Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

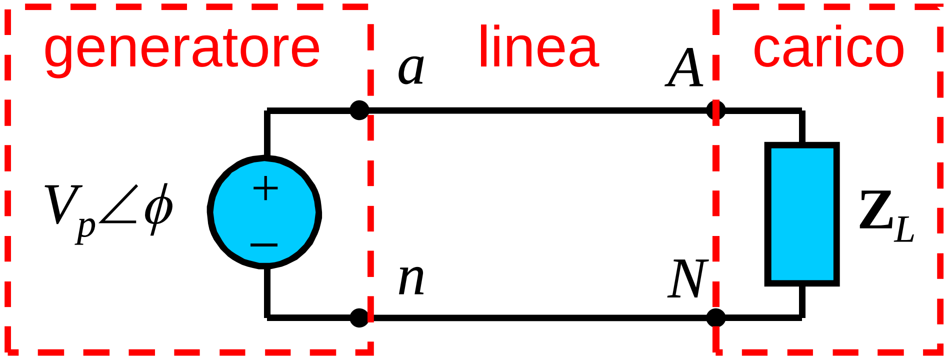
Campi Elettromagnetici e Circuiti I

Circuiti trifase

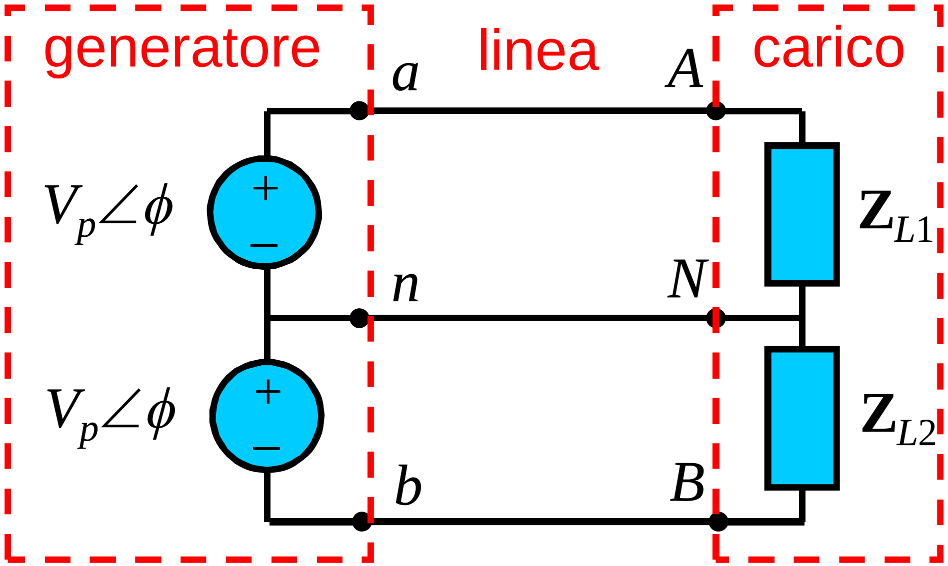
Sommario

- Sistemi monofase, polifase, trifase
- Generatore trifase, configurazione stella e triangolo
- Tensioni di fase e tensioni di linea
- Carico trifase, configurazione stella e triangolo
- Collegamento generatore carico: caso Y-Y
- Potenza in un sistema trifase bilanciato
- Configurazione Y-Y sbilanciata
- Vantaggi nella distribuzione dell’energia

Sistemi monofase

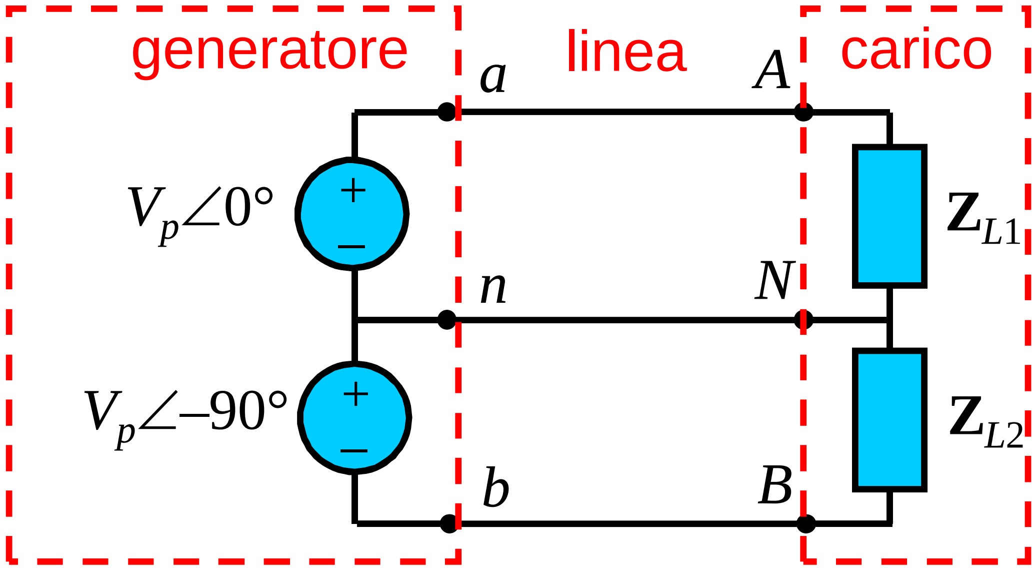


Sistema monofase a due fili



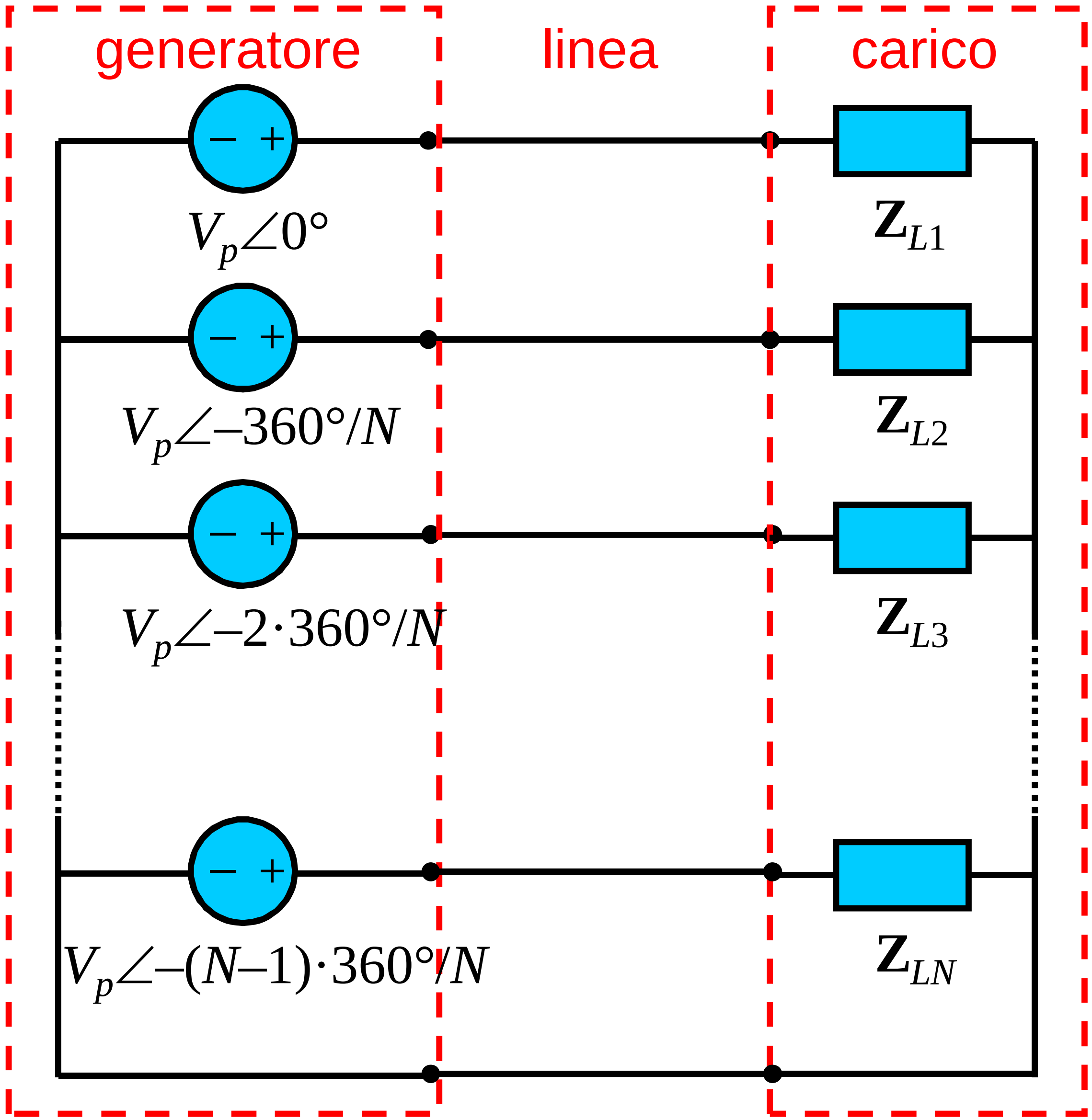
Sistema monofase a tre fili

Sistemi polifase



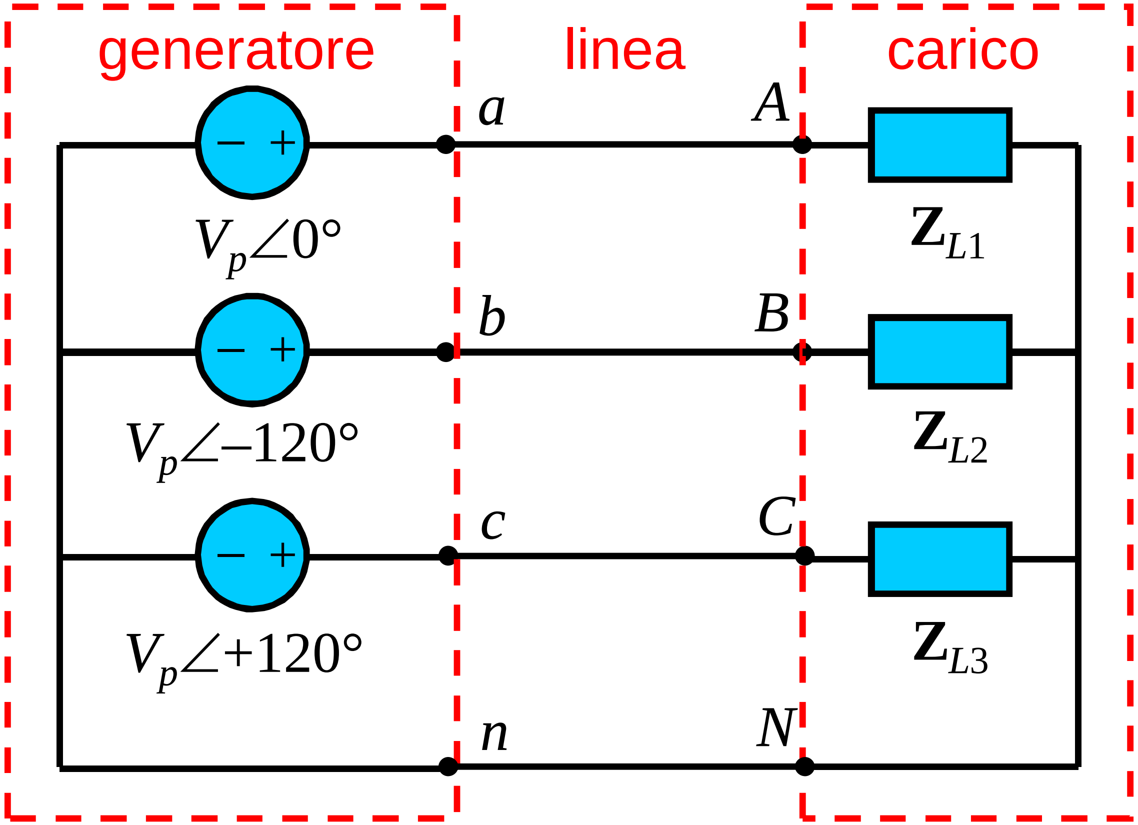
Sistema bifase a tre fili

Sistemi polifase

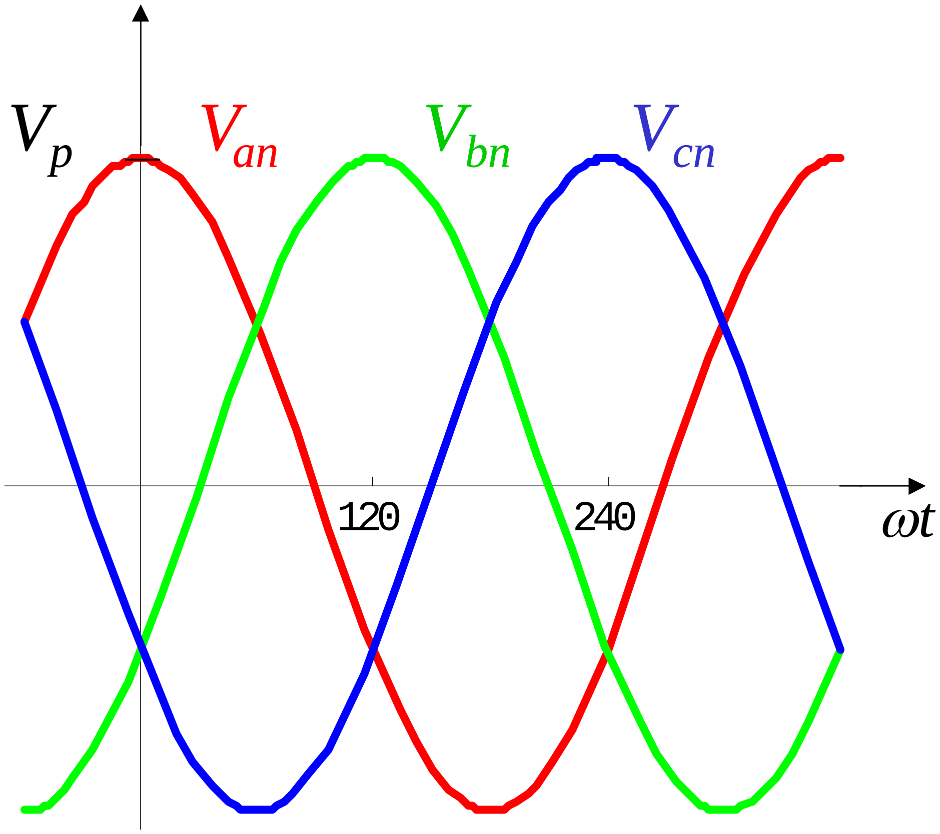


Sistema a N fasi

Sistemi trifase



Sistema trifase
a quattro fili

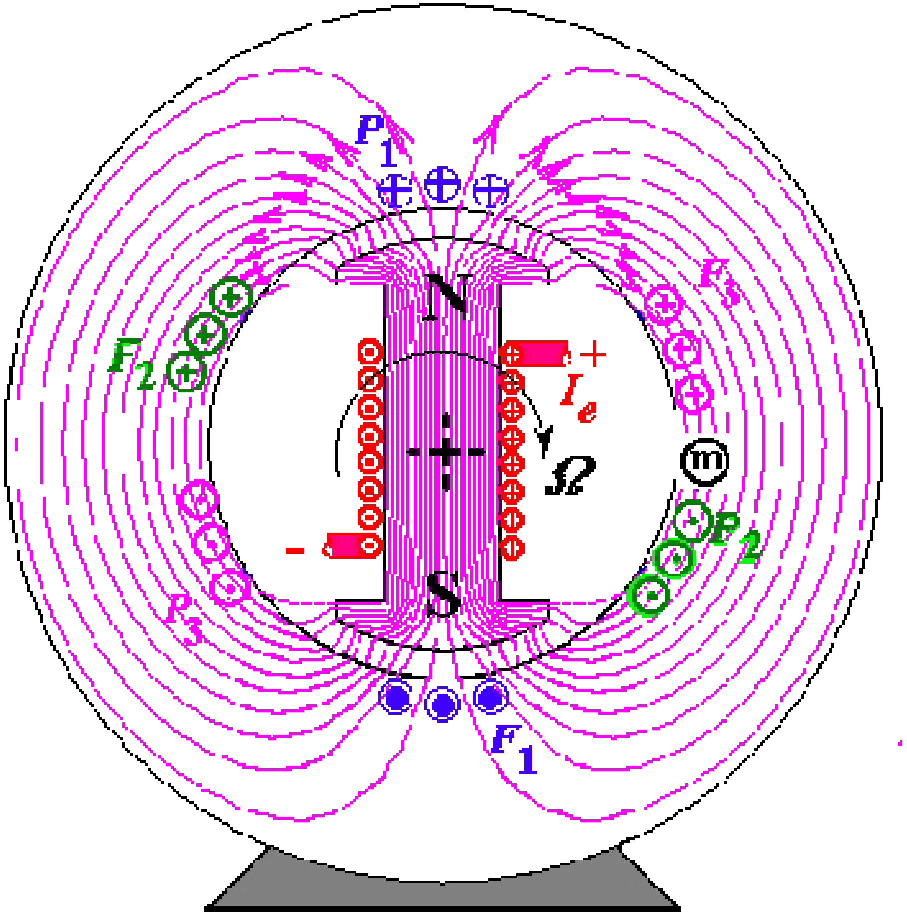


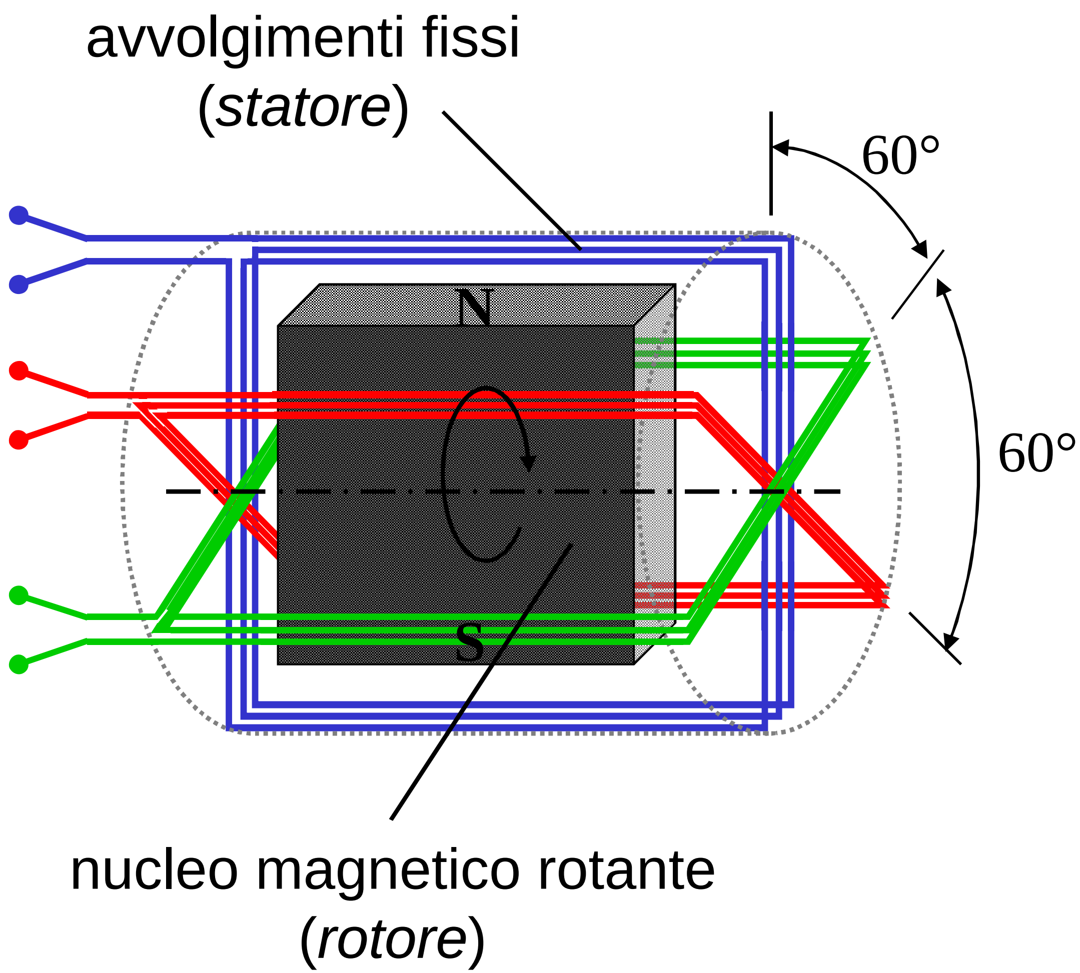
$$V_{an} = V_p \cos \omega t$$

$$V_{bn} = V_p \cos(\omega t - 120°)$$

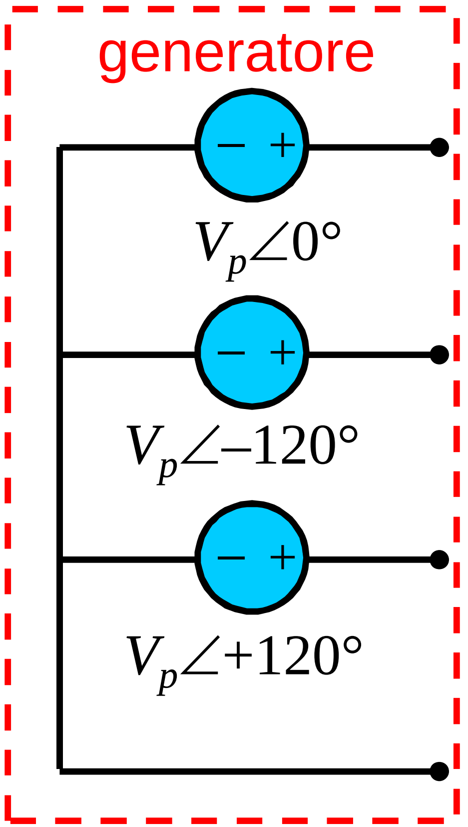
$$V_{cn} = V_p \cos(\omega t + 120°) = V_p \cos(\omega t - 240°)$$

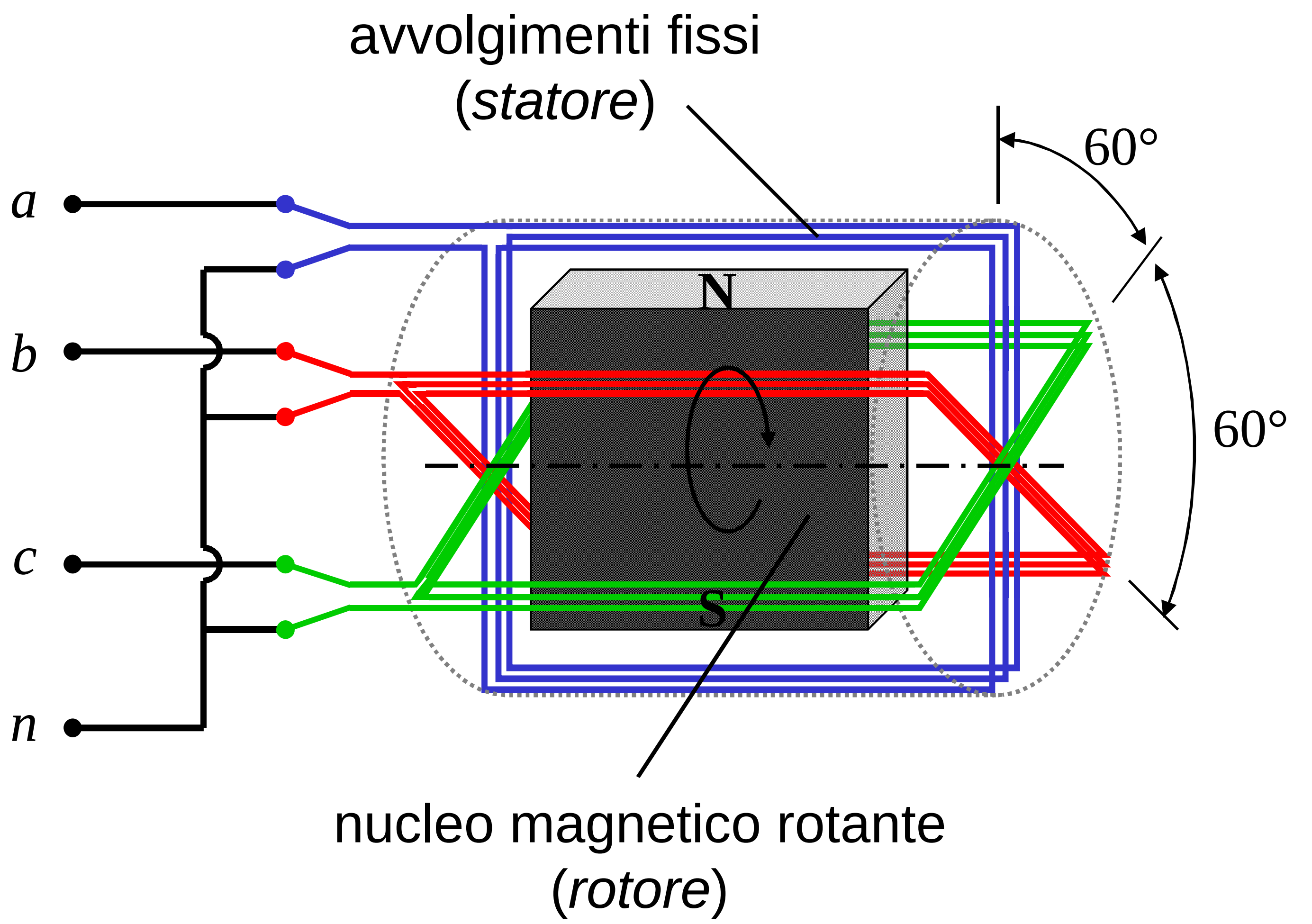
Generatore trifase



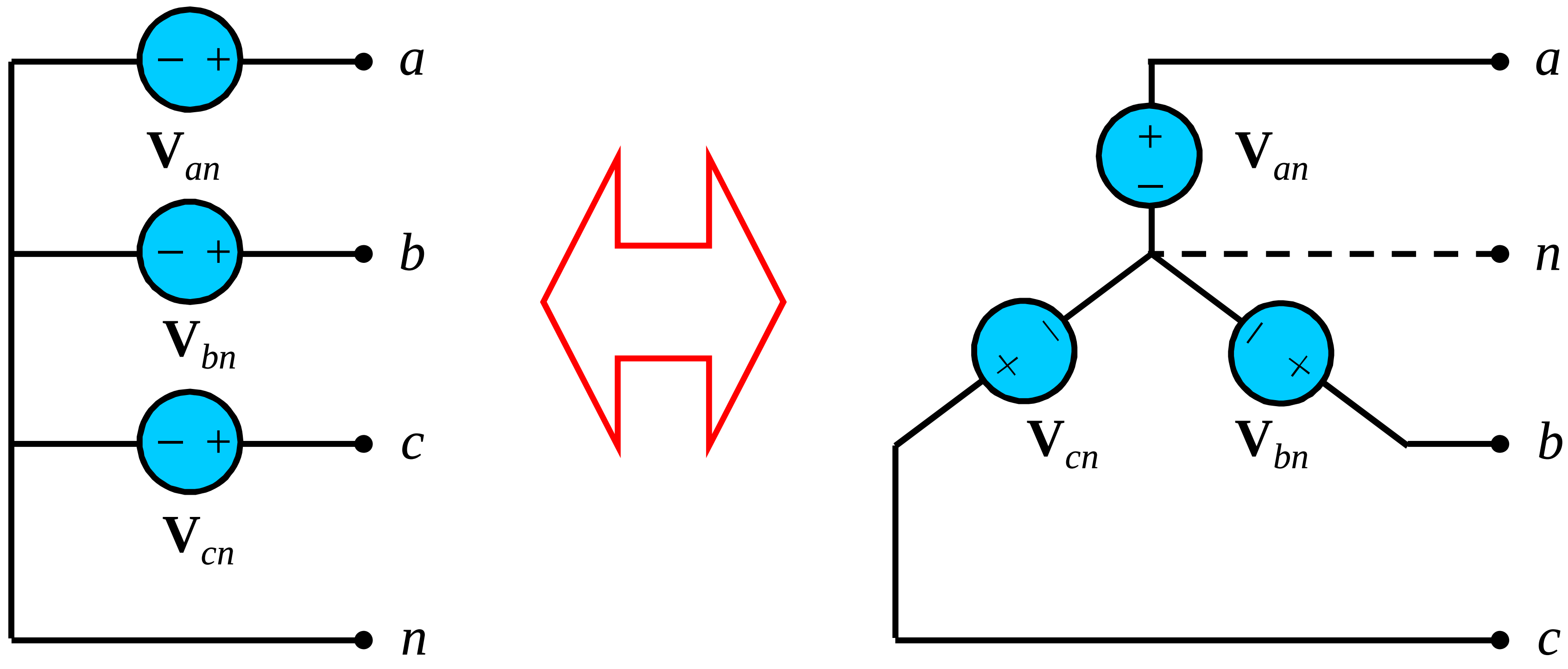


Generatore in configurazione a stella





Generatore in configurazione a stella

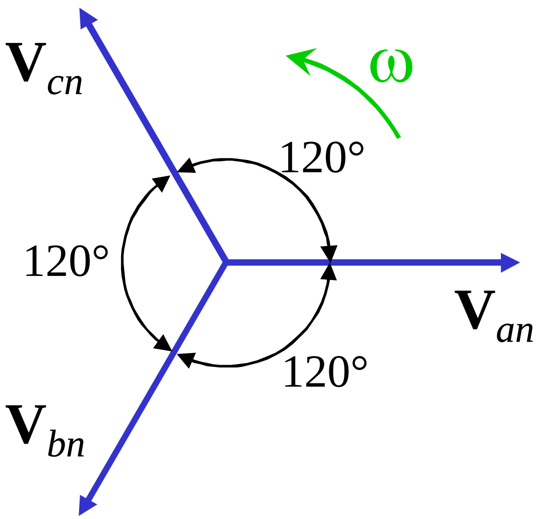
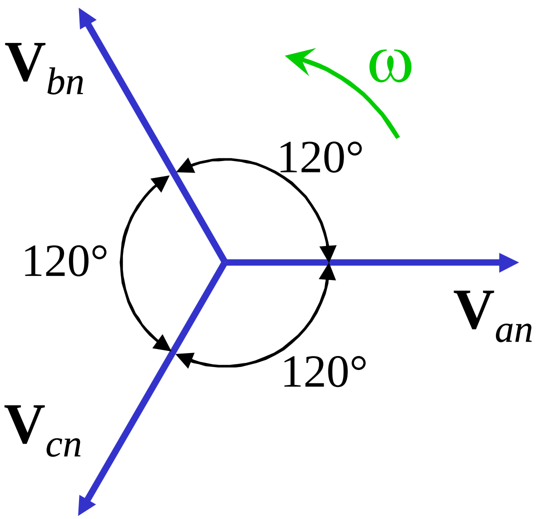


Le tensioni di fase bilanciate hanno lo stesso modulo e sfasamenti reciproci di 120°:

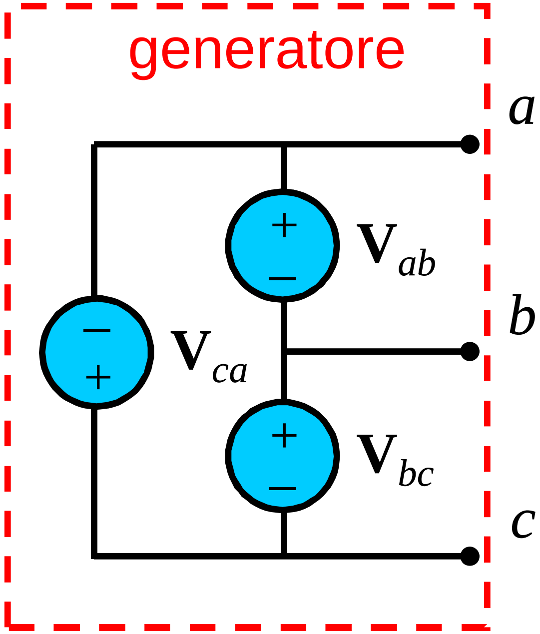
$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}| \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

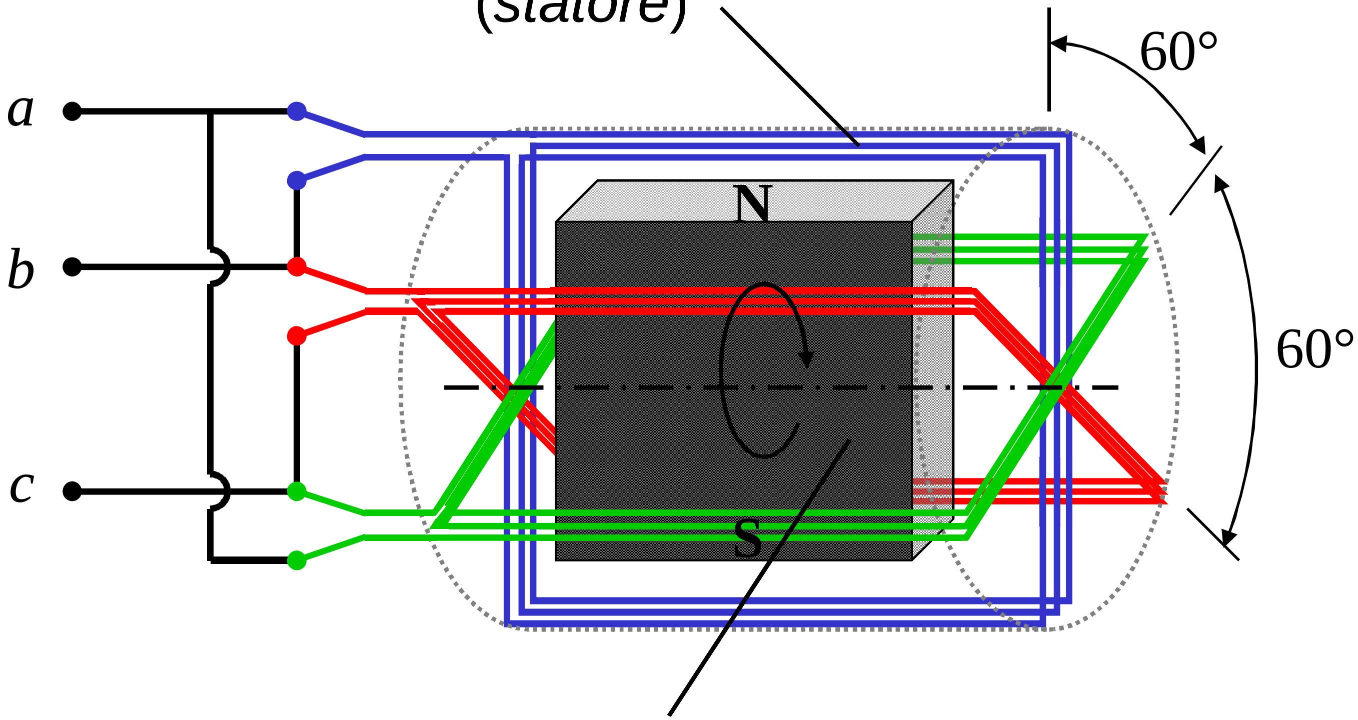
Generatore in configurazione a stella

Si possono avere due casi:

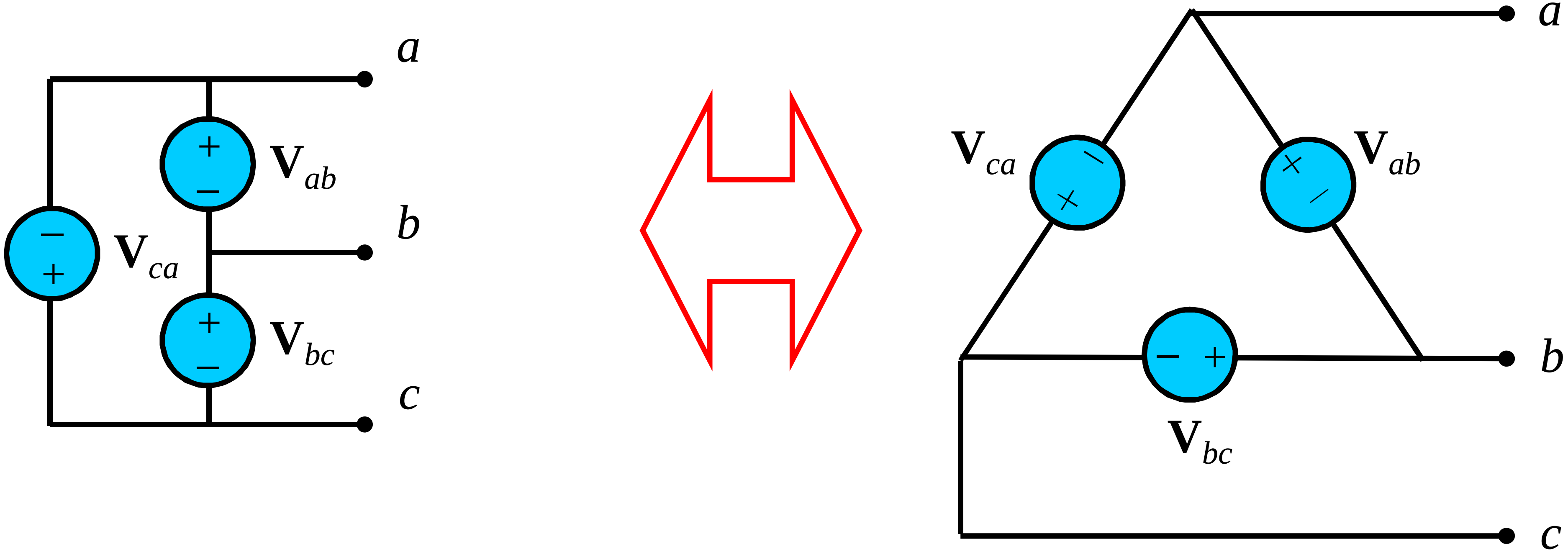
SEQUENZA *abc* o SEQUENZA POSITIVA:	SEQUENZA *acb* o SEQUENZA NEGATIVA:
$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0°$ $\mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -120°$ $\mathbf{V}_{cn} = V_p\angle -240° = V_p\angle +120°$	$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0°$ $\mathbf{V}_{cn} = V_p\angle -120°$ $\mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -240° = V_p\angle +120°$
	

Generatore in configurazione a triangolo

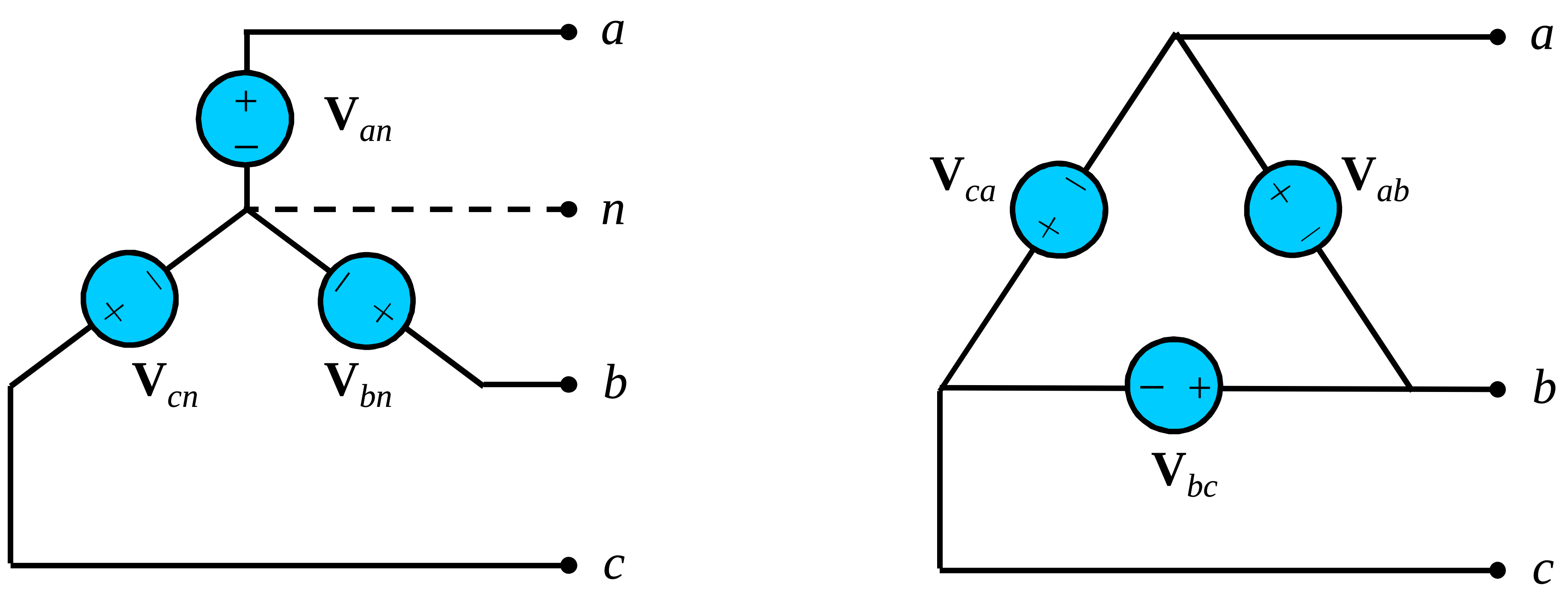




Generatore in configurazione a triangolo



Generatori: relazione fra tensioni



$\mathbf{V}_{an}$, $\mathbf{V}_{bn}$ e $\mathbf{V}_{cn}$ sono dette tensioni di fase

$\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$ e $\mathbf{V}_{ca}$ sono dette tensioni di linea

Generatori: relazione fra tensioni

Si ha:

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p\angle 0° - V_p\angle -120°$$

$$= V_p\left(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\,V_p\angle 30° = V_L\angle 30°$$

Analogamente:

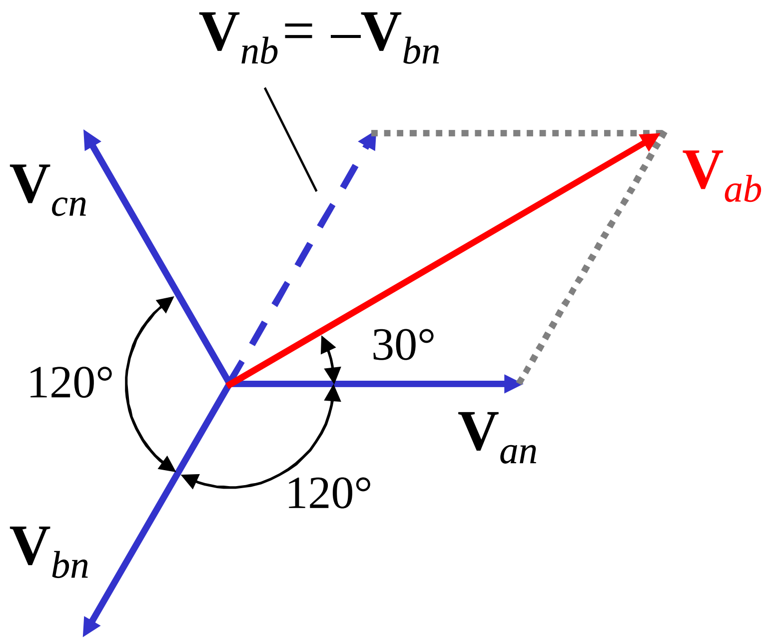
$$\mathbf{V}_{bc} = V_L\angle -90° \qquad \mathbf{V}_{ca} = V_L\angle -210°$$

Le tensioni di linea sono bilanciate (se lo sono quelle di fase), e cioè hanno lo stesso modulo e sfasamenti di 120°:

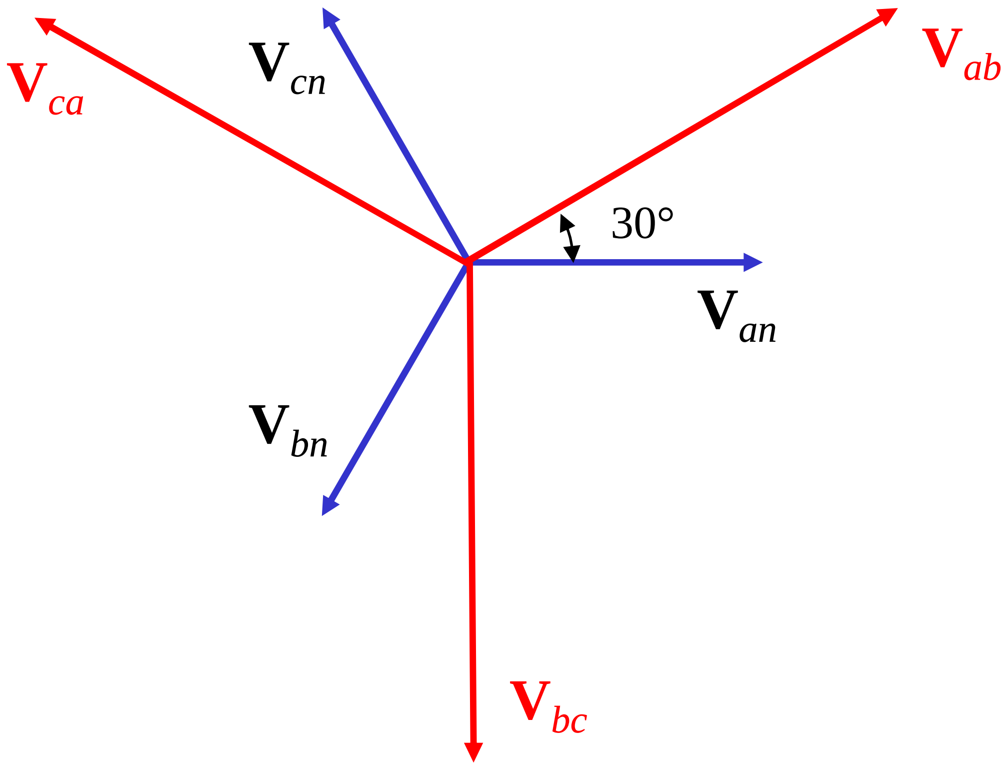
$$|\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}| \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca} = 0$$

Generatori: relazione fra tensioni

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} + (-\mathbf{V}_{bn})$$



Generatori: relazione fra tensioni



$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0°$$

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120°$$

$$\mathbf{V}_{cn} = V_p \angle -240°$$

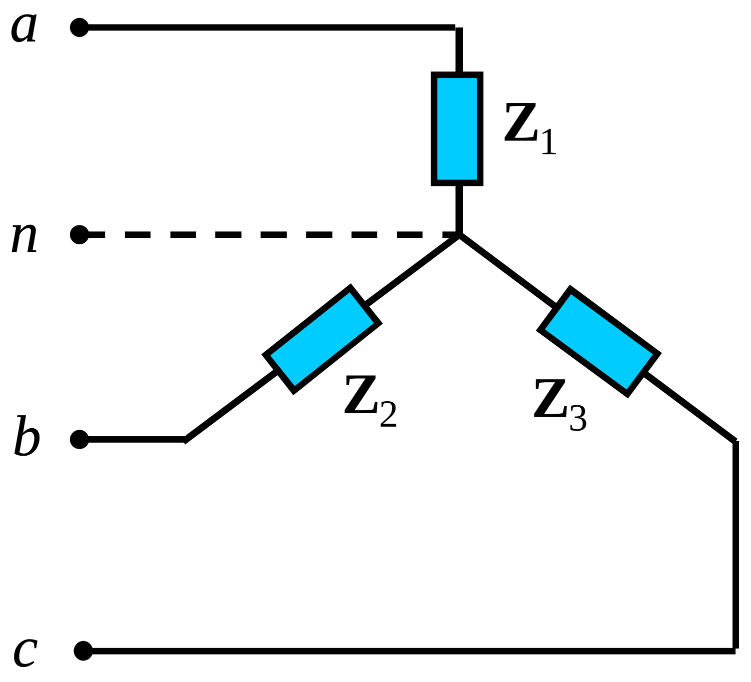
$$\mathbf{V}_{ab} = V_L \angle 30°$$

$$\mathbf{V}_{bc} = V_L \angle -90°$$

$$\mathbf{V}_{ca} = V_L \angle -210°$$

$$V_L = \sqrt{3}\, V_p$$

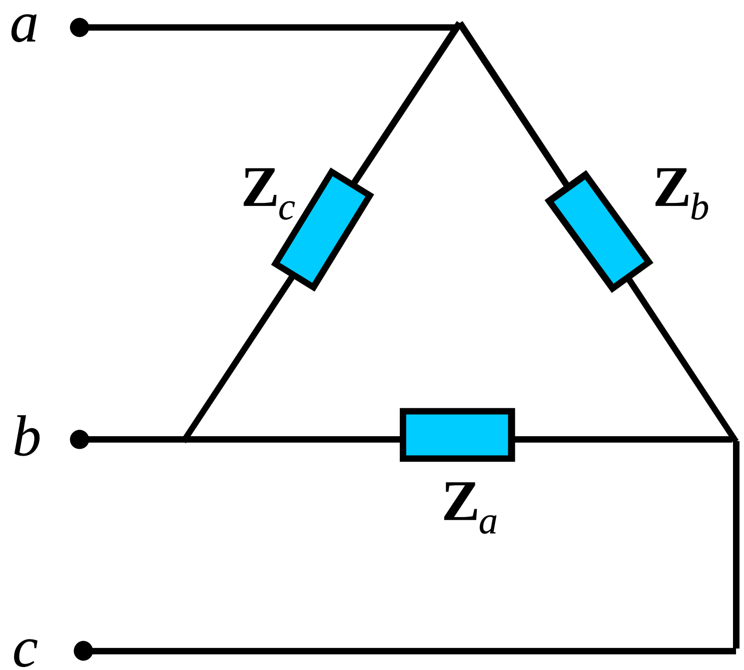
Carico in configurazione a stella



Il carico è bilanciato se le impedenze di fase sono uguali in modulo e argomento:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_Y$$

Carico in configurazione a triangolo



Se il carico è bilanciato si ha:

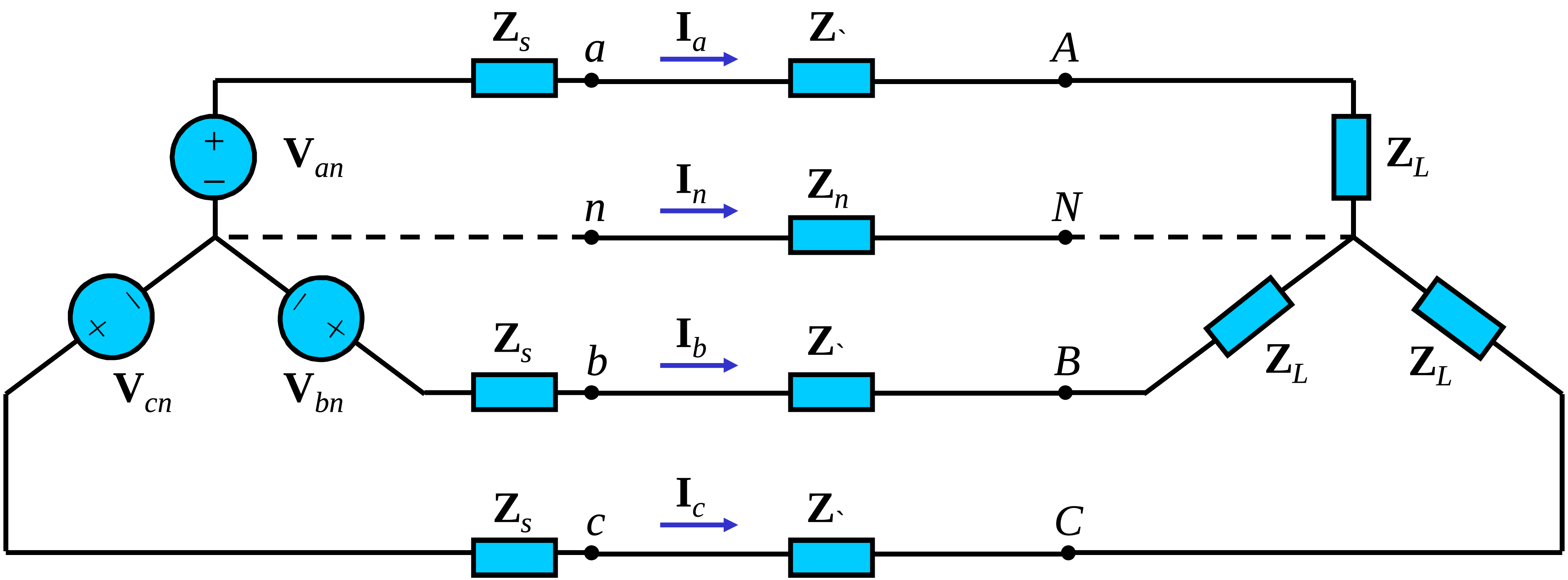
$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_\Delta = 3\,\mathbf{Z}_Y$$

Collegamento fra generatore e carico

Si possono avere quattro diverse configurazioni:

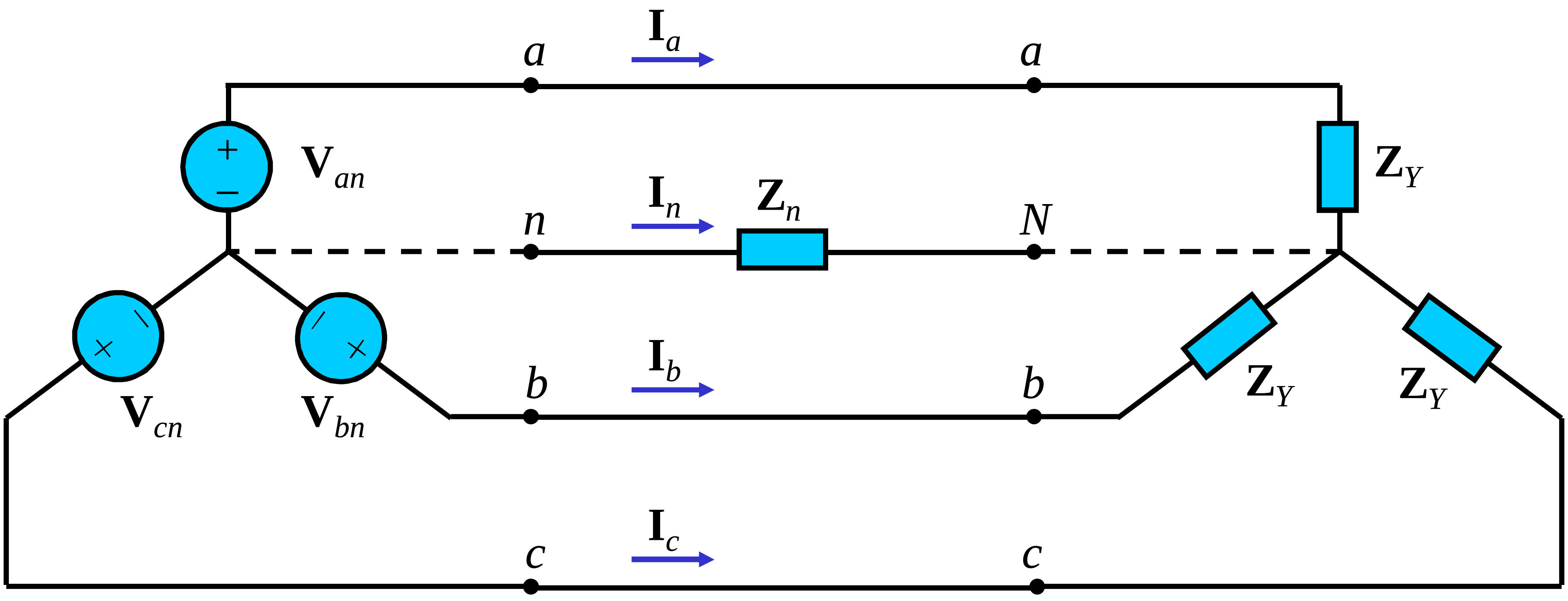
- collegamento Y-Y (generatore a stella con carico a stella)
- collegamento Y-Δ (generatore a stella con carico a triangolo)
- collegamento Δ-Δ (generatore a triangolo con carico a triangolo)
- collegamento Δ-Y (generatore a triangolo con carico a stella)

Configurazione Y-Y bilanciata



Tipicamente $\mathbf{Z}_\ell << \mathbf{Z}_L$ e $\mathbf{Z}_n << \mathbf{Z}_L$

Configurazione Y-Y bilanciata



$$\boxed{\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_\ell + \mathbf{Z}_L}$$

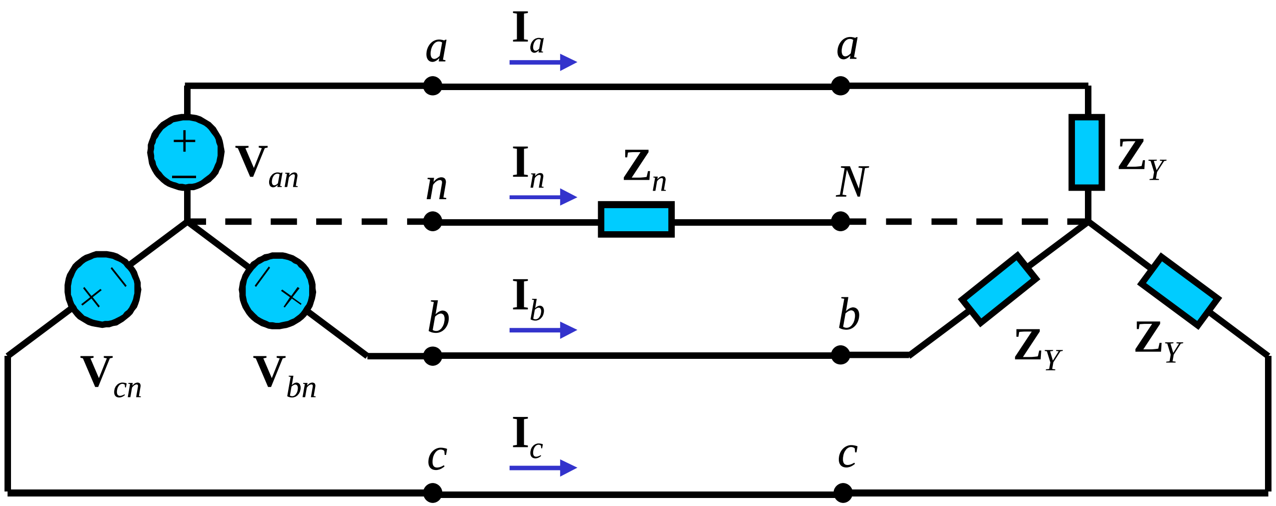
Configurazione Y-Y bilanciata

KVL alle tre maglie:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{Z}_Y \mathbf{I}_a - \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n$$
$$\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{Z}_Y \mathbf{I}_b - \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n$$
$$\mathbf{V}_{cn} = \mathbf{Z}_Y \mathbf{I}_c - \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n$$

Inoltre:

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$



$$\mathbf{Z}_Y (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) - 3\,\mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n = 0$$

KCL al nodo N:

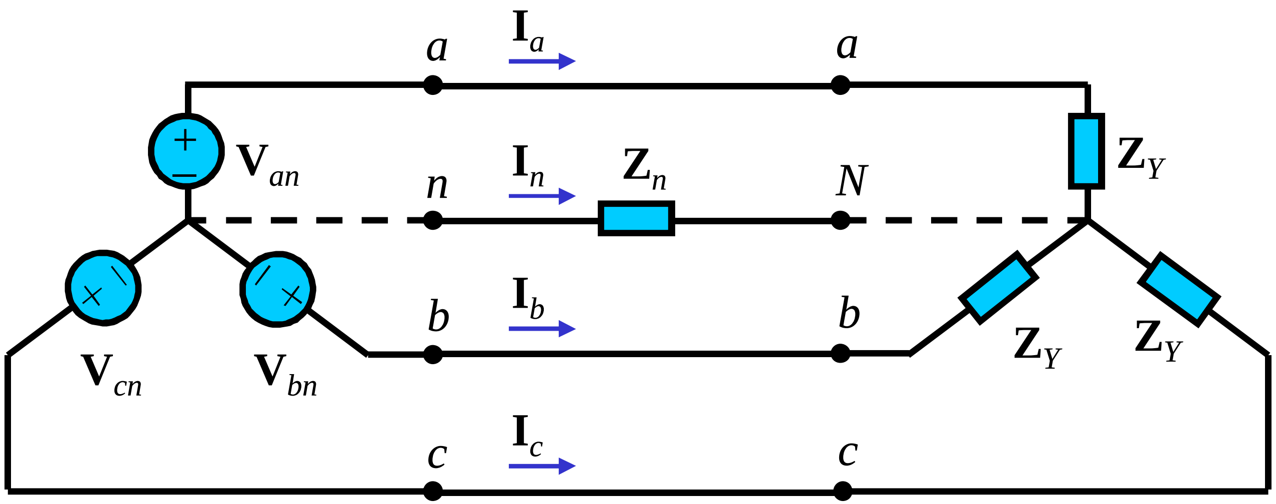
$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = -\mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{I}_n = 0 \qquad \mathbf{V}_{nN} = \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n = 0$$

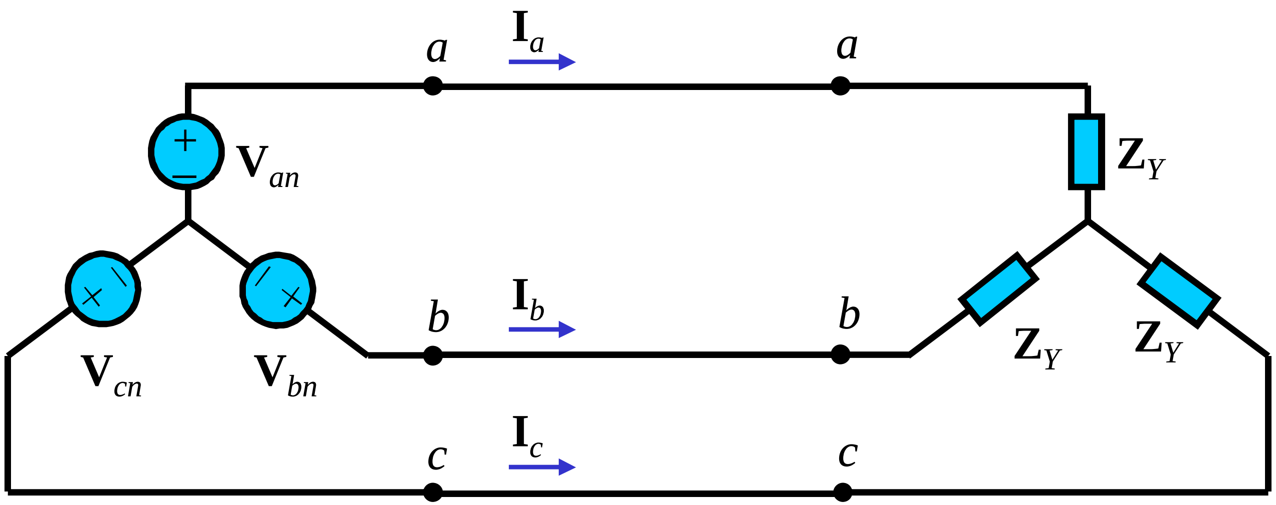
(sul *neutro* non passa corrente e quindi non vi è caduta di tensione)

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} \qquad \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_Y} \qquad \mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_Y}$$

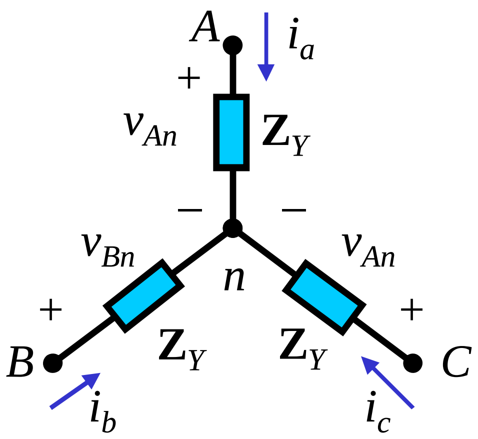
Configurazione Y-Y bilanciata



Poiché $\mathbf{I}_n = 0$, $\mathbf{V}_{nN} = 0$ si può rimuovere il *neutro* senza alterare il funzionamento del circuito:



Potenza in un sistema trifase bilanciato



$$\mathbf{Z}_Y = Z\angle\theta$$

$$v_{An} = V_p \cos\omega t \qquad i_a = I_p \cos(\omega t - \theta)$$

$$v_{Bn} = V_p \cos(\omega t - 120°) \qquad i_b = I_p \cos(\omega t - \theta - 120°)$$

$$v_{Cn} = V_p \cos(\omega t + 120°) \qquad i_c = I_p \cos(\omega t - \theta + 120°)$$

N.B.: V_p e I_p sono valori di picco delle tensioni di fase e delle correnti di linea

Potenza istantanea:

$$p = p_a + p_b + p_c = v_{An} i_a + v_{Bn} i_b + v_{Cn} i_c = 3\frac{V_p I_p}{2}\cos\theta = 3V_{p\,\mathrm{eff}} I_{p\,\mathrm{eff}} \cos\theta$$

La potenza istantanea su un carico trifase bilanciato è costante

Potenza in un sistema trifase bilanciato

Dimostrazione:

$$p = p_a + p_b + p_c = v_{An} i_a + v_{Bn} i_b + v_{Cn} i_c$$

$$= V_p I_p \left(\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120°) \cos(\omega t - \theta - 120°) + \cos(\omega t + 120°) \cos(\omega t - \theta + 120°) \right)$$

Ricordando che $\cos x \cos y = \frac{1}{2} \left(\cos(x+y) + \cos(x-y) \right)$ si ottiene:

$$p = \frac{V_p I_p}{2} \left(3 \cos\theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240°) + \cos(2\omega t - \theta + 240°) \right)$$

$$= \frac{V_p I_p}{2} \left(3\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta) \cos 240° + \sin(2\omega t - \theta) \sin 240° \right.$$
$$\left. + \cos(2\omega t - \theta) \cos 240° - \sin(2\omega t - \theta) \sin 240° \right)$$

$$= \frac{V_p I_p}{2} \left(3\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - \theta) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - \theta) \right) = 3 \frac{V_p I_p}{2} \cos\theta$$

Potenze medie

Passando alle potenze medie, per ogni singola fase si ha:

$P_p = \frac{1}{3} p = \frac{V_p I_p}{2} \cos\theta = V_{p\,\mathrm{eff}} I_{p\,\mathrm{eff}} \cos\theta$	potenza reale o attiva
$Q_p = \frac{V_p I_p}{2} \sin\theta = V_{p\,\mathrm{eff}} I_{p\,\mathrm{eff}} \sin\theta$	potenza reattiva
$S_p = \frac{V_p I_p}{2} = V_{p\,\mathrm{eff}} I_{p\,\mathrm{eff}}$	potenza apparente
$\mathrm{pf} = \cos\theta$	fattore di potenza
$\mathbf{S}_p = P_p + jQ_p = \frac{1}{2} \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{I}_p^* = \mathbf{V}_{p\,\mathrm{eff}} \cdot \mathbf{I}_{p\,\mathrm{eff}}^*$	potenza complessa

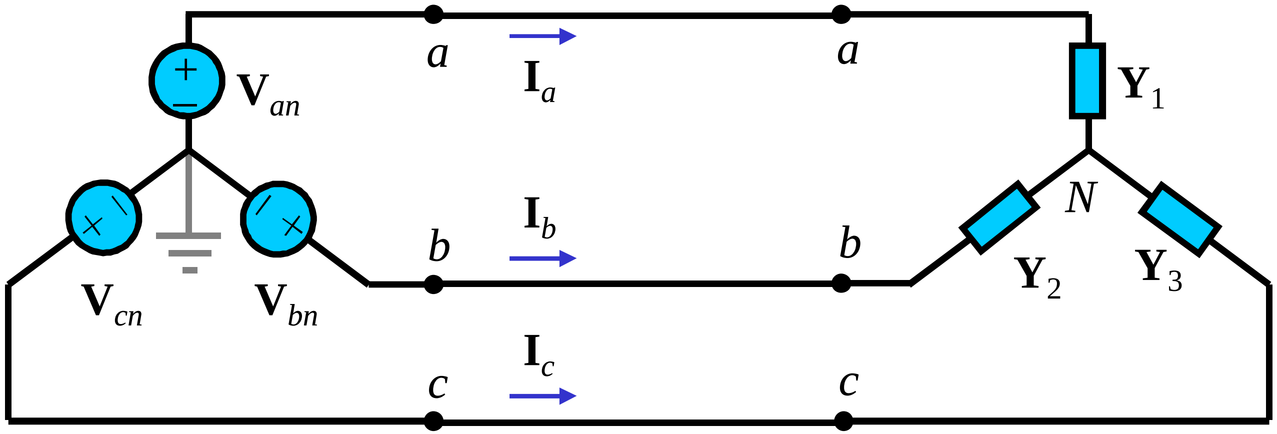
Potenze medie

La potenza media totale sul carico trifase risulta:

$$\mathbf{S} = 3\,\mathbf{S}_p = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{I}_p^* = \dfrac{3}{2} I_p^2 \cdot \mathbf{Z}_p = 3\dfrac{V_p^2}{2\,\mathbf{Z}_p^*} \\[2em] 3\,\mathbf{V}_{p\,\mathrm{eff}} \cdot \mathbf{I}_{p\,\mathrm{eff}}^* = 3\,I_{p\,\mathrm{eff}}^2 \cdot \mathbf{Z}_p = 3\dfrac{V_{p\,\mathrm{eff}}^2}{\mathbf{Z}_p^*} \end{cases}$$

dove $\mathbf{Z}_p = Z_p \angle \theta$ è l'impedenza di carico per fase ($\mathbf{Z}_p$ può rappresentare $\mathbf{Z}_Y$ o $\mathbf{Z}_\Delta$)

Configurazione Y-Y sbilanciata



Applicando il metodo di analisi nodale si ha:

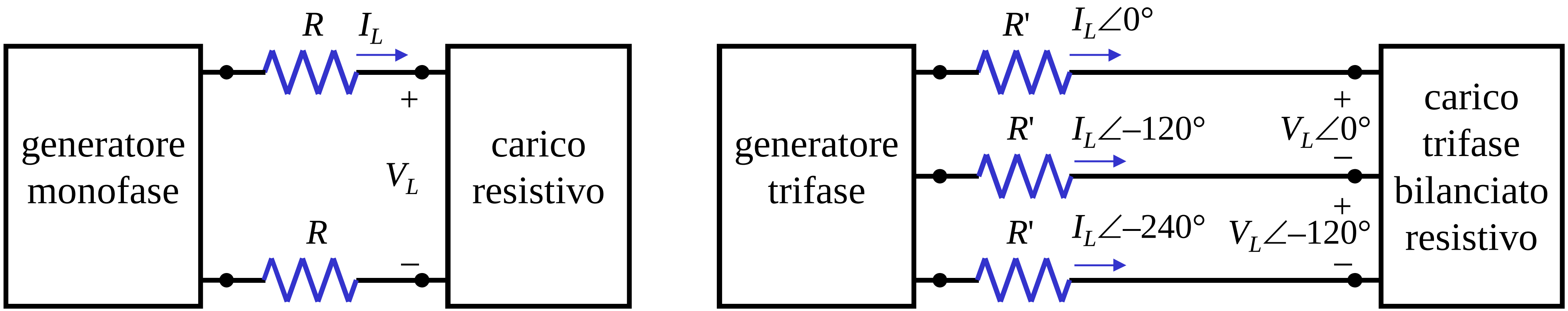
$$(\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{an})\,\mathbf{Y}_1 + (\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{bn})\,\mathbf{Y}_2 + (\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{cn})\,\mathbf{Y}_3 = 0$$

$$\boxed{\mathbf{V}_N = \frac{\mathbf{V}_{an}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{V}_{bn}\mathbf{Y}_2 + \mathbf{V}_{cn}\mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}}$$

Nota $\mathbf{V}_N$ si possono facilmente calcolare le correnti e le potenze.

Vantaggi nella distribuzione dell'energia

A parità di potenza P_L trasmessa al carico, di tensione di linea V_L e di potenza dissipata lungo i cavi, il cablaggio con un sistema trifase richiede meno materiale rispetto ad un sistema monofase.



(R, R' rappresentano la resistenza dei cavi: $R = \rho\ell/\pi r^2$, $R' = \rho\ell/\pi r'^2$)

$$P_{\text{persa}}^{\text{mono}} = 2\,R\,I_{L\,\text{eff}}^2 = 2\,R\,\frac{P_L^2}{V_{L\,\text{eff}}^2}$$

$$P_{\text{persa}}^{\text{tri}} = 3\,R'\,I_{L\,\text{eff}}^2 = 3\,R'\left(\frac{P_L}{3V_{p\,\text{eff}}}\right)^2 = 3\,R'\left(\frac{P_L}{\sqrt{3}\,V_{L\,\text{eff}}}\right)^2 = R'\,\frac{P_L^2}{V_{L\,\text{eff}}^2}$$

Vantaggi nella distribuzione dell’energia

Imponendo che la potenza dissipata lungo i cavi sia la stessa si ha:

$$\frac{P_{\text{persa}}^{\text{mono}}}{P_{\text{persa}}^{\text{tri}}} = 2\frac{R}{R'} = 2\frac{\rho\ell/\pi\, r^2}{\rho\ell/\pi\, r'^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2}\, r'$$

quindi il rapporto fra le quantità di materiale (rame) necessario per cablare il sistema monofase e quello trifase è:

$$\boxed{\frac{\text{materiale per monofase}}{\text{materiale per trifase}} = \frac{2\,(\pi\, r^2 \ell)}{3\,(\pi\, r'^2\, \ell)} = \frac{2\, r^2}{3\, r'^2} = \frac{4}{3} = 1.333}$$