Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

Campi Elettromagnetici e Circuiti I

Circuiti del secondo ordine

Sommario

- Definizione
- Circuito RLC serie autonomo
- Tre casi: sovrasmorzato, a smorzamento critico, sottosmorzato
- Circuito RLC parallelo autonomo
- Risposta al gradino di un circuito RLC serie
- Risposta al gradino di un circuito RLC parallelo
- Risposta completa di un circuito del secondo ordine

Circuiti del secondo ordine

Un circuito del secondo ordine è caratterizzato da un'equazione differenziale del secondo ordine

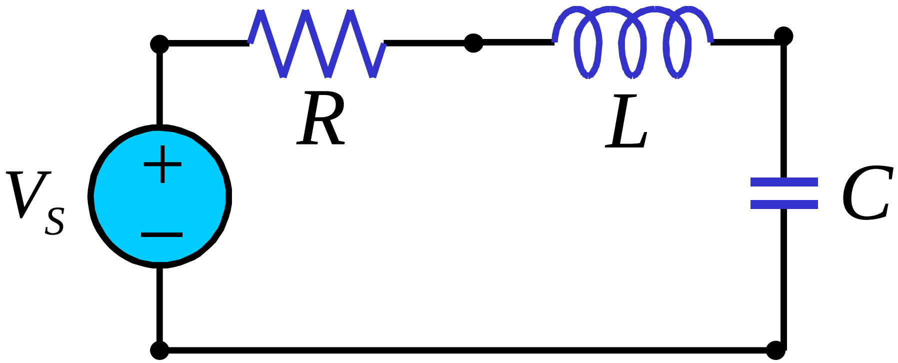
I circuiti del secondo ordine contengono una o più resistenze e due elementi dinamici (L e/o C)

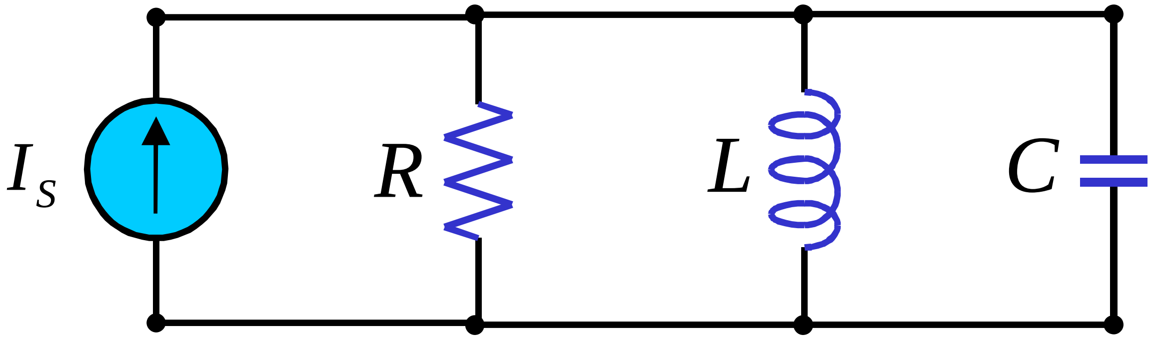
Circuiti del secondo ordine

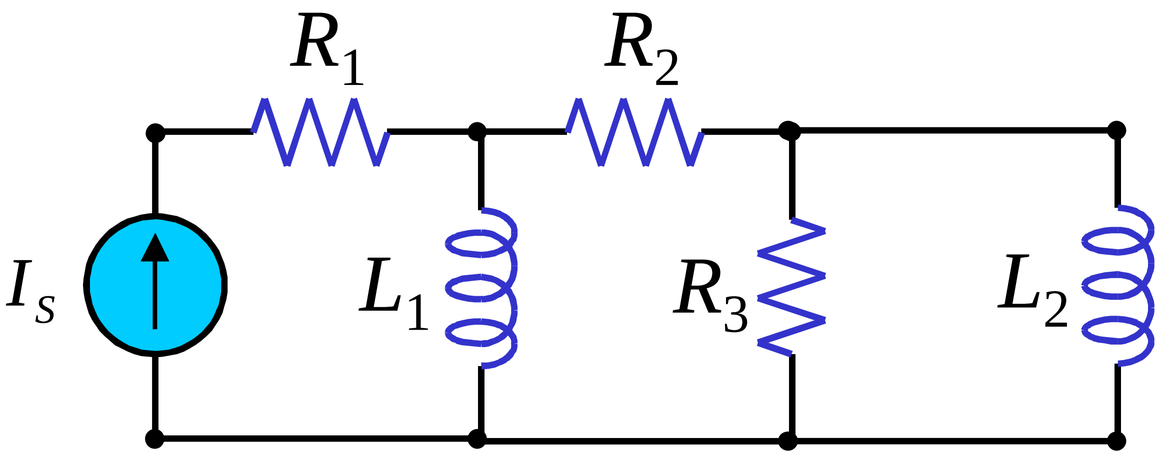
L'eccitazione può essere di due tipi

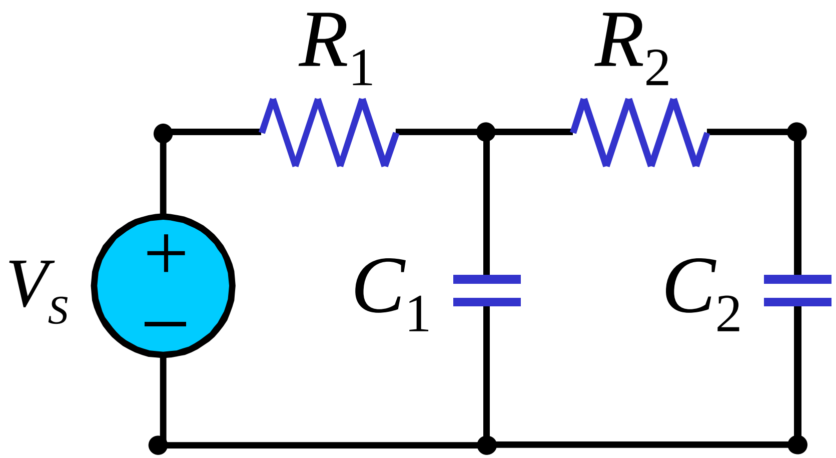
- autonoma: il circuito ***non comprende generatori indipendenti*** ed evolve nel tempo a partire dalle condizioni iniziali sugli elementi dinamici
- forzata: il circuito ***comprende generatori indipendenti*** che ne determinano il comportamento nel tempo

Circuiti del secondo ordine: esempi

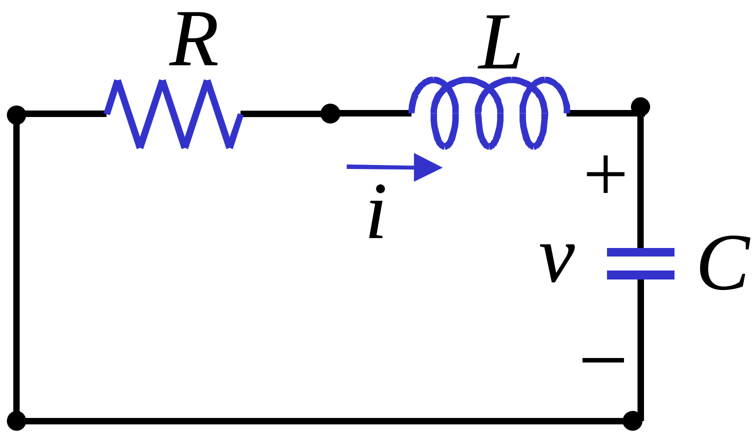








Circuito *RLC* serie autonomo



Ipotesi:

$$i(0) = I_0$$

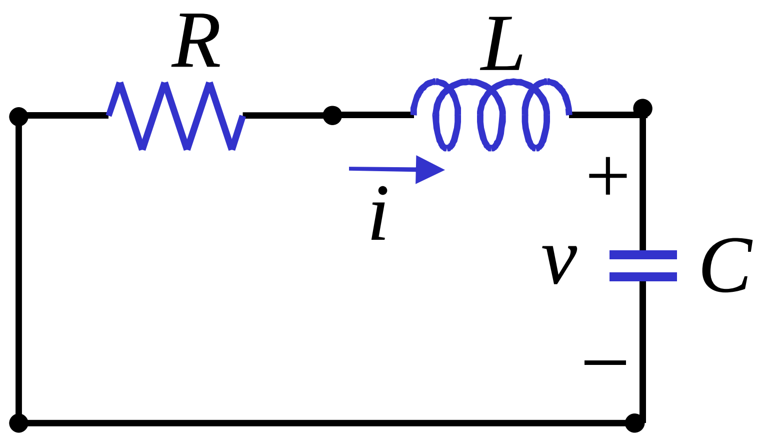
$$v(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i \cdot dt = V_0$$

$$i(t) = ?$$

$$v(t) = ? \qquad (\text{per } t > 0)$$

Circuito *RLC* serie autonomo

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i \cdot dt = 0$$



Derivando rispetto al tempo e riordinando si ha:

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0}$$

Condizioni iniziali:

$$R \cdot i(0) + L \cdot \frac{di(0)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i \cdot dt}_{V_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} & i(0) = I_0 \\ & \frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L}\left(R \cdot I_0 + V_0\right) \end{aligned}}$$

Circuito *RLC* serie autonomo

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Ponendo $\alpha = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ si ha:

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0}$$

Soluzione equazione di secondo ordine

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0}$$

Verifichiamo se esiste una soluzione del tipo $\boxed{i = A\mathrm{e}^{st}}$

Sostituendo si ottiene:

$$As^2\mathrm{e}^{st} + 2\alpha \cdot As\mathrm{e}^{st} + \omega_0^2 \cdot A\mathrm{e}^{st} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\mathrm{e}^{st}\left(s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2\right) = 0$$

$$A\mathrm{e}^{st} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2 = 0}$$

Soluzione equazione di secondo ordine

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = Ae^{st}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2 = 0}$$

Le radici sono:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad\qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

e quindi si hanno due soluzioni possibili: $i_1 = A_1 e^{s_1 t}$ e $i_2 = A_2 e^{s_2 t}$

Poiché l'equazione differenziale è lineare, qualunque combinazione di i_1 e i_2 è anch'essa una soluzione:

$$\boxed{i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

Soluzione equazione di secondo ordine

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

$$\boxed{s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

Tre diversi casi:

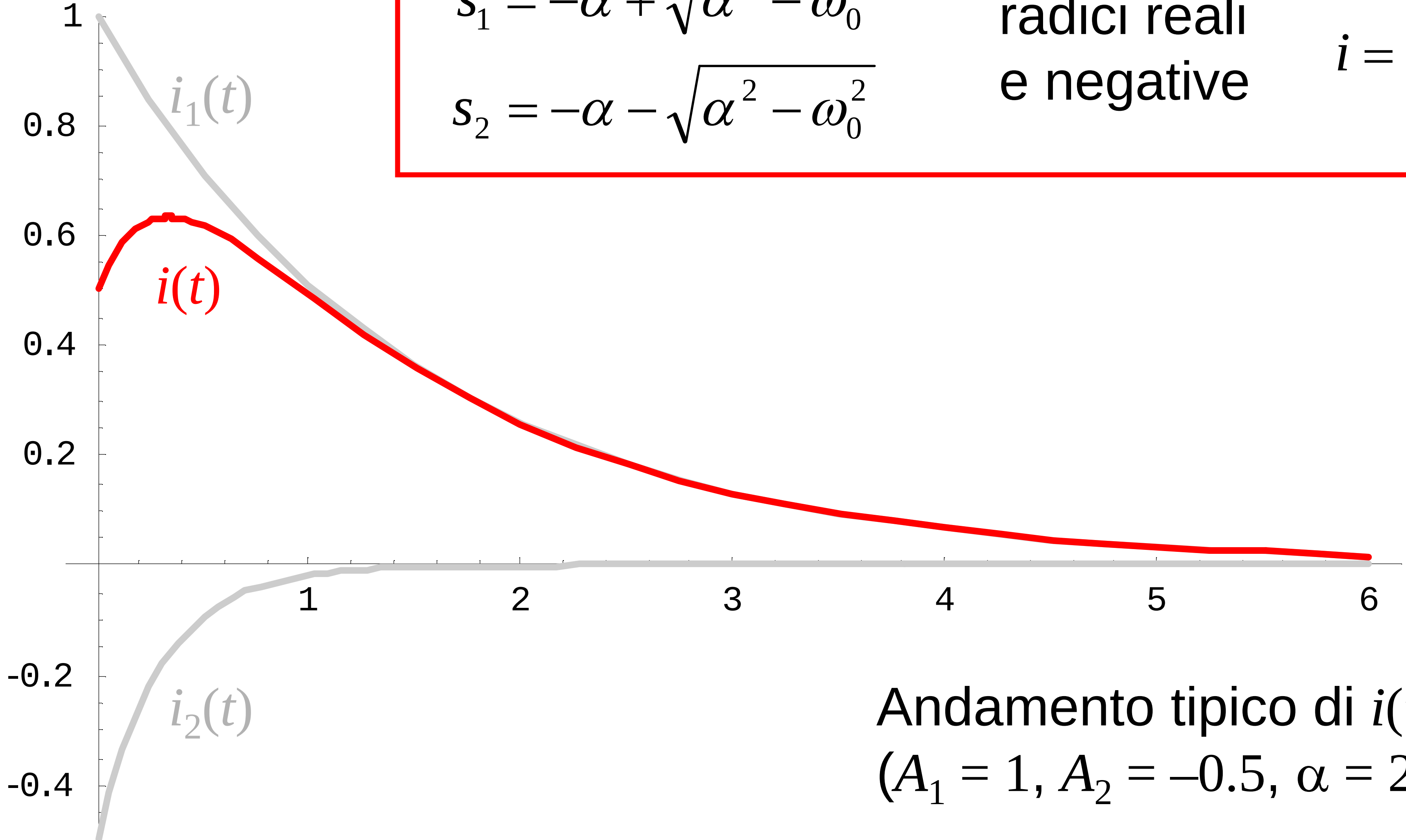
1. se $\alpha > \omega_0$ si ha il caso sovrasmorzato
2. se $\alpha = \omega_0$ si ha il caso di smorzamento critico
3. se $\alpha < \omega_0$ si ha il caso sottosmorzato

Caso sovrasmorzato ($\alpha > \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

radici reali e negative

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



Andamento tipico di $i(t)$

($A_1 = 1$, $A_2 = -0.5$, $\alpha = 2$, $\omega_0 = 1.5$)

Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$$

radici reali negative e coincidenti

$$i = A_1 \mathrm{e}^{-\alpha t} + A_2 \mathrm{e}^{-\alpha t} = A_3 \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

Non possono essere soddisfatte contemporaneamente le due condizioni iniziali con la scelta della sola costante A_3

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \alpha^2 \cdot i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i\right) + \alpha \cdot \left(\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i\right) = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i = f \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dt} + \alpha \cdot f = 0$$

Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)

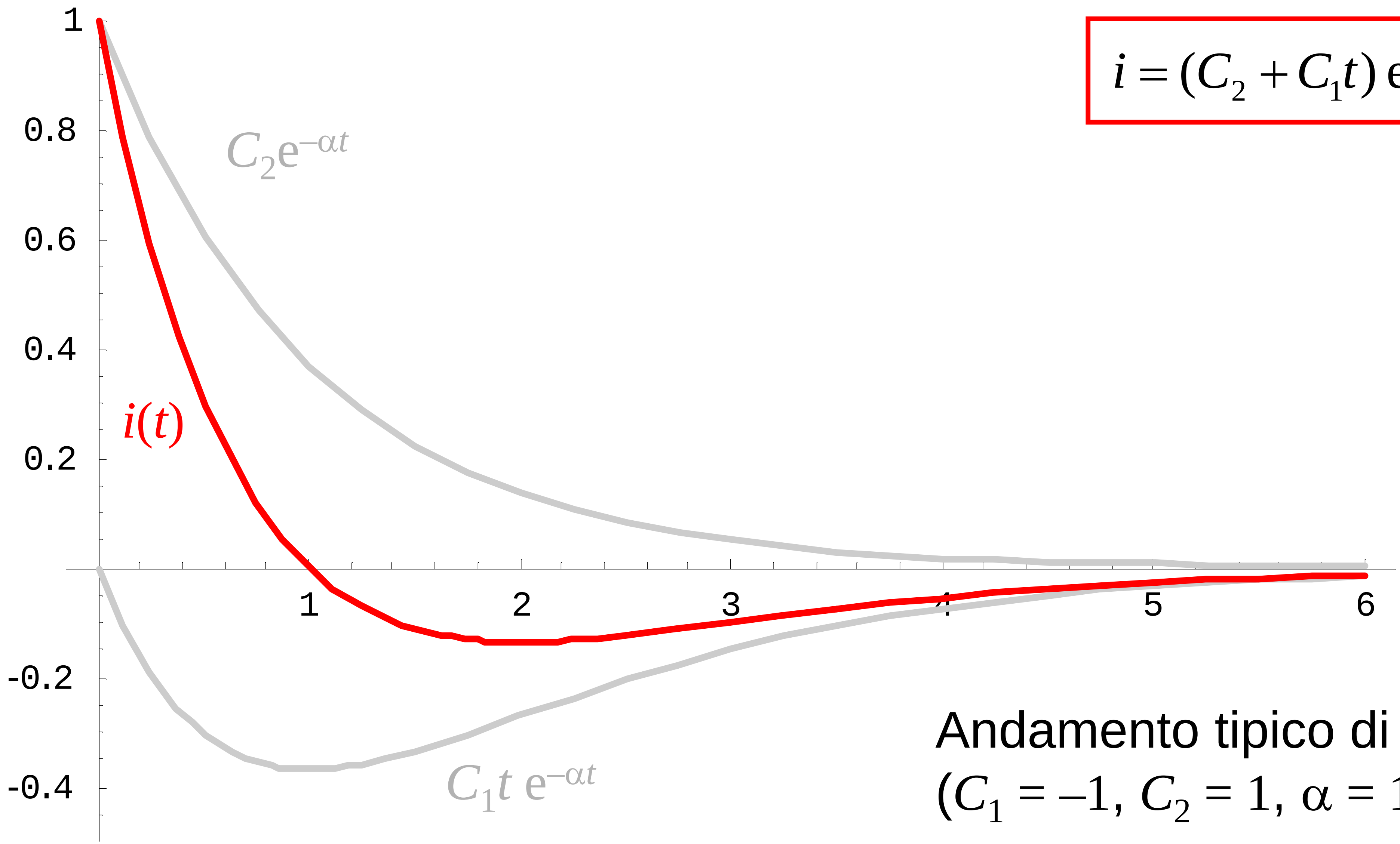
$$\frac{df}{dt} + \alpha \cdot f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = C_1 e^{-\alpha t}$$

$$\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i = f \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha \cdot i = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t} i\right) = C_1$$

La soluzione è $e^{\alpha t} i = C_1 t + C_2$ da cui:

$$\boxed{i = (C_2 + C_1 t)\, e^{-\alpha t}}$$

Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)



$$\boxed{i = (C_2 + C_1 t)\, e^{-\alpha t}}$$

Andamento tipico di $i(t)$
($C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $\alpha = 1$)

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + j\omega_d$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_d$$

radici complesse e coniugate

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

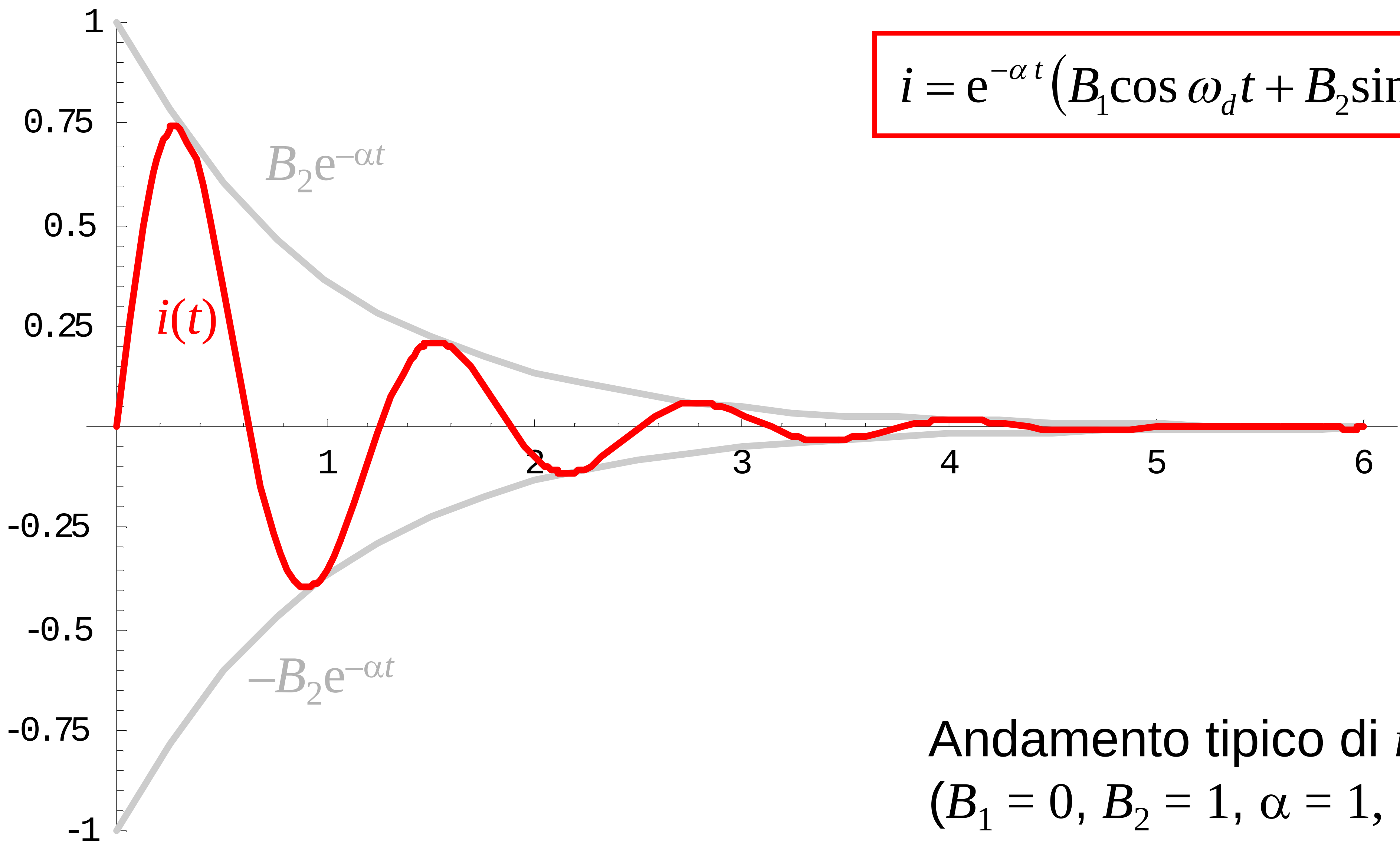
$$i = A_1 e^{-\alpha t + j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t - j\omega_d t} = e^{-\alpha t}\left(A_1 e^{+j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}\right)$$

Ricordando che $e^{+j\omega_d t} = \cos \omega_d t + j \sin \omega_d t$ e $e^{-j\omega_d t} = \cos \omega_d t - j \sin \omega_d t$ si ha:

$$i = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos \omega_d t + jA_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t - jA_2 \sin \omega_d t\right)$$
$$= e^{-\alpha t}\left((A_1 + A_2)\cos \omega_d t + j(A_1 - A_2)\sin \omega_d t\right)$$

$$\boxed{i = e^{-\alpha t}\left(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t\right)}$$

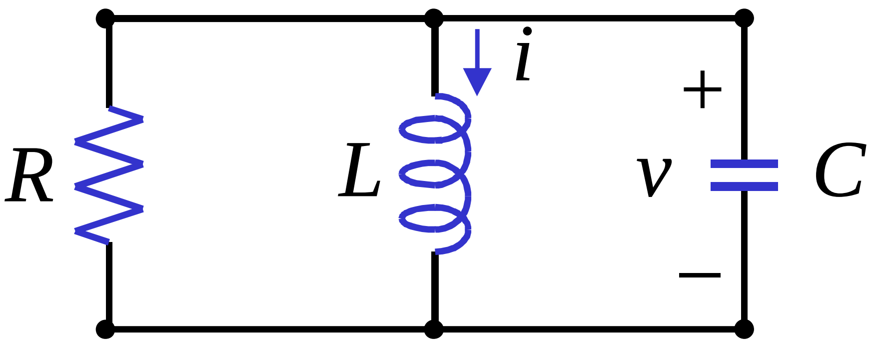
Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)



$$i = e^{-\alpha t}\left(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t\right)$$

Andamento tipico di $i(t)$
($B_1 = 0$, $B_2 = 1$, $\alpha = 1$, $\omega_d = 5$)

Circuito *RLC* parallelo autonomo



Ipotesi:

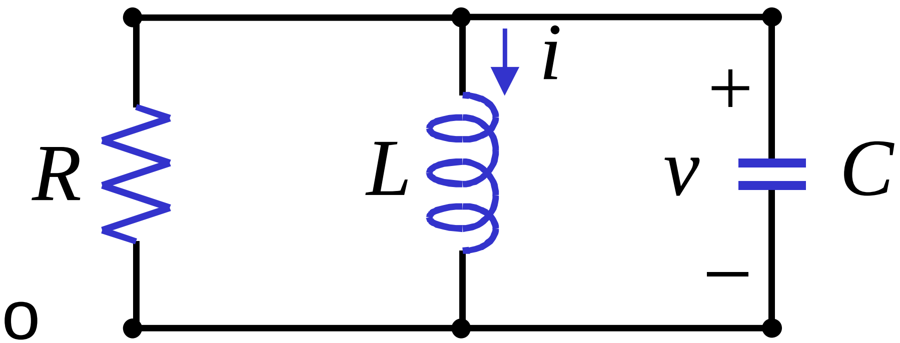
$$v(0) = V_0$$

$$i(0) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v \cdot dt = I_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= ? \\ i(t) &= ? \end{aligned} \qquad (\text{per } t > 0)}$$

Circuito *RLC* parallelo autonomo

$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\cdot dt + C\cdot\frac{dv}{dt}=0$$



Derivando rispetto al tempo e riordinando si ha:

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{v}{LC}=0}$$

Condizioni iniziali:

$$\frac{v(0)}{R}+\underbrace{\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v\cdot dt}_{I_0} + C\cdot\frac{dv(0)}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{aligned} & v(0)=V_0 \\ & \frac{dv(0)}{dt}=-\frac{V_0+R\cdot I_0}{RC}\end{aligned}}$$

Circuito *RLC* parallelo autonomo

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{v}{LC}=0$$

Ponendo $\alpha=\dfrac{1}{2RC}$, $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ si ha:

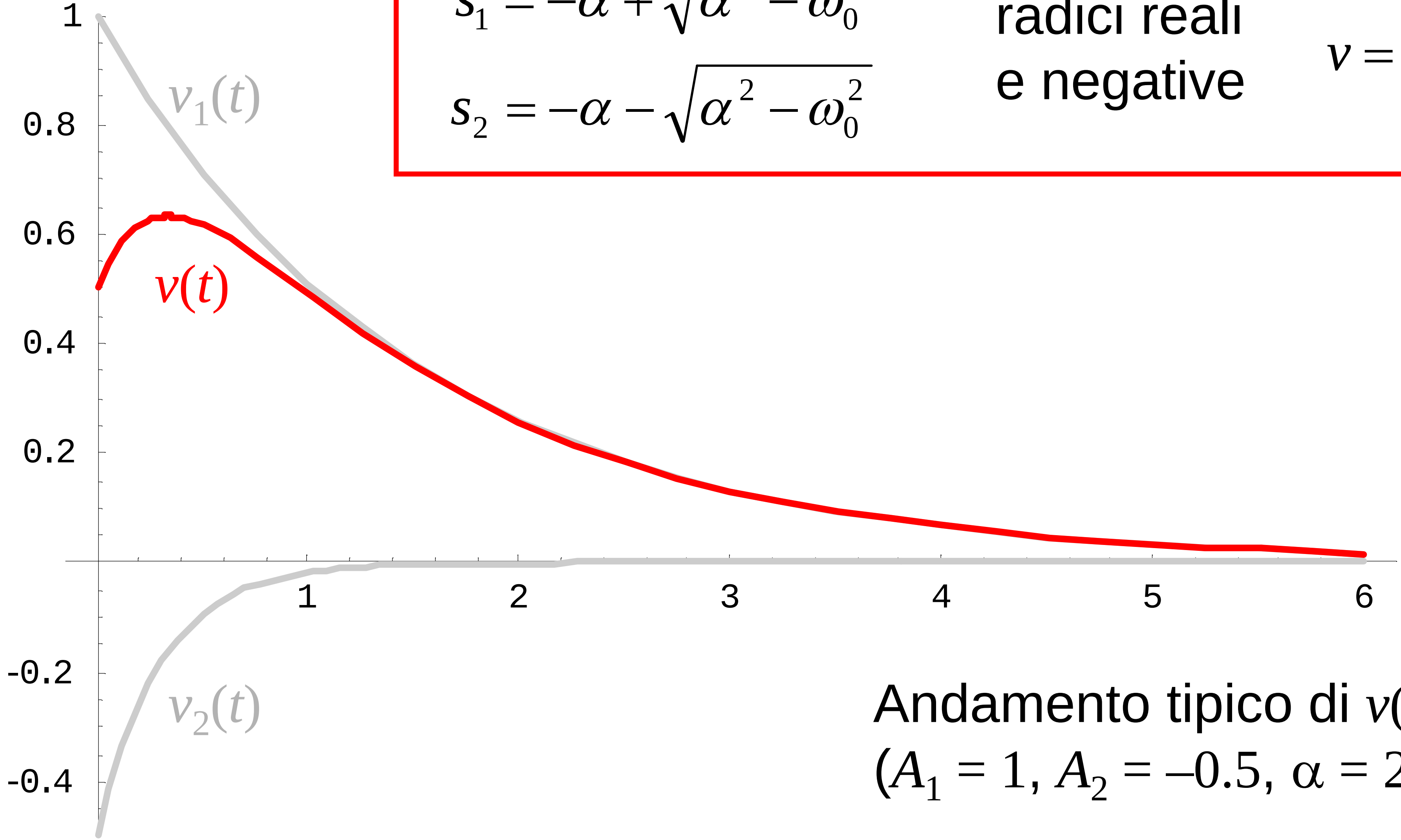
$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dv}{dt}+\omega_0^2\cdot v=0}$$

Caso sovrasmorzato ($\alpha > \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

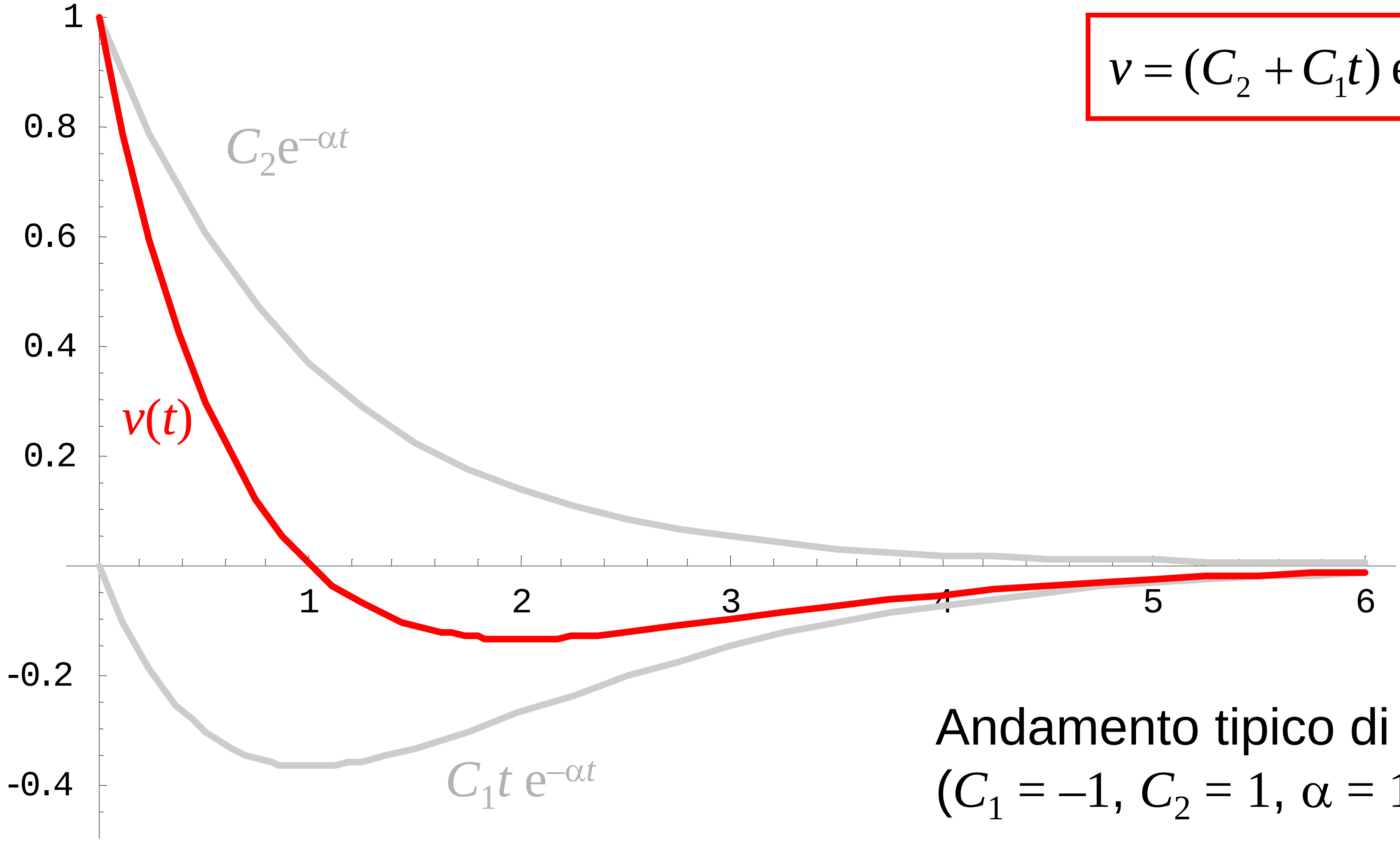
radici reali
e negative

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



Andamento tipico di $v(t)$
($A_1 = 1$, $A_2 = -0.5$, $\alpha = 2$, $\omega_0 = 1.5$)

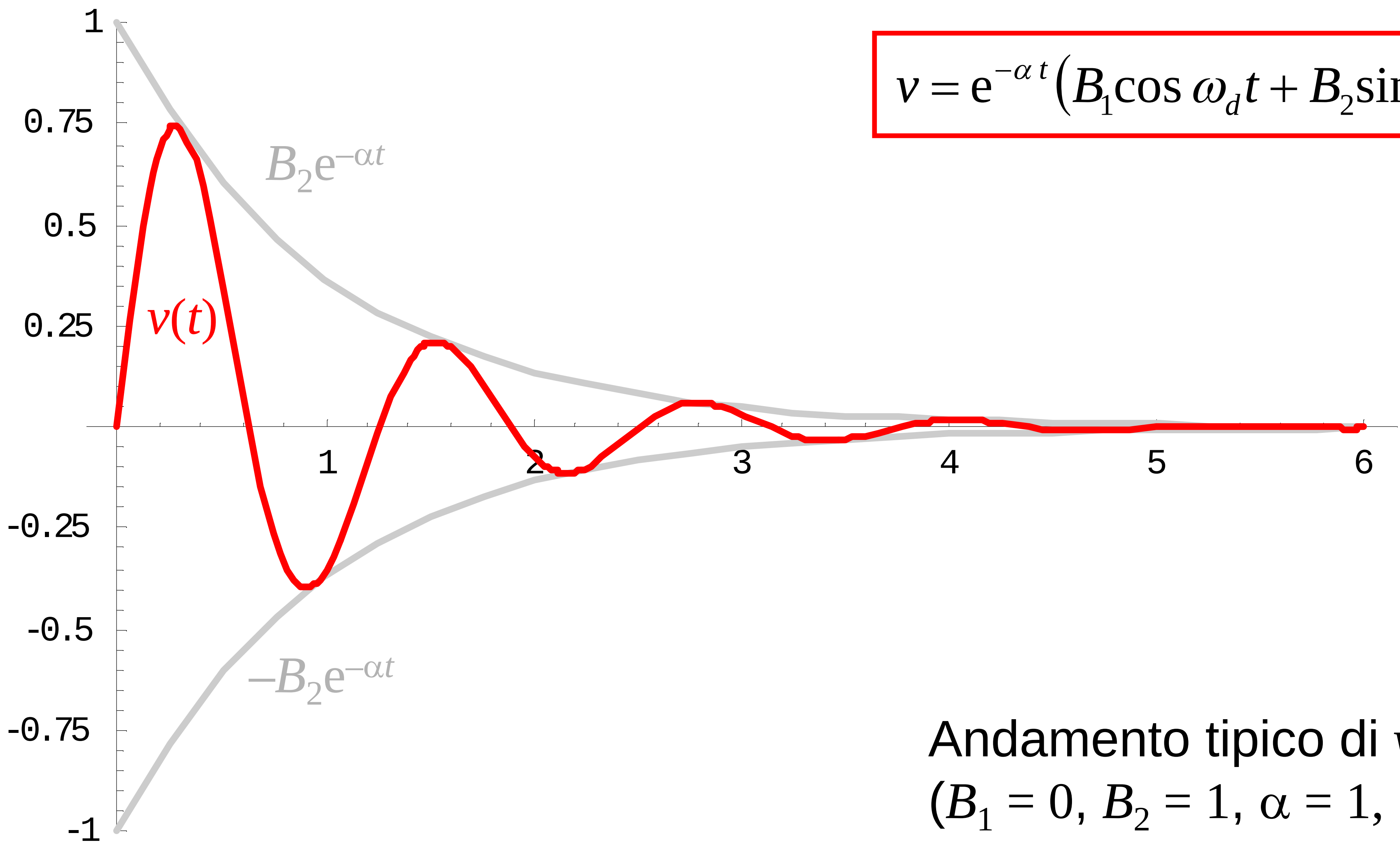
Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)



$$\boxed{v = (C_2 + C_1 t)\, e^{-\alpha t}}$$

Andamento tipico di $v(t)$
($C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $\alpha = 1$)

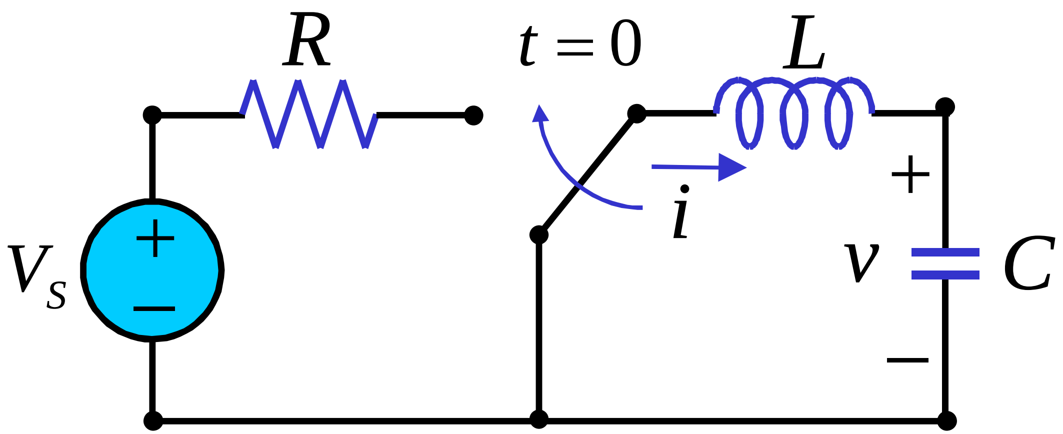
Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)



$$v = e^{-\alpha t}\left(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t\right)$$

Andamento tipico di $v(t)$
($B_1 = 0$, $B_2 = 1$, $\alpha = 1$, $\omega_d = 5$)

Risposta al gradino di un circuito *RLC* serie



Ipotesi:

$$i(0) = I_0$$

$$v(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i \cdot dt = V_0$$

$$i(t) = ?$$

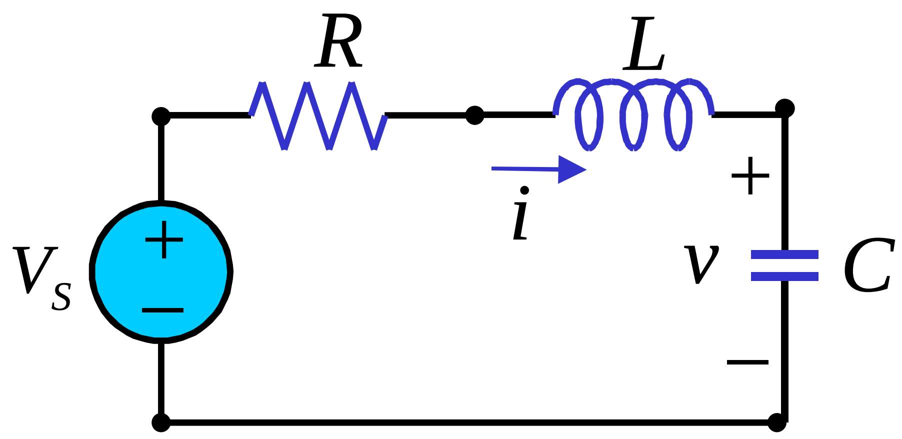
$$v(t) = ?$$

$$(\text{per } t > 0)$$

Risposta al gradino di un circuito *RLC* serie

Per $t > 0$

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + v = V_S$$

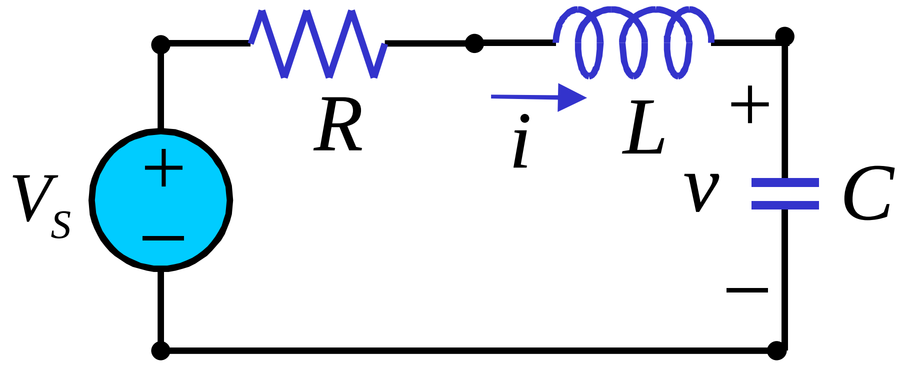


Poiché $i = C \cdot \dfrac{dv}{dt}$ si ha:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_S}{LC} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 (v - V_S)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{d(v - V_S)}{dt} + \frac{v - V_S}{LC} = 0$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 (v - V_S)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{d(v - V_S)}{dt} + \omega_0^2 \cdot (v - V_S) = 0$$

Risposta al gradino di un circuito *RLC* serie



$$\frac{d^2(v-V_S)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{d(v-V_S)}{dt}+\omega_0^2\cdot(v-V_S)=0$$

$\alpha > \omega_0$: caso sovrasmorzato

$$v=V_S+A_1\mathrm{e}^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})t}+A_2\mathrm{e}^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})t}$$

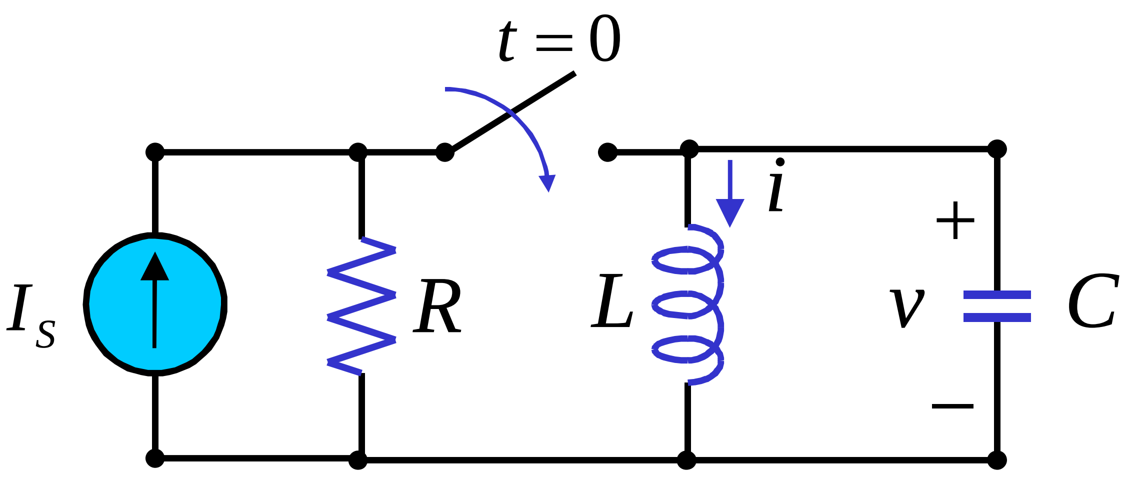
$\alpha = \omega_0$: caso di smorzamento critico

$$v=V_S+(C_2+C_1t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$\alpha < \omega_0$: caso sottosmorzato

$$v=V_S+\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t\right) \qquad \left(\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\right)$$

Risposta al gradino di un *RLC* parallelo



Ipotesi:

$$v(0) = V_0$$

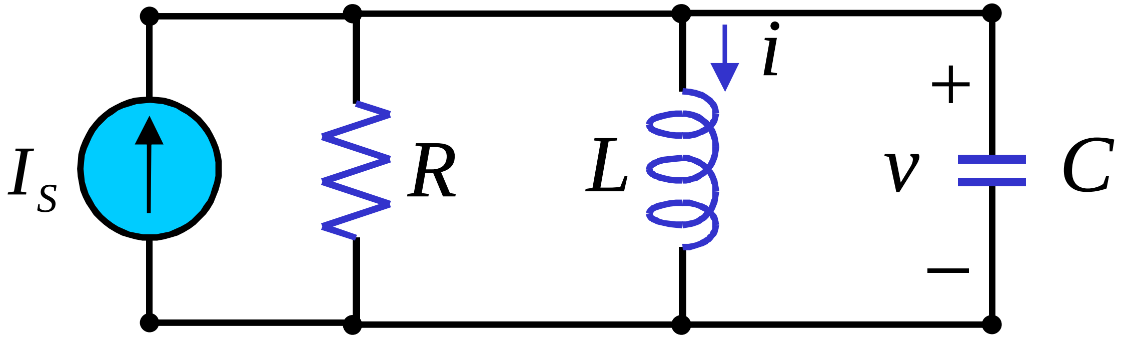
$$i(0) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v \cdot dt = I_0$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} v(t) = ? & \\ & (\text{per } t > 0) \\ i(t) = ? & \end{array}}$$

Risposta al gradino di un *RLC* parallelo

Per $t > 0$

$$C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = I_S$$



Poiché $v = L \cdot \dfrac{di}{dt}$ si ha:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_S}{LC} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2(i - I_S)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{d(i - I_S)}{dt} + \frac{i - I_S}{LC} = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2(i - I_S)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{d(i - I_S)}{dt} + \omega_0^2 \cdot (i - I_S) = 0$$

Risposta al gradino di un *RLC* parallelo

$$\frac{d^2(i-I_S)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{d(i-I_S)}{dt}+\omega_0^2\cdot(i-I_S)=0$$

$\alpha > \omega_0$: caso sovrasmorzato

$$i=I_S+A_1\mathrm{e}^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})t}+A_2\mathrm{e}^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})t}$$

$\alpha = \omega_0$: caso di smorzamento critico

$$i=I_S+(C_2+C_1t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$\alpha < \omega_0$: caso sottosmorzato

$$i=I_S+\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t\right) \qquad \left(\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\right)$$

Risposta completa di circuiti del II ordine/1

La risposta completa di un circuito del secondo ordine è sempre del tipo:

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0^-) & t < t_0 \\ x(\infty) + x_n(t) & t > t_0 \end{cases}$$

dove x rappresenta indifferentemente la tensione o la corrente sul condensatore o sull'induttanza e t_0 è l'istante in cui commuta l'interruttore. Si richiede:

- la determinazione della risposta naturale x_n del circuito;
- i valori iniziali $x(t_0^-)$, $x(t_0^+)$ e $dx(t_0^+)/dt$;
- il valore a regime $x(\infty)$;

Risposta completa di circuiti del II ordine/2

La risposta naturale x_n si calcola considerando il circuito per $t > t_0$, spegnendo tutti i generatori indipendenti e scrivendo l'equazione del II ordine per x_n:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dx_n}{dt} + \omega_0^2 \cdot x_n = 0$$

$\alpha > \omega_0$ (sovrasmorzato): $$x_n = A_1 e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)(t-t_0)} + A_2 e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)(t-t_0)}$$

$\alpha = \omega_0$ (smorzamento critico): $$x_n = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$\alpha < \omega_0$ (sottosmorzato): $$x_n = e^{-\alpha(t-t_0)}\left(A_1 \cos\omega_d (t-t_0) + A_2 \sin\omega_d (t-t_0)\right)$$

$\left(\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\right)$

Risposta completa di circuiti del II ordine/3

per $t < t_0$:

$$x(t) = x(t_0^-)$$

per $t > t_0$:

$$x(t) = \begin{cases} x(\infty) + A_1 \mathrm{e}^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})(t-t_0)} + A_2 \mathrm{e}^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})(t-t_0)} & \alpha > \omega_0 \\ x(\infty) + (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-\alpha\,(t-t_0)} & \alpha = \omega_0 \\ x(\infty) + \mathrm{e}^{-\alpha\,(t-t_0)}\left(A_1 \cos\omega_d\,(t-t_0) + A_2 \sin\omega_d\,(t-t_0)\right) & \alpha < \omega_0 \end{cases}$$

Utilizzando i valori di $x(t_0^+)$ e $dx(t_0^+)/dt$ si calcolano le costanti A_1 e A_2.