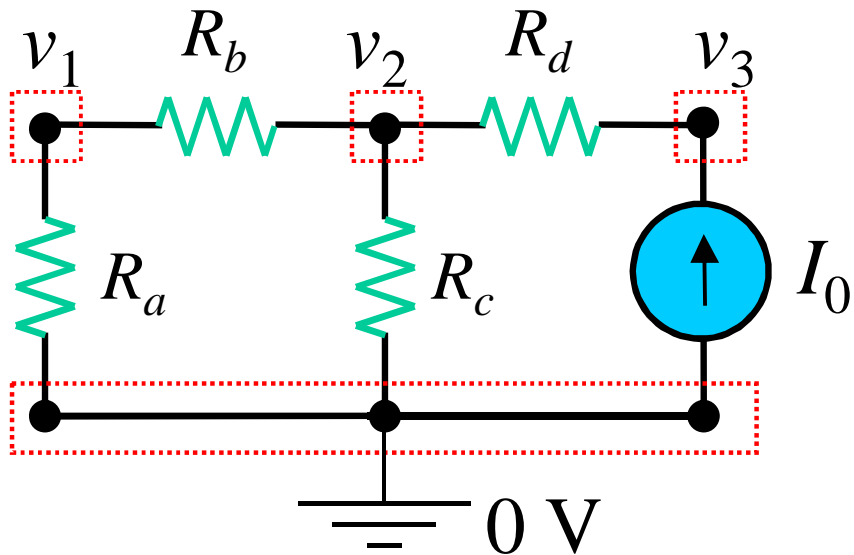
# Analisi nodale

Esempio:



# Analisi nodale

Esempio:

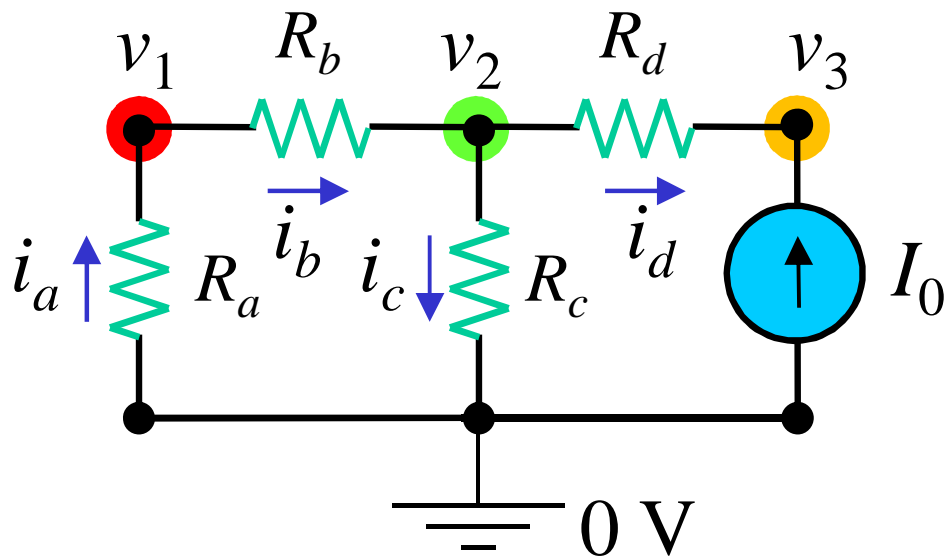


1. Scelta del nodo di riferimento e definizione delle tensioni incognite

N.B.: 4 nodi  $\Rightarrow$  3 incognite

# Analisi nodale

Esempio:



## 2. Applicazione della KCL

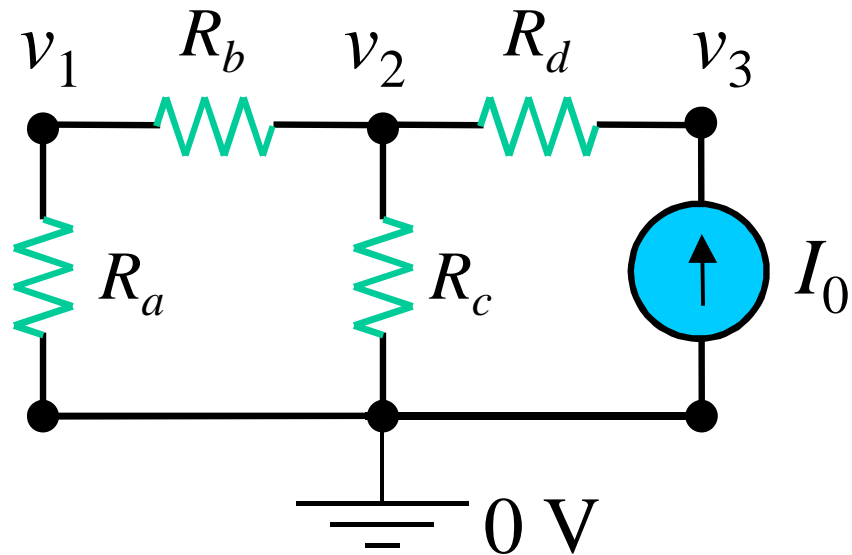
$$\begin{cases} \bullet & -i_a + i_b = 0 \\ \bullet & -i_b + i_c + i_d = 0 \\ \bullet & -i_d - I_0 = 0 \end{cases}$$

... e della legge di Ohm

$$\begin{cases} \bullet & \frac{v_1 - 0}{R_a} + \frac{v_1 - v_2}{R_b} = 0 \\ \bullet & \frac{v_2 - v_1}{R_b} + \frac{v_2 - 0}{R_c} + \frac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\ \bullet & \frac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0 \end{cases}$$

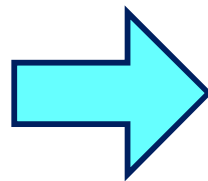
# Analisi nodale

Esempio:



3. Soluzione sistema

$$\begin{cases} \frac{v_1 - 0}{R_a} + \frac{v_1 - v_2}{R_b} = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R_b} + \frac{v_2 - 0}{R_c} + \frac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\ \frac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0 \end{cases}$$



$$v_1, v_2, v_3$$



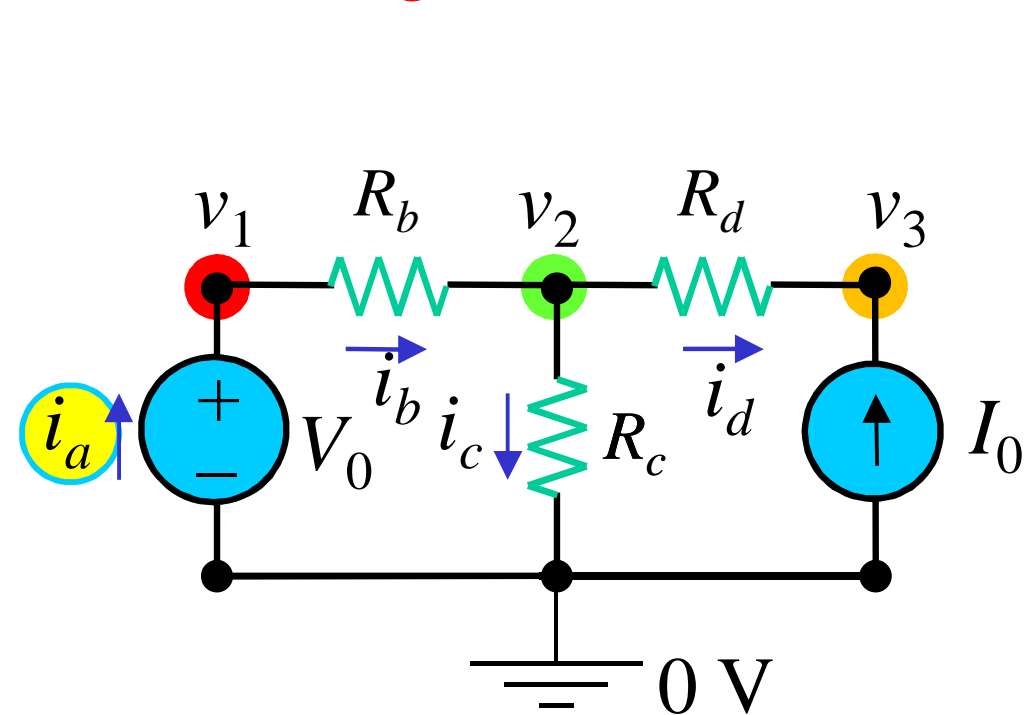
# Analisi nodale

## PROBLEMA!

Se su un ramo è presente un **generatore di tensione** la corrente che lo attraversa non può essere espressa in funzione delle tensioni nodali

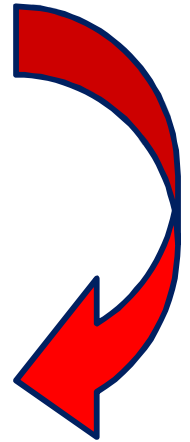
# Analisi nodale

## Caso 1: generatore di tensione collegato a massa



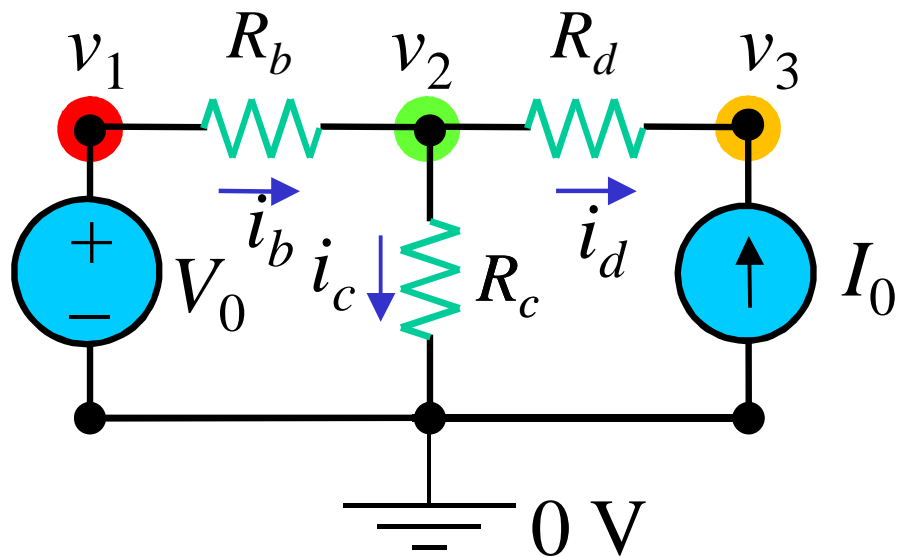
●  ~~$-i_a + i_b = 0$~~   
●  $-i_b + i_c + i_d = 0$   
●  $-i_d - I_0 = 0$

●  ~~$\frac{v_1 - v_2}{R_b} = 0$~~   
●  $\frac{v_2 - v_1}{R_b} + \frac{v_2 - 0}{R_c} + \frac{v_2 - v_3}{R_d} = 0$   
●  $\frac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0$



# Analisi nodale

## Caso 1: generatore di tensione collegato a massa

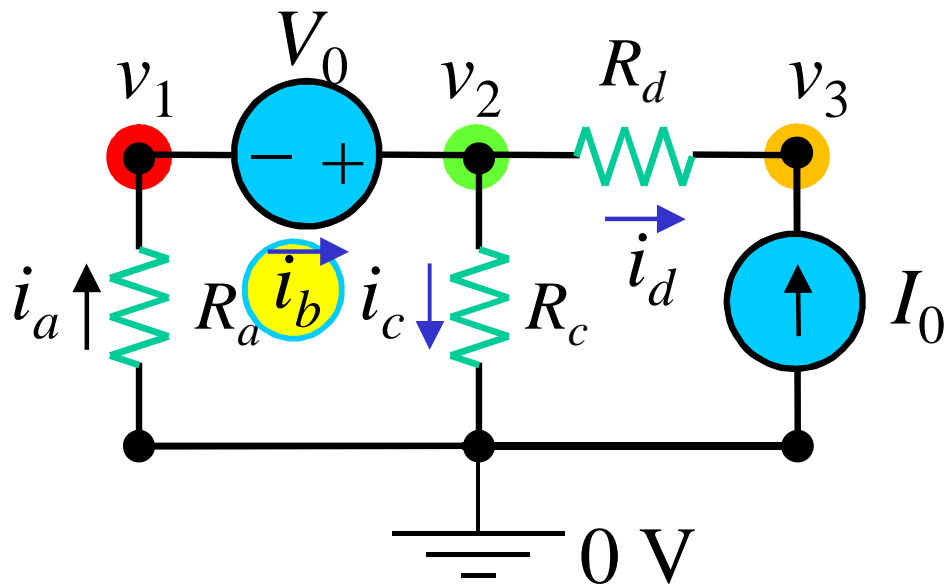


Il problema si semplifica:  
un'incognita è già nota

●	}	$v_1 = V_0$
●		$-i_b + i_c + i_d = 0$
●		$-i_d - I_0 = 0$
●	}	$v_1 = V_0$
●		$\frac{v_2 - v_1}{R_b} + \frac{v_2 - 0}{R_c} + \frac{v_2 - v_3}{R_d} = 0$
●		$\frac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0$

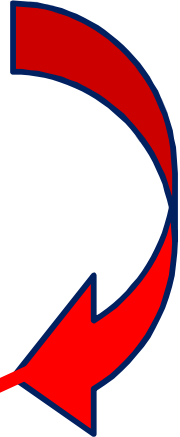
# Analisi nodale

## Caso 2: generatore di tensione non collegato a massa



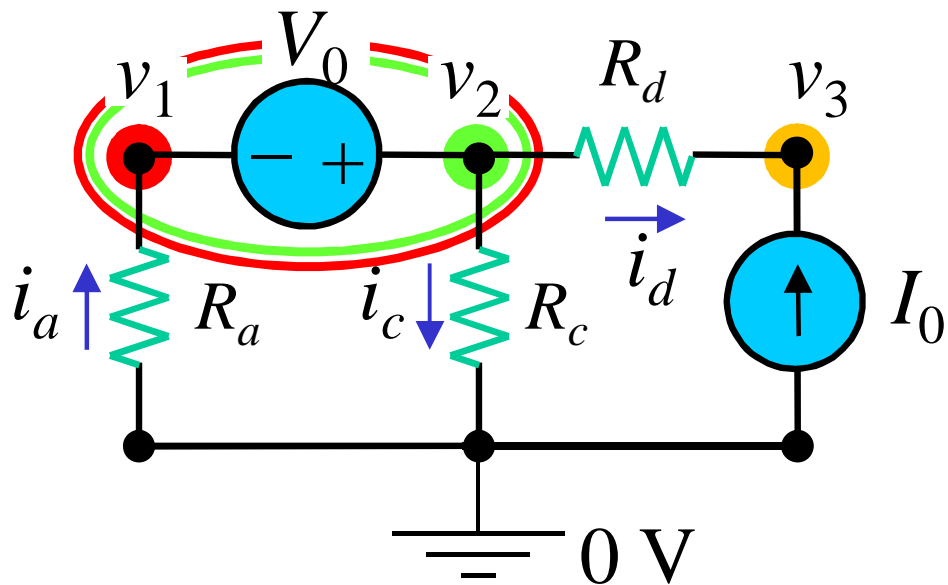
●  ~~$-i_a + i_b = 0$~~   
●  ~~$-i_b + i_c + i_d = 0$~~   
●  ~~$-i_d - I_0 = 0$~~

●  ~~$\frac{v_1 - 0}{R_a} + \text{?} = 0$~~   
●  ~~$\text{?} + \frac{v_2 - 0}{R_c} + \frac{v_2 - v_3}{R_d} = 0$~~   
●  ~~$\frac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0$~~



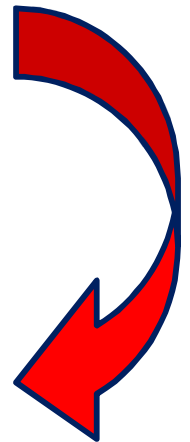
# Analisi nodale

## Caso 2: generatore di tensione non collegato a massa



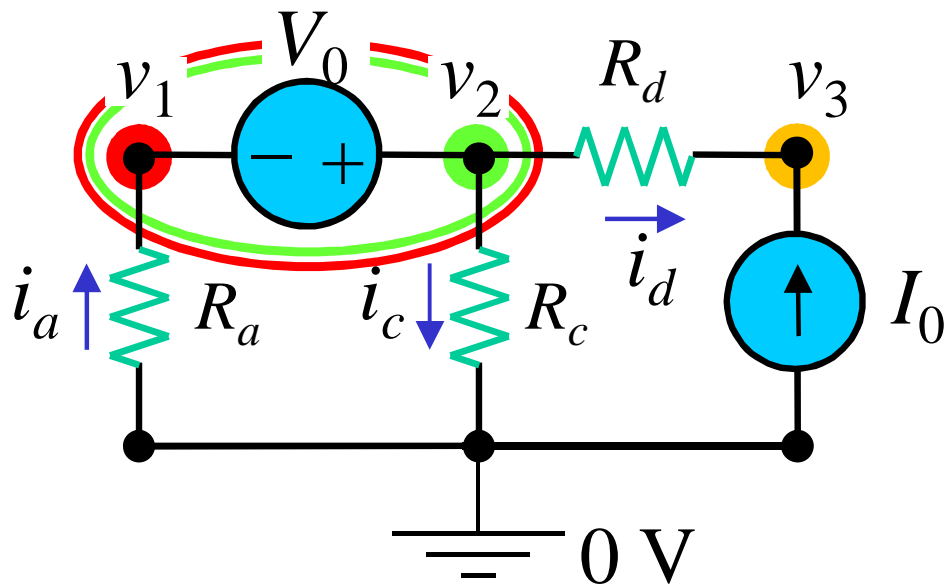
**Supernodo**  
 si applica la KCL  
 generalizzata

$$\begin{cases}
 \text{●} & -i_a + i_c + i_d = 0 \\
 \text{●} & -i_d - I_0 = 0 \\
 \\
 \text{●} & \frac{v_1 - 0}{R_a} + \frac{v_2 - 0}{R_c} + \frac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\
 \text{●} & \frac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0
 \end{cases}$$



# Analisi nodale

## Caso 2: generatore di tensione non collegato a massa



Supernodo

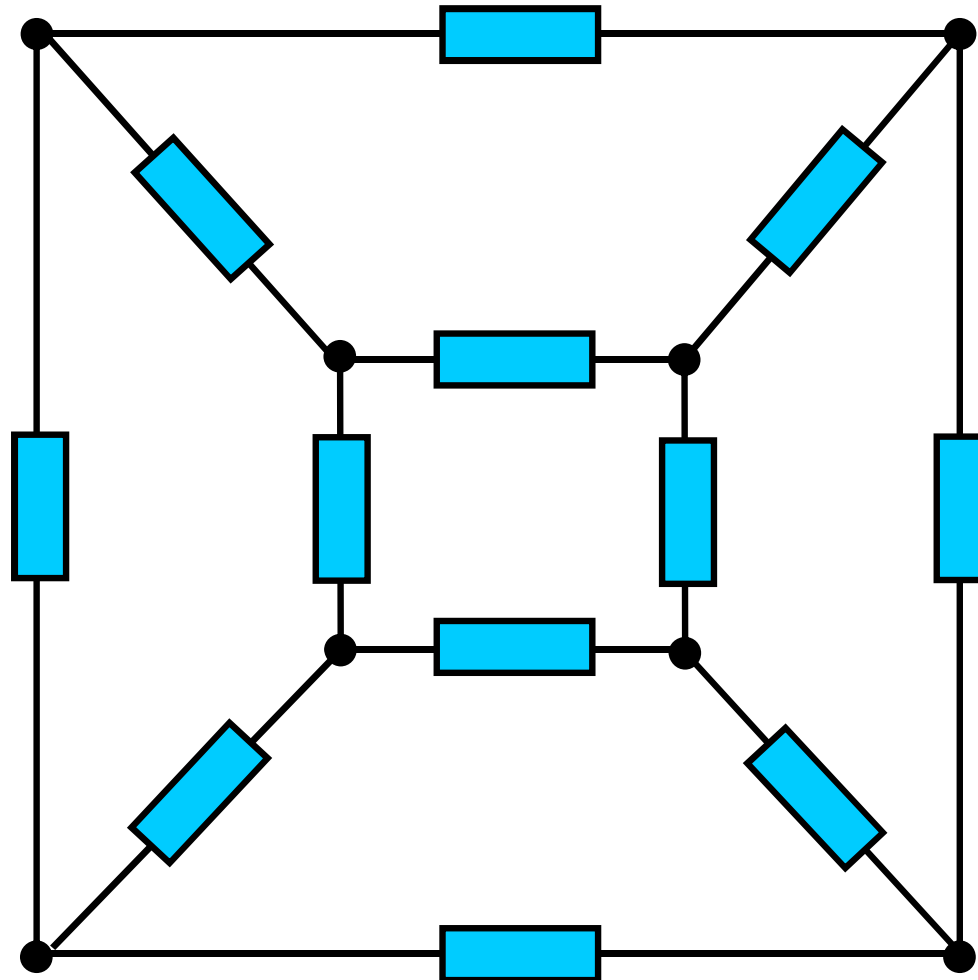
si applica la KCL  
generalizzata + la KVL

●	{	$v_2 - v_1 = V_0$
●		$-i_a + i_c + i_d = 0$
●		$-i_d - I_0 = 0$
●	{	$v_2 - v_1 = V_0$
●		$\frac{v_1 - 0}{R_a} + \frac{v_2 - 0}{R_c} + \frac{v_2 - v_3}{R_d} = 0$
●		$\frac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0$
●		

# Analisi agli anelli

Si applica soltanto ai **circuiti planari**,  
cioè ai circuiti che possono essere  
disegnati su un piano senza che vi  
siano rami che si incrociano.

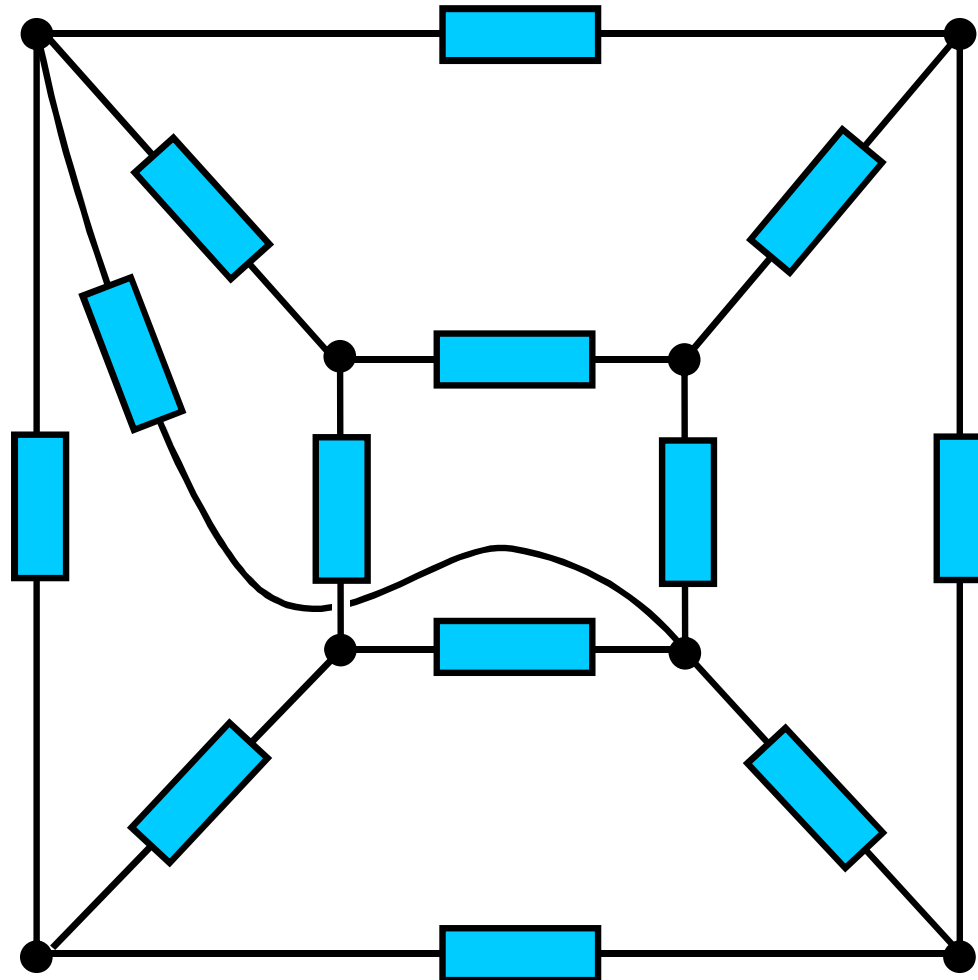
# Analisi agli anelli



Circuito planare



# Analisi agli anelli



Circuito non planare

# Analisi agli anelli

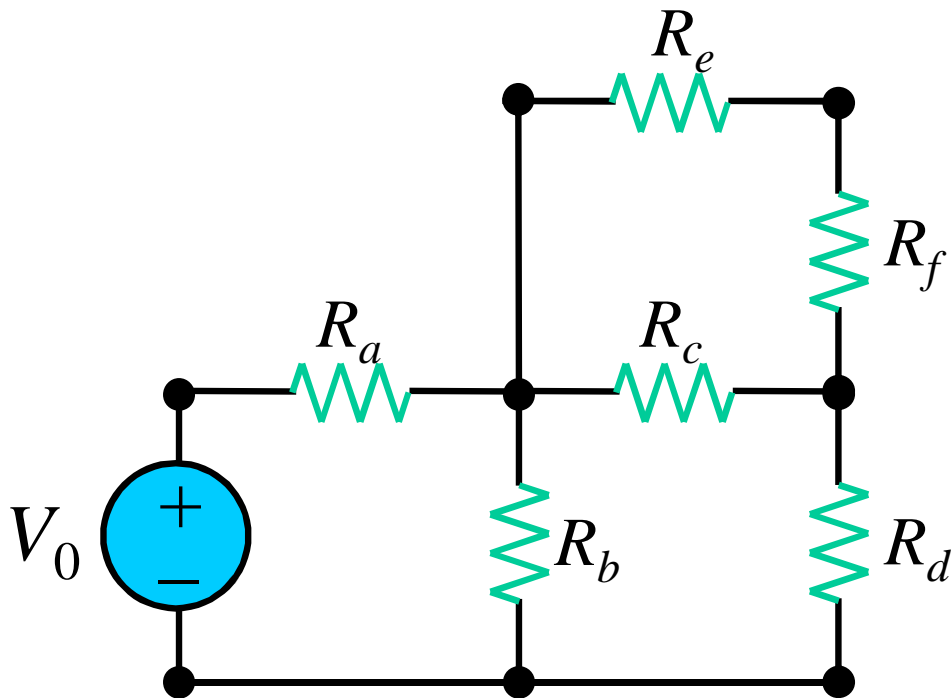
Le incognite sono le correnti di maglia

Dato un circuito con  $n$  maglie il metodo si articola in tre passi:

1. Si assegnano le correnti di anello  $i_1, i_2, \dots, i_n$  agli  $n$  anelli;
2. si applica la KVL a ciascuno degli  $n$  anelli, usando la legge di Ohm per esprimere le tensioni in termini di correnti di anello;
3. si risolvono le equazioni così ottenute, ricavando le correnti di anello  $i_1, i_2, \dots, i_n$ .

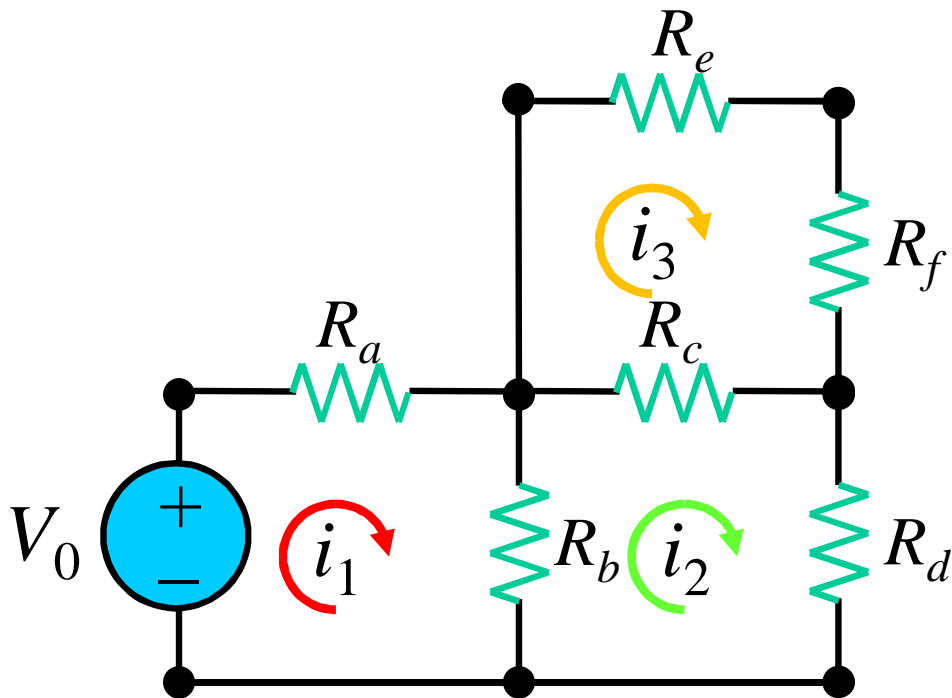
# Analisi agli anelli

Esempio:



# Analisi agli anelli

Esempio:

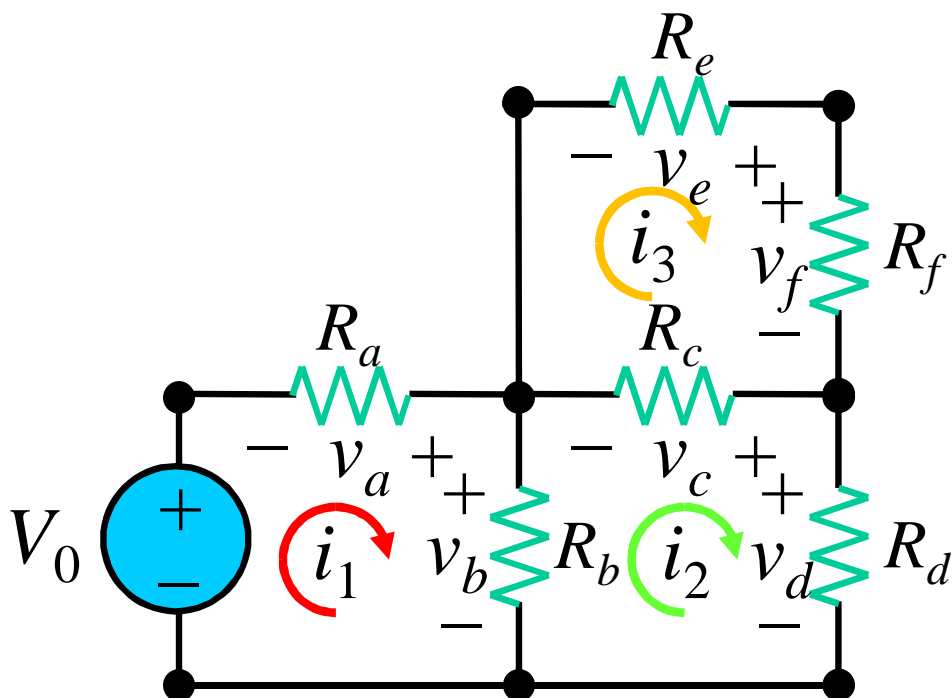


1. Definizione delle correnti d'anello incognite

N.B.: 3 anelli  $\Rightarrow$  3 incognite

# Analisi agli anelli

Esempio:



## 2. Applicazione della KVL

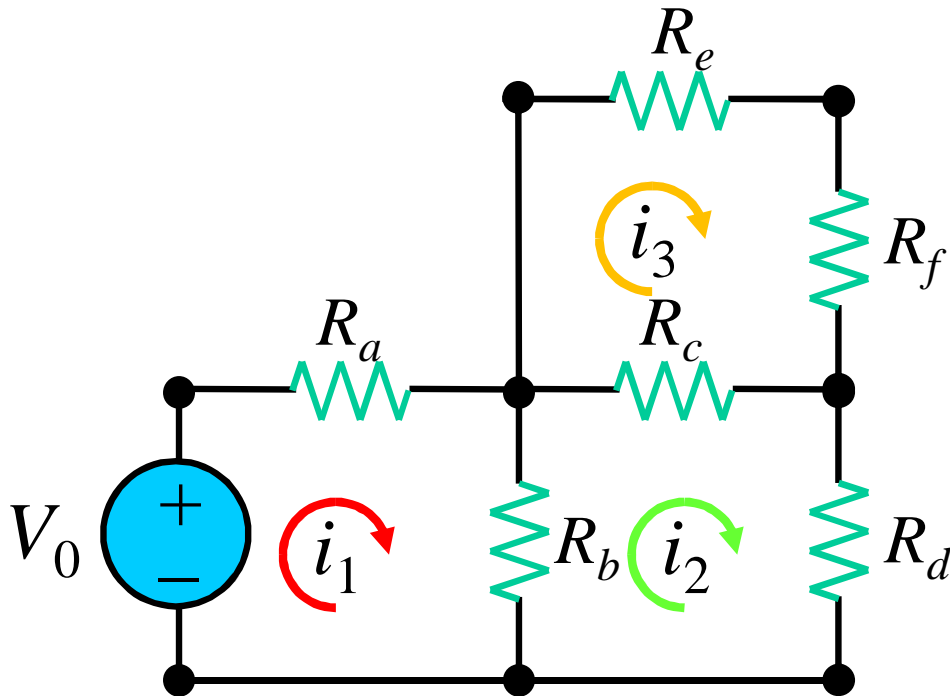
$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 - v_a + v_b = 0 \\
 \bullet & -v_b - v_c + v_d = 0 \\
 \bullet & +v_c - v_e + v_f = 0
 \end{cases}$$

... e della legge di Ohm

$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\
 \bullet & R_b (i_2 - i_1) + R_c (i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\
 \bullet & R_c (i_3 - i_2) + R_e i_3 + R_f i_3 = 0
 \end{cases}$$

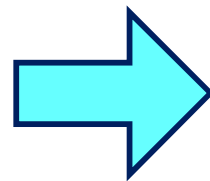
# Analisi agli anelli

Esempio:



3. Soluzione sistema

$$\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\ R_b (i_2 - i_1) + R_c (i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\ R_c (i_3 - i_2) + R_e i_3 + R_f i_3 = 0 \end{cases}$$



$$i_1, i_2, i_3$$

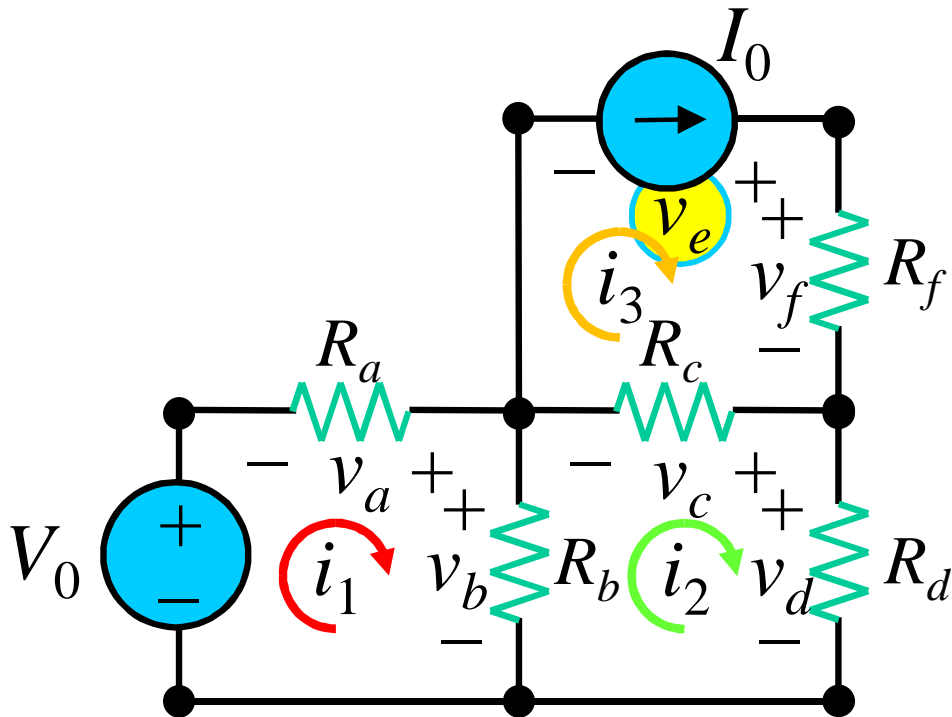
# Analisi agli anelli

## PROBLEMA!

Se su un ramo è presente un **generatore di corrente** la tensione ai suoi capi non può essere espressa in funzione delle correnti d'anello

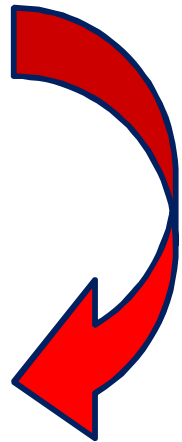
# Analisi agli anelli

## Caso 1: generatore di corrente appartenente ad un anello



$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 - v_a + v_b = 0 \\
 \bullet & -v_b - v_c + v_d = 0 \\
 \bullet & \cancel{+v_c - v_e + v_f = 0}
 \end{cases}$$

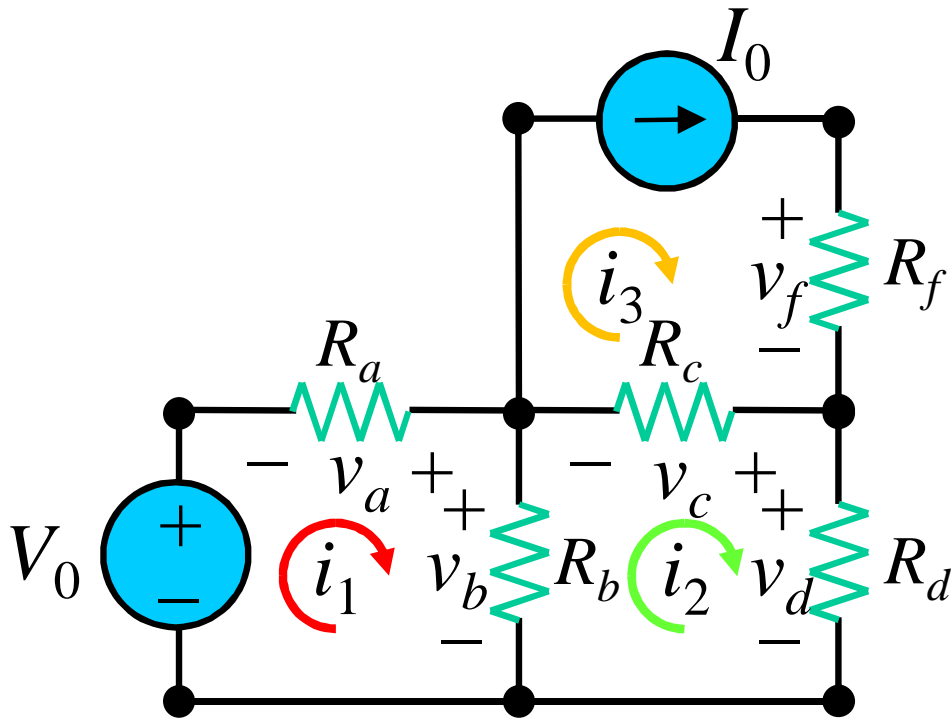
$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\
 \bullet & R_b (i_2 - i_1) + R_c (i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\
 \bullet & \cancel{R_c (i_3 - i_2) + R_f i_3 = 0}
 \end{cases}$$





# Analisi agli anelli

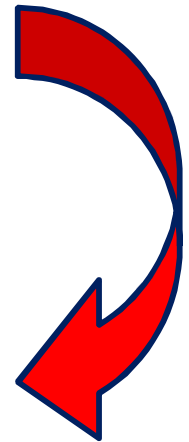
## Caso 1: generatore di corrente appartenente ad un anello



Il problema si semplifica:  
un'incognita è già nota

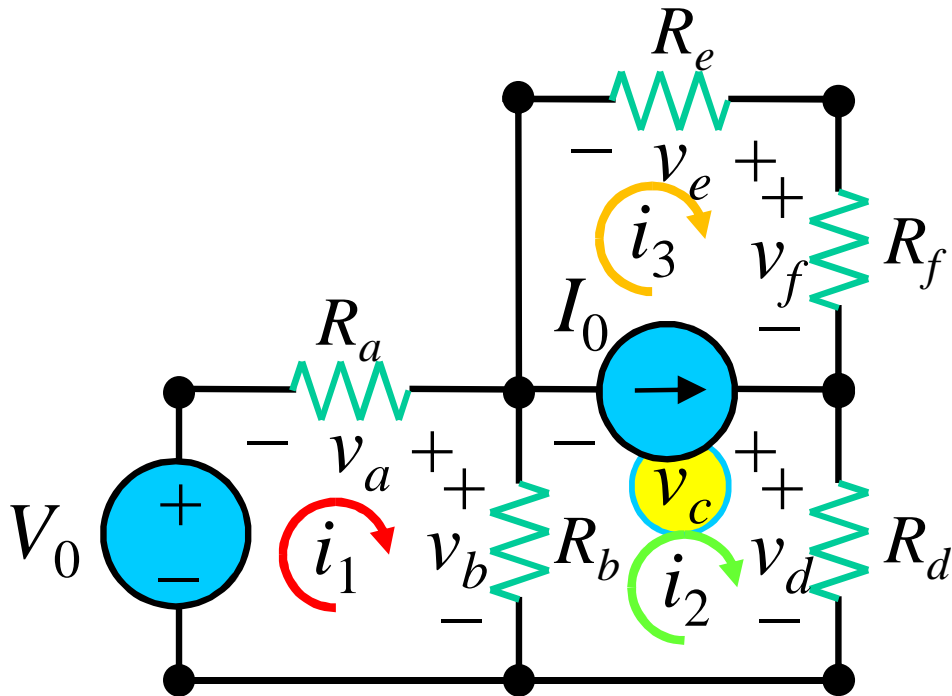
$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 - v_a + v_b = 0 \\
 \bullet & -v_b - v_c + v_d = 0 \\
 \bullet & i_3 = I_0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\
 \bullet & R_b (i_2 - i_1) + R_c (i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\
 \bullet & i_3 = I_0
 \end{cases}$$



# Analisi agli anelli

## Caso 2: generatore di corrente appartenente a due anelli



●  $\begin{cases} -V_0 - v_a + v_b = 0 \\ -v_b - v_c + v_d = 0 \\ +v_c - v_e + v_f = 0 \end{cases}$

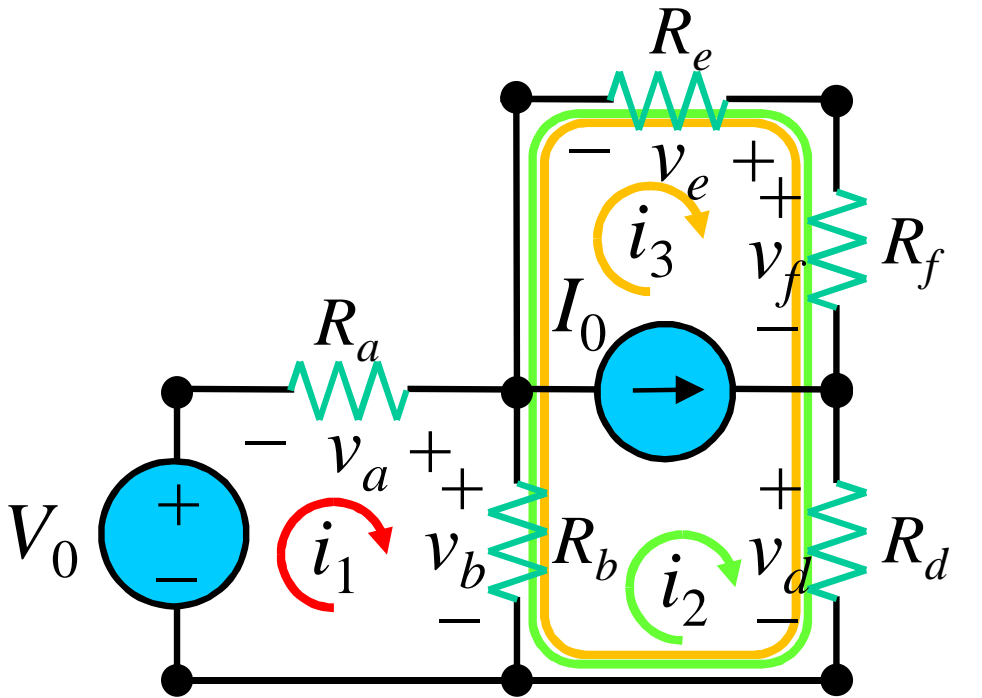
●  $\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\ R_b (i_2 - i_1) + \text{?} + R_d i_2 = 0 \\ \text{?} + R_e i_3 + R_f i_3 = 0 \end{cases}$

●  $\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\ R_b (i_2 - i_1) + \text{?} + R_d i_2 = 0 \\ \text{?} + R_e i_3 + R_f i_3 = 0 \end{cases}$

↻

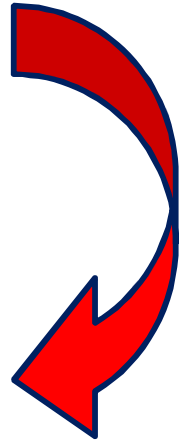
# Analisi agli anelli

## Caso 2: generatore di corrente appartenente a due anelli



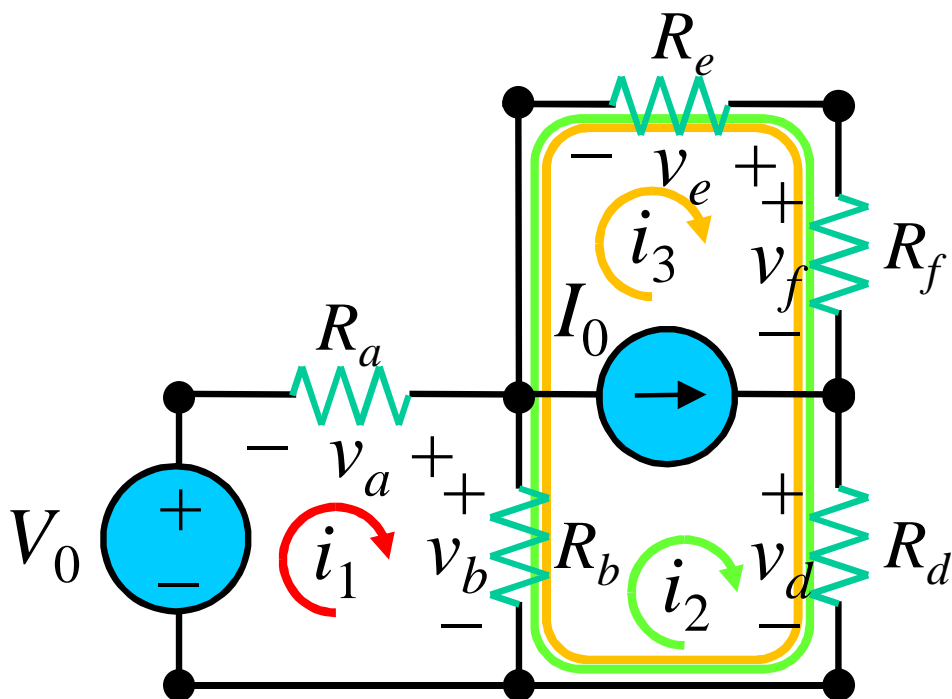
**Superanello**  
si applica la KVL

$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 - v_a + v_b = 0 \\
 \odot & -v_b - v_e + v_f + v_d = 0 \\
 \\
 \bullet & -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\
 \odot & R_b (i_2 - i_1) + R_e i_3 + R_f i_3 + R_d i_2 = 0
 \end{cases}$$



# Analisi agli anelli

## Caso 2: generatore di corrente appartenente a due anelli



**Superanello**  
 si applica la KVL  
 + la KCL

$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 - v_a + v_b = 0 \\
 \odot & -v_b - v_c + v_f + v_d = 0 \\
 \odot & i_2 - i_3 = I_0
 \end{cases}$$
  

$$\begin{cases}
 \bullet & -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\
 \odot & R_b (i_2 - i_1) + R_c i_3 + R_f i_3 + R_d i_2 = 0 \\
 \odot & i_2 - i_3 = I_0
 \end{cases}$$

