

Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

Campi Elettromagnetici e Circuiti I

Risposta in frequenza

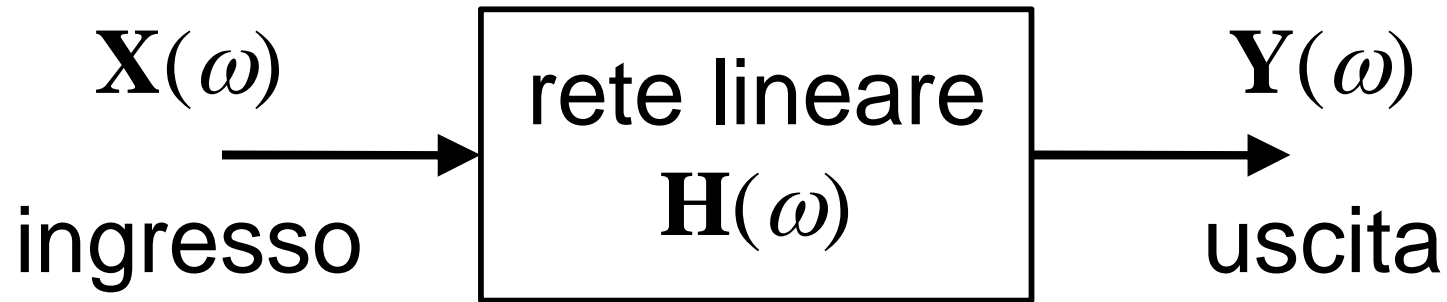
Sommario

- Funzione di trasferimento
- La scala dei decibel
- Risonanza serie
- Risonanza parallelo
- Filtri
- Diagrammi di Bode

Funzione di trasferimento

La **risposta in frequenza** di un circuito rappresenta la variazione del suo comportamento al variare della frequenza

Funzione di trasferimento



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)}$$

$\mathbf{H}(\omega)$ rappresenta il rapporto del fasore di uscita rispetto al fasore d'ingresso, al variare della frequenza, e viene detta **funzione di trasferimento**

Funzione di trasferimento

Quattro possibili tipi di funzione di trasferimento:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \text{guadagno di tensione}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)} = \text{guadagno di corrente}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)} = \text{guadagno di transimpedenza}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \text{guadagno di transammettenza}$$

Funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

H = modulo della funzione di trasferimento
 ϕ = argomento o fase della funzione di trasferimento

In molti casi si preferisce introdurre la

variabile complessa $s = j\omega$

$$\mathbf{H}(\omega) \rightarrow \mathbf{H}(s)$$

Funzione di trasferimento

Si può anche scrivere:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)}$$

$\mathbf{N}(\omega)$ e $\mathbf{D}(\omega)$ non coincidono necessariamente con le espressioni delle funzioni di ingresso e uscita. La frazione è ridotta ai minimi termini, eliminando eventuali fattori comuni.

Funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)}$$

Le radici di $\mathbf{N}(\omega) = 0$ sono dette zeri di $\mathbf{H}(\omega)$ e vengono rappresentate come $j\omega = z_1, z_2, \dots$

Le radici di $\mathbf{D}(\omega) = 0$ sono dette poli di $\mathbf{H}(\omega)$ e vengono rappresentate come $j\omega = p_1, p_2, \dots$

Funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)}$$

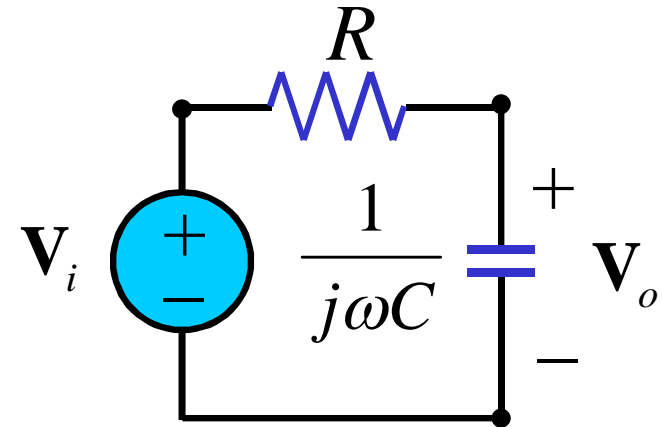
Uno zero (radice del numeratore) è un valore che rende nulla la funzione di trasferimento

Uno polo (radice del denominatore) è un valore per il quale la funzione di trasferimento diventa infinita

Funzione di trasferimento

Esempio:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

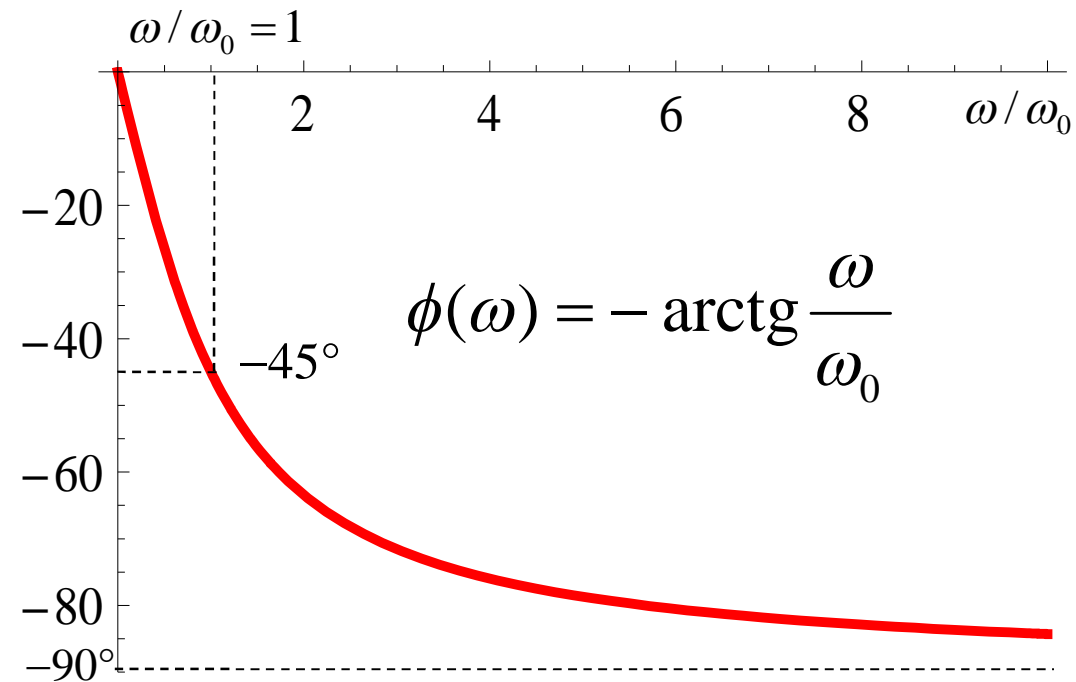
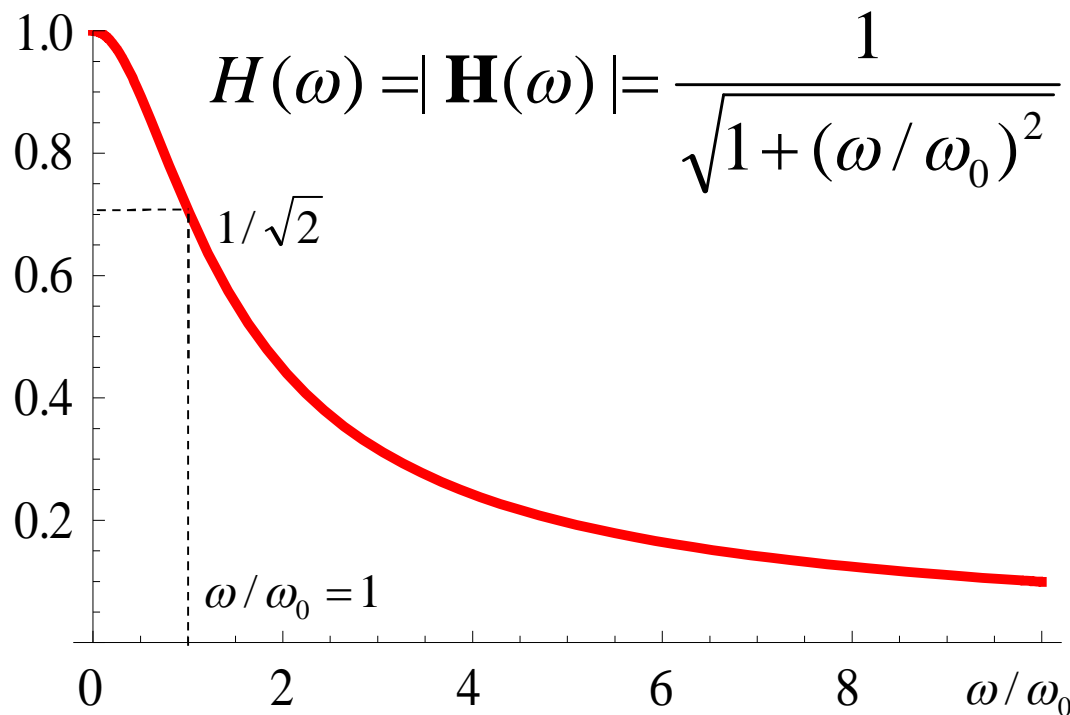
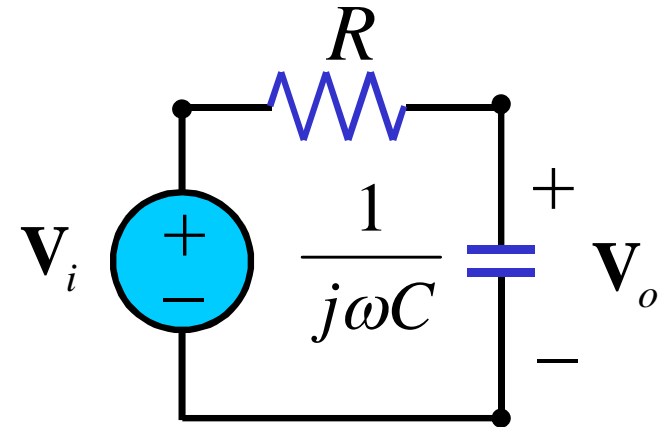
$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Funzione di trasferimento

Esempio:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$



La scala dei decibel

Per rappresentare il rapporto fra due quantità omogenee x_2 e x_1 (ad esempio fra due tensioni o fra due correnti), in campo ingegneristico si usa spesso il decibel:

$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{x_2}{x_1} \quad \longrightarrow \quad H_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log_{10} \frac{x_2}{x_1}$$

Il simbolo del decibel è dB

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \longrightarrow \quad H_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3.01 \text{ dB}$$

La scala dei decibel

H	H^2	$20 \log_{10} H$ $10 \log_{10} H^2$
1000	1000000	60
316	100000	50
100	10000	40
31.6	1000	30
10	100	20
3.16	10	10
2	4	6
1.41	2	3
1	1	0

H	H^2	$20 \log_{10} H$ $10 \log_{10} H^2$
1	1	0
0.707	0.5	-3
0.5	0.25	-6
0.316	0.1	-10
0.1	0.01	-20
0.0316	0.001	-30
0.01	0.0001	-40
0.00316	0.00001	-50
0.001	0.000001	-60

La scala dei decibel

Questa rappresentazione è particolarmente conveniente per tracciare il grafico del modulo della funzione di trasferimento.

Si utilizzano le proprietà dei logaritmi:

$$\log \frac{x_2}{x_1} = \log x_2 - \log x_1$$

$$\log \frac{1}{x_1} = -\log x_1$$

$$\log x_1 x_2 = \log x_2 + \log x_1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log x^\alpha = \alpha \log x$$

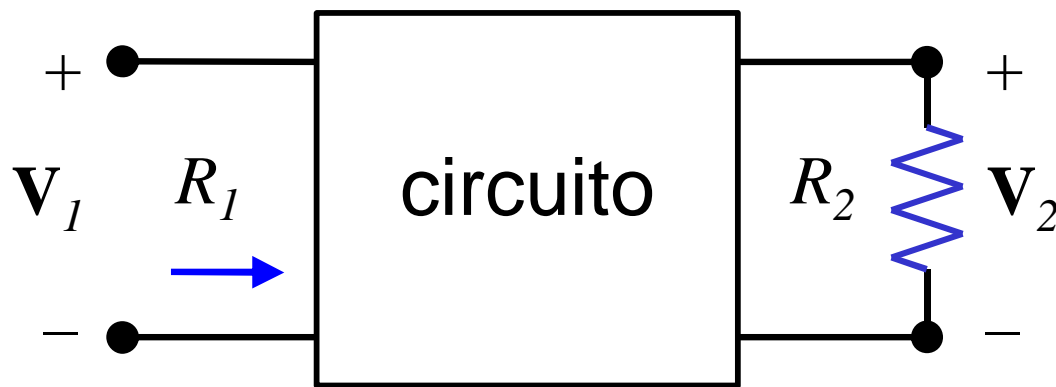
La scala dei decibel

In generale:

$$\begin{aligned} \log \frac{K(\omega - z_1)^{\alpha_1} (\omega - z_2)^{\alpha_2} (\omega - z_3)^{\alpha_3} \dots}{(\omega - p_1)^{\beta_1} (\omega - p_2)^{\beta_2} (\omega - p_3)^{\beta_3} \dots} = \\ = \log K + \alpha_1 \log(\omega - z_1) + \alpha_2 \log(\omega - z_2) + \alpha_3 \log(\omega - z_3) + \dots \\ - \beta_1 \log(\omega - p_1) - \beta_2 \log(\omega - p_2) - \beta_3 \log(\omega - p_3) - \dots \end{aligned}$$

La scala dei decibel

In molti casi è più semplice calcolare (o misurare) il rapporto fra la potenza d'ingresso e quella d'uscita:



$$P_1 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R_1} \Rightarrow |\mathbf{V}_1|^2 = 2R_1P_1$$

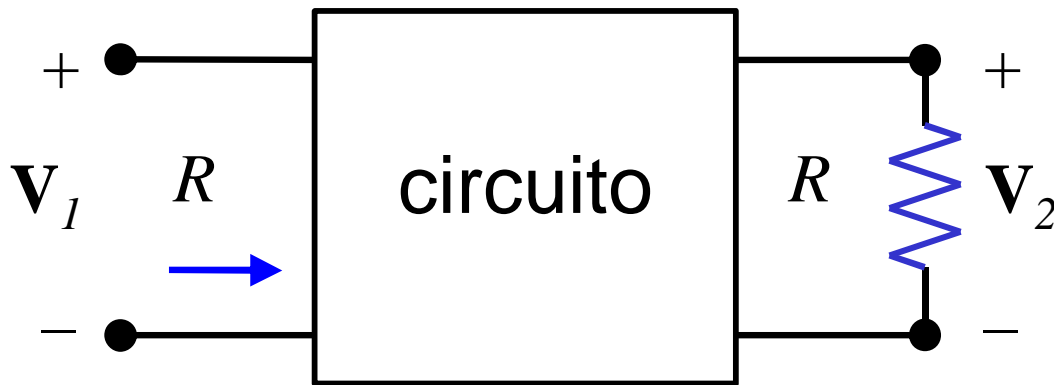
$$P_2 = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R_2} \Rightarrow |\mathbf{V}_2|^2 = 2R_2P_2$$

$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \left| \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \right| = \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|}$$

$$H(\omega)_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|} = 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{|\mathbf{V}_1|^2} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} + 10 \log_{10} \frac{R_2}{R_1}$$

La scala dei decibel

Se $R_2=R_1=R$ si ha:



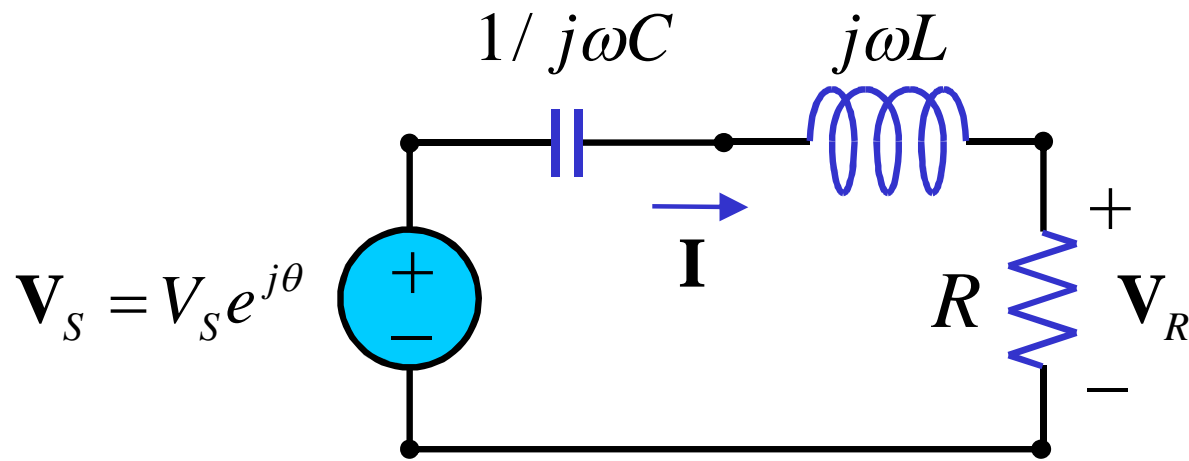
$$P_1 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R} \Rightarrow |\mathbf{V}_1|^2 = 2RP_1$$

$$P_2 = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R} \Rightarrow |\mathbf{V}_2|^2 = 2RP_2$$

$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \left| \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \right| = \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|}$$

$$H(\omega)_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|} = 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{|\mathbf{V}_1|^2} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

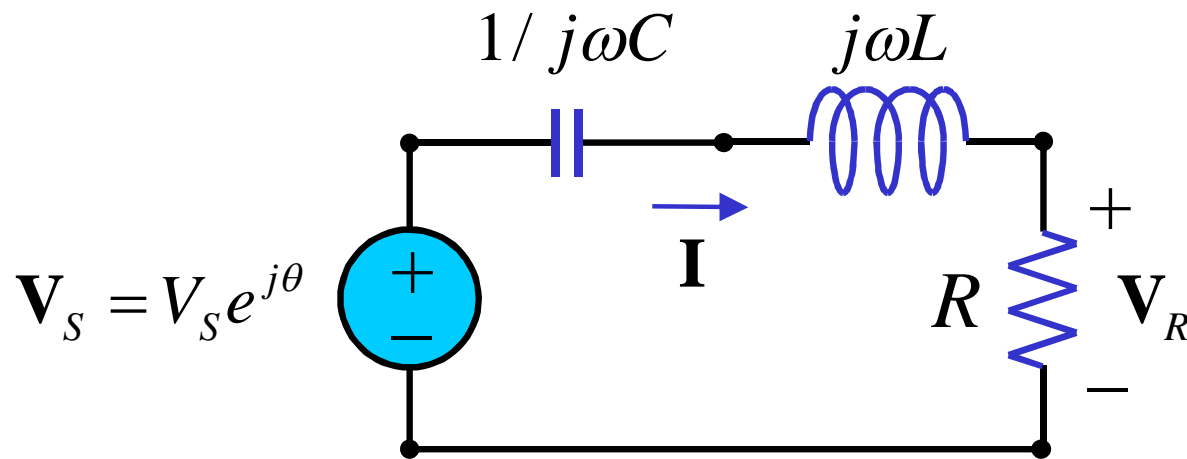
Risonanza serie



$$\mathbf{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_s} = \frac{R}{R + 1/j\omega C + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \quad \phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)$$

Risonanza serie

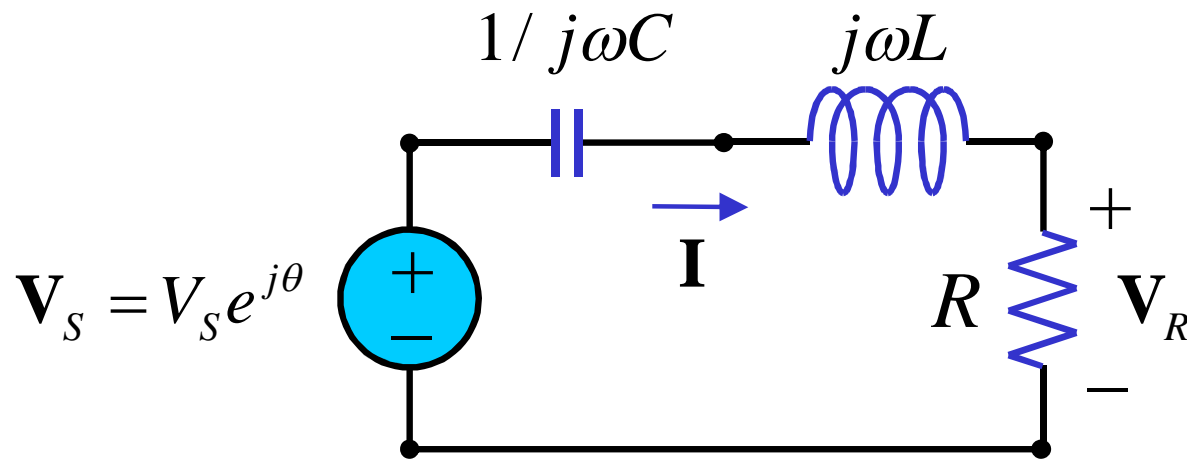


$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2}}$$

La funzione H raggiunge il valore massimo per la pulsazione ω_0 :

$$\frac{\omega_0 L}{R} - \frac{1}{\omega_0 RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Risonanza serie



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

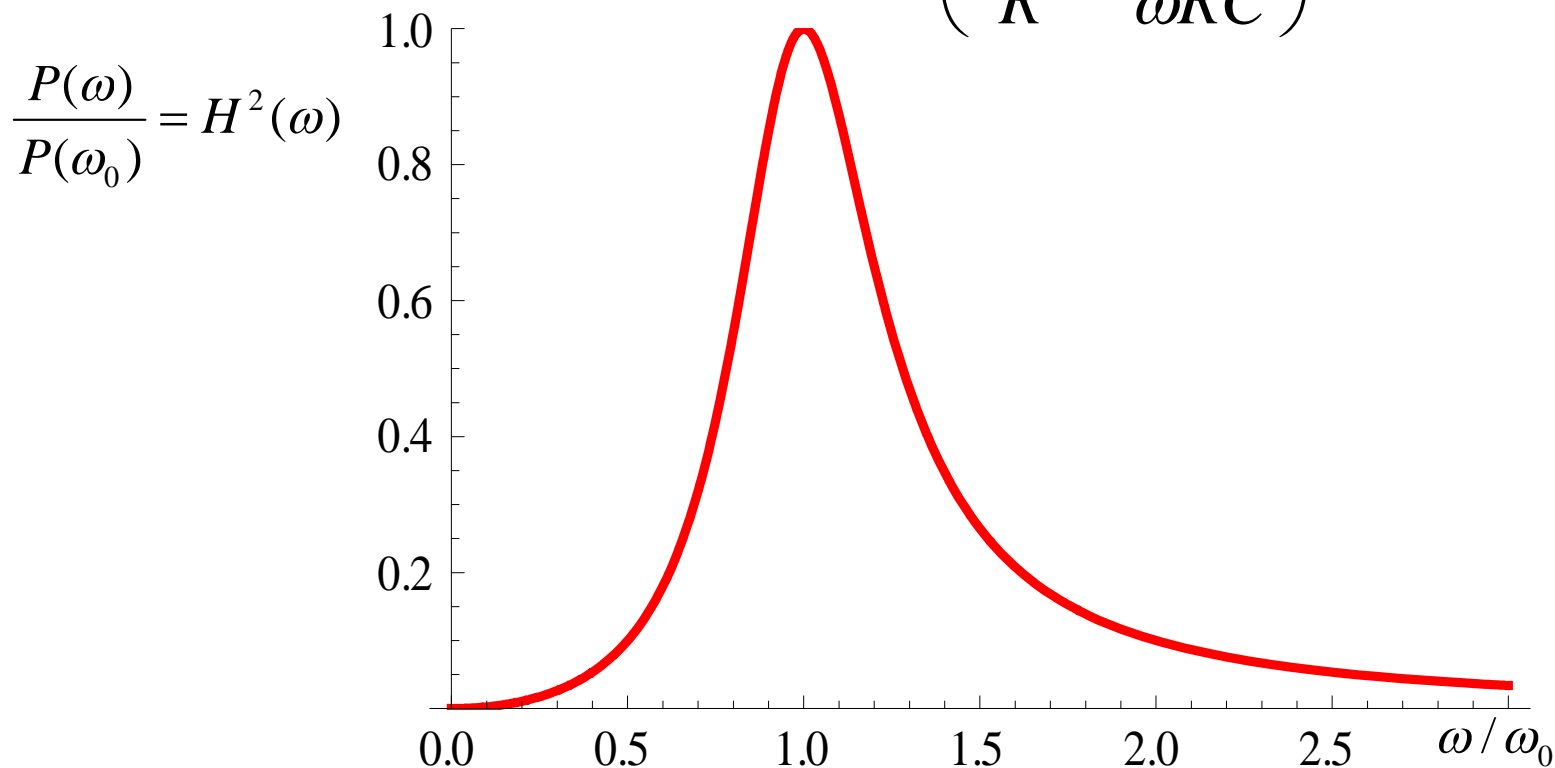
Alla pulsazione ω_0 si ha

- $H(\omega_0) = 1$, $\phi(\omega_0) = 0$ (le tensioni \mathbf{V}_S e \mathbf{V}_R e la corrente \mathbf{I} sono in fase)
- L'impedenza vista dal generatore è puramente resistiva e coincide con R
- $|\mathbf{V}_R|$ è il più grande possibile e quindi la potenza assorbita dalla resistenza R è la massima possibile

Risonanza serie

La **potenza media assorbita dalla resistenza** è:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} R |\mathbf{I}|^2 = \frac{1}{2} \frac{V_s^2}{R} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2} = P(\omega_0) H^2(\omega)$$

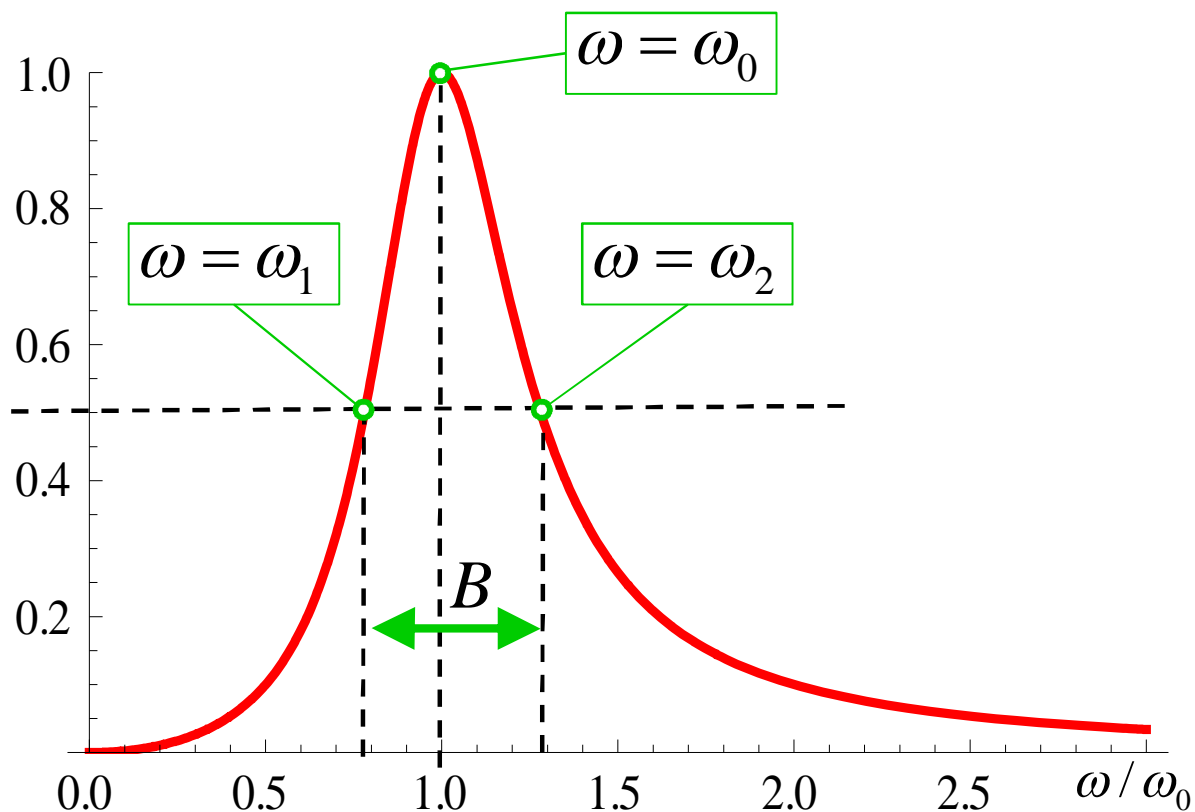


Risonanza serie

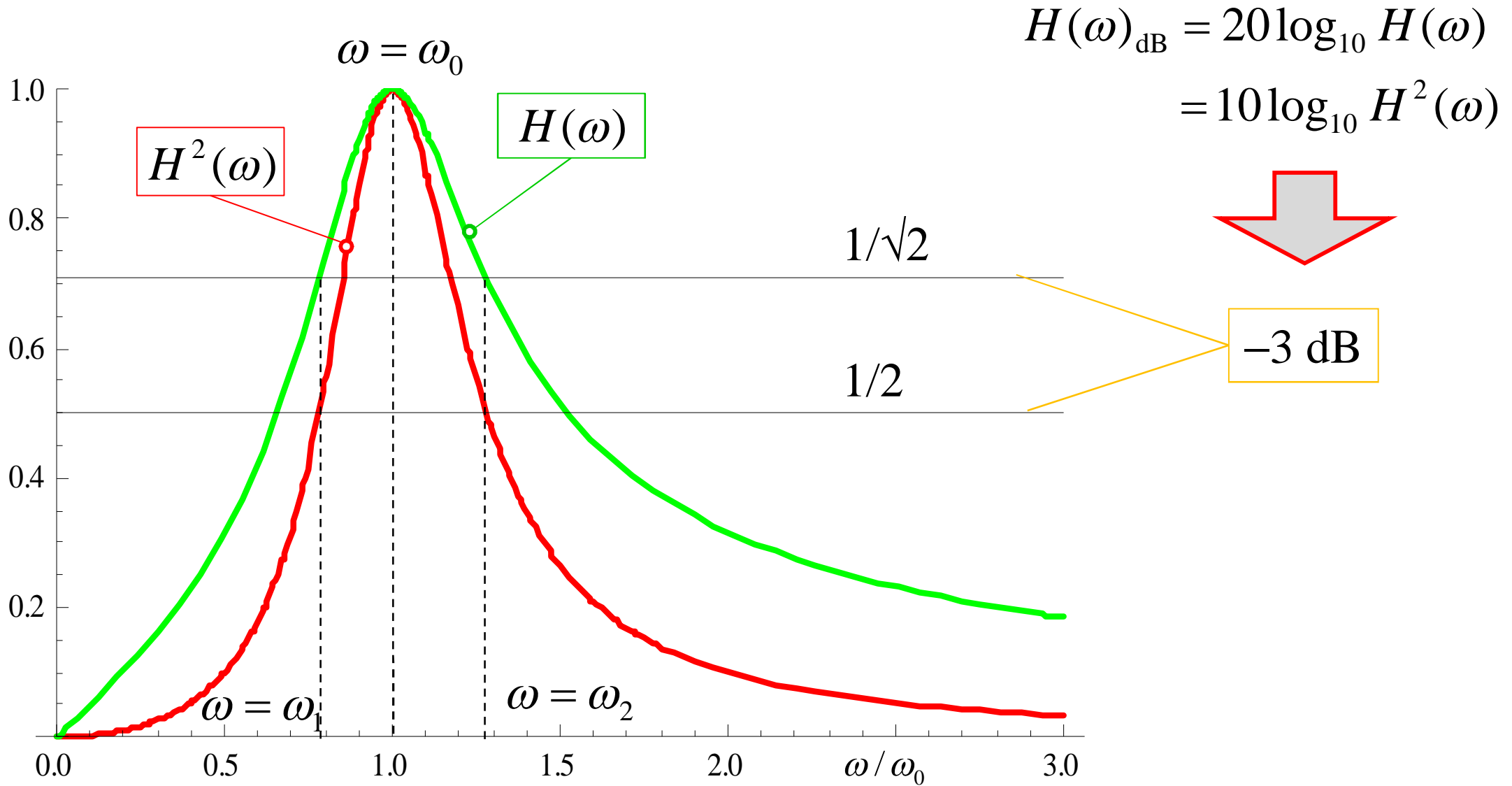
Si definisce **larghezza di banda** la quantità $B = \omega_2 - \omega_1$, dove ω_2 e ω_1 rappresentano le due pulsazione per le quali la potenza assorbita dalla resistenza è la metà di quella massima.

$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega)$$

$$0.5 \rightarrow -3 \text{ dB}$$



Risonanza serie

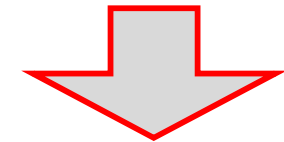


Risonanza serie

$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2}$$

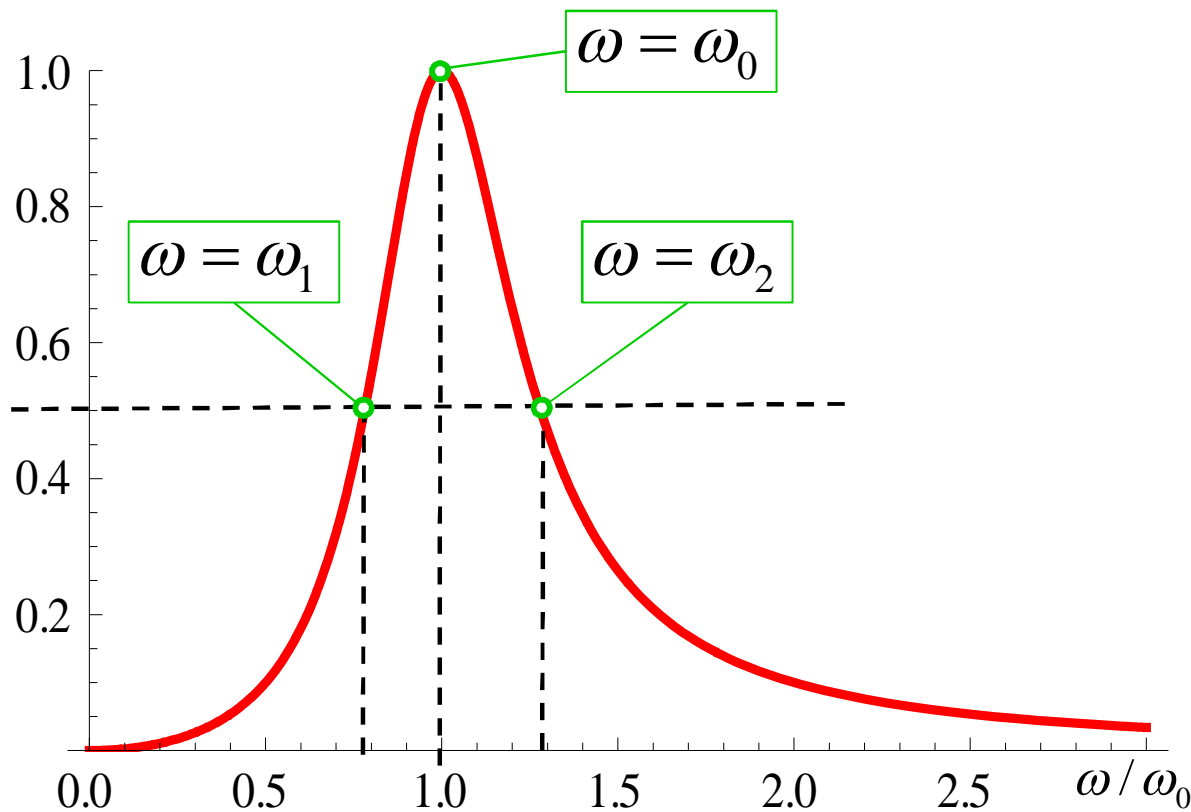
$$\frac{P(\omega_1)}{P(\omega_0)} = \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_0)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega)$$



$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1$$

0.5 → -3 dB



Risonanza serie

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Si verifica facilmente che:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

Risonanza serie

In generale, per un circuito risonante si definisce il **fattore di merito**:

$$Q = \omega_0 \frac{\text{energia immagazzinata nel circuito}}{\text{potenza media dissipata}}$$

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia immagazzinata nel circuito}}{\text{energia dissipata in un periodo alla frequenza di risonanza}}$$

Risonanza serie

Per il circuito RLC serie il **fattore di merito Q** risulta:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} LI^2}{\frac{1}{2} RI^2 \frac{1}{f_0}} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

Risonanza serie

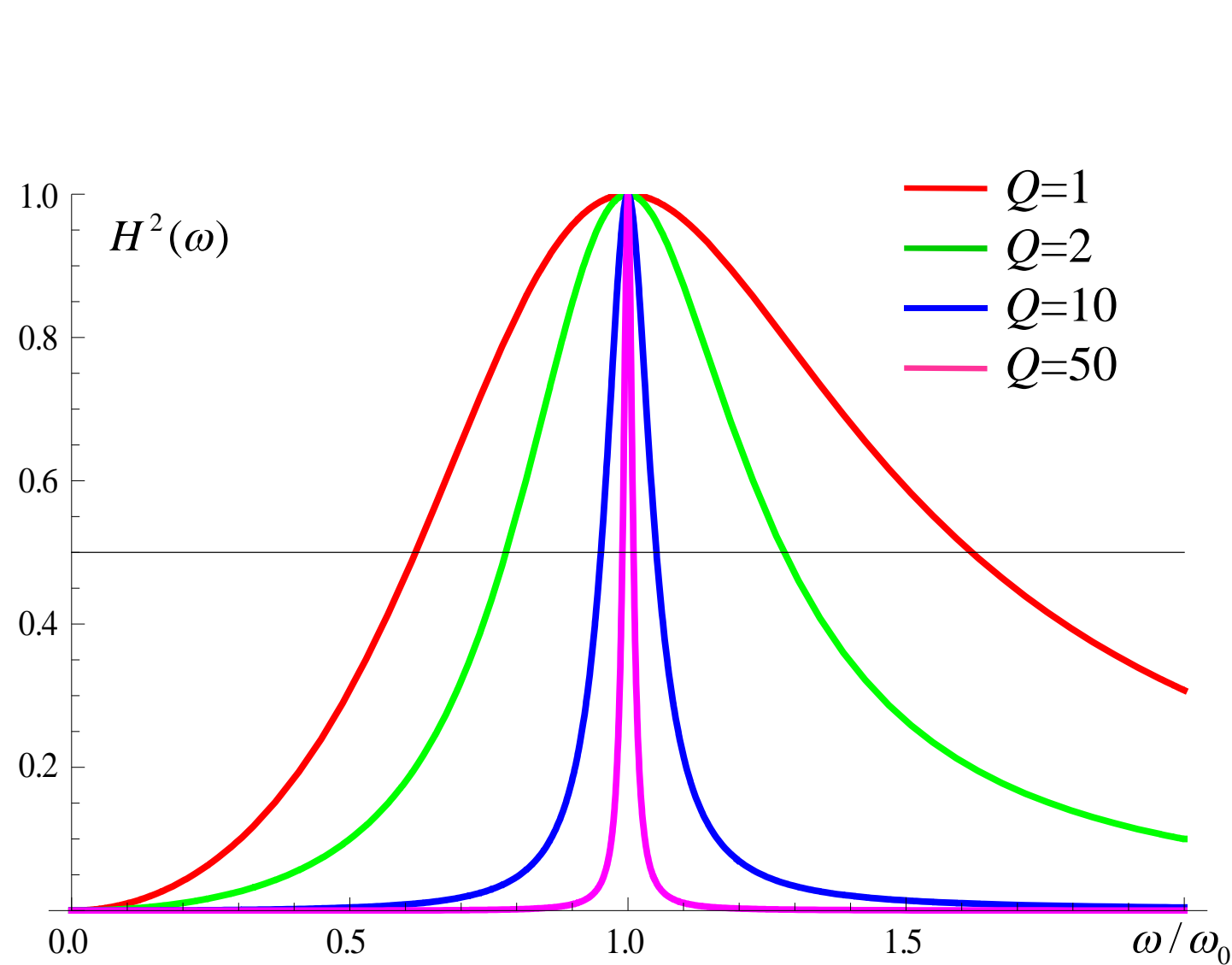
Da $Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$ si ottiene:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$H^2(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2} = \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \omega_0^2} = \omega_0 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

Risonanza serie



$$H^2(\omega) = \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Se $Q \gg 1$ si ha:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

$$\approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) = \omega_0 \pm \frac{B}{2}$$

Risonanza serie

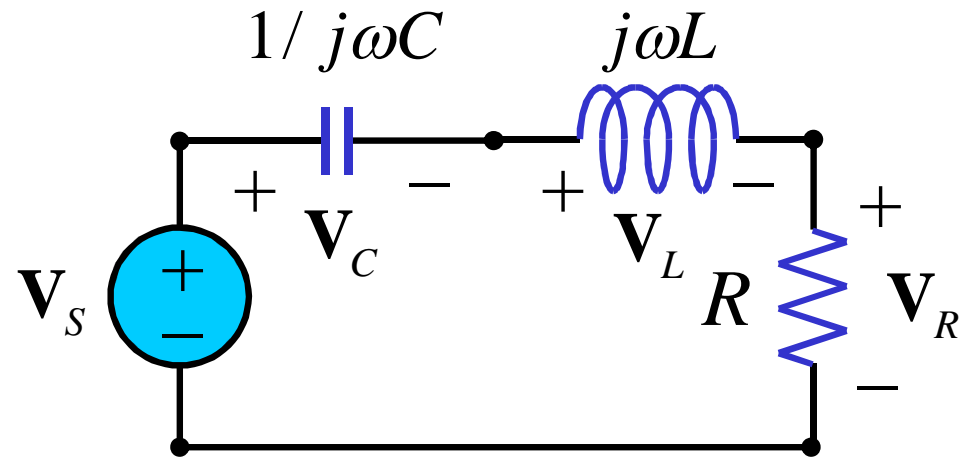
Ricordando che alla risonanza si ha $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e che

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

si ottiene:

$$\mathbf{V}_C = \frac{1/j\omega_0 C}{R + 1/j\omega_0 C + j\omega_0 L} \mathbf{V}_S = \frac{\mathbf{V}_S}{j\omega_0 RC + 1 - \omega_0^2 LC} = \frac{\mathbf{V}_S}{j\omega_0 RC} = -jQ\mathbf{V}_S$$

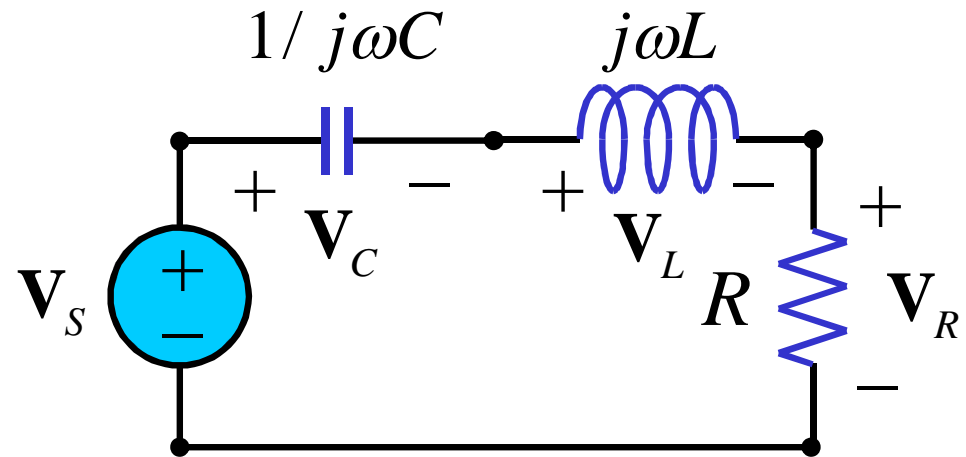
$$\mathbf{V}_L = \frac{j\omega_0 L}{R + 1/j\omega_0 C + j\omega_0 L} \mathbf{V}_S = \frac{\mathbf{V}_S}{\frac{R}{j\omega_0 L} - \frac{1}{\omega_0^2 LC} + 1} = \frac{j\omega_0 L \mathbf{V}_S}{R} = +jQ\mathbf{V}_S$$



Risonanza serie

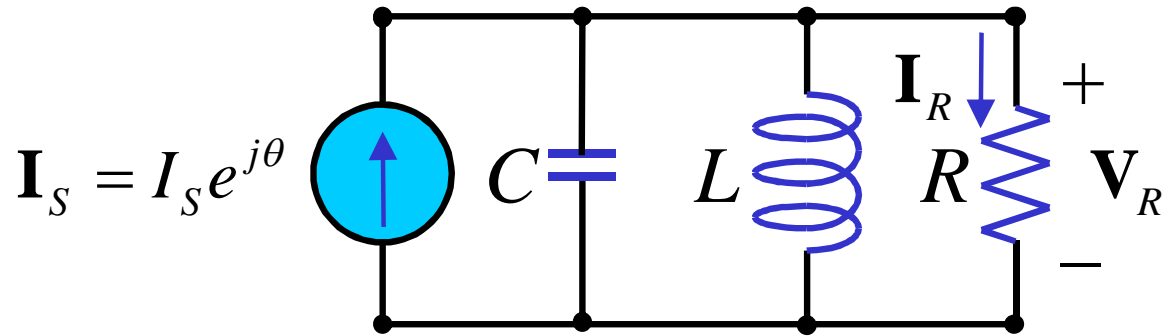
$$\mathbf{V}_C = -jQ\mathbf{V}_S$$

$$\mathbf{V}_L = +jQ\mathbf{V}_S$$



Le tensioni sul condensatore e sull'induttore sono uguali e opposte e nei circuiti ad alto fattore di merito possono raggiungere valori elevatissimi.

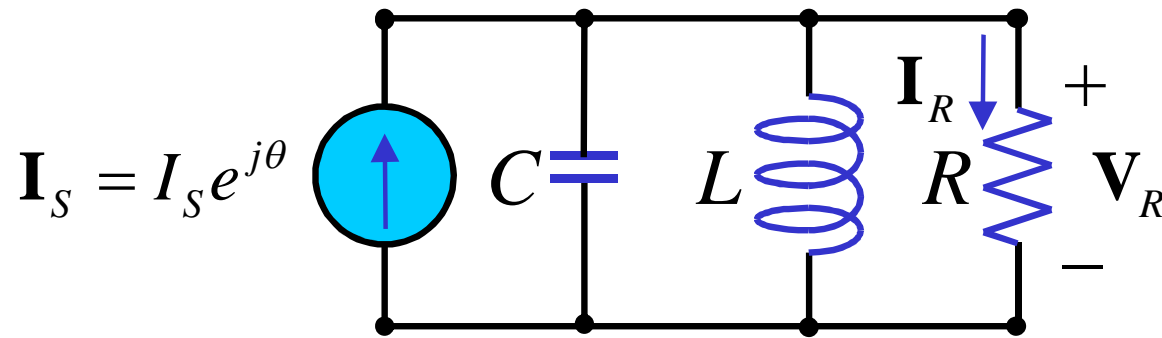
Risonanza parallelo



$$\mathbf{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{\mathbf{I}_R}{\mathbf{I}_S} = \frac{1/R}{1/R + j\omega C + 1/j\omega L} = \frac{1}{1 + j\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2}} \quad \phi(\omega) = -\arctg\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)$$

Risonanza parallelo



$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L} \right)^2}}$$

La funzione H raggiunge il valore massimo per la pulsazione ω_0 :

$$\omega RC - \frac{R}{\omega L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Risonanza parallelo

Per il circuito RLC parallelo il **fattore di merito Q** risulta:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia immagazzinata nel circuito}}{\text{energia dissipata in un periodo alla frequenza di risonanza}} =$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2} C V_R^2}{\frac{1}{2} \frac{V_R^2}{R} \frac{1}{f_0}} = \omega_0 R C = \frac{R}{\omega_0 L}$$

Risonanza parallelo

La **potenza media assorbita dalla resistenza** è:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} R |\mathbf{I}_R|^2 = \frac{1}{2} R I_S^2 \frac{1}{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L} \right)^2} = P(\omega_0) H^2(\omega)$$

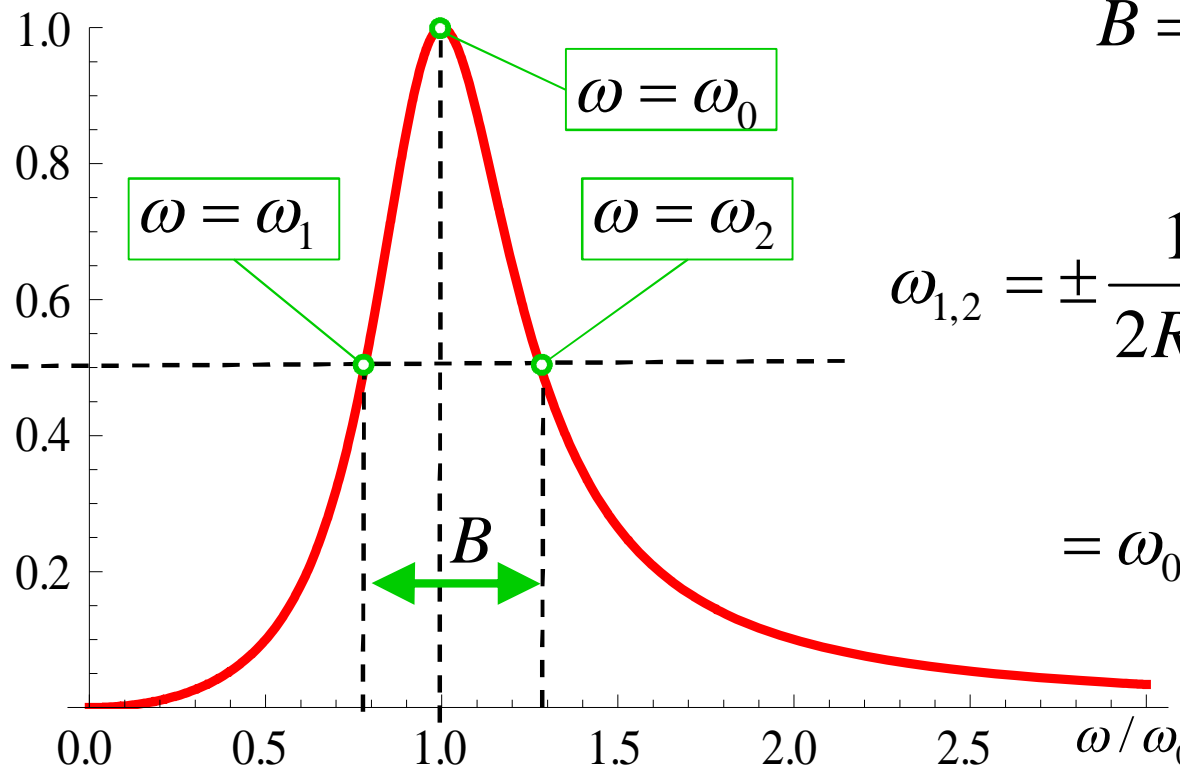
$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega)$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$$

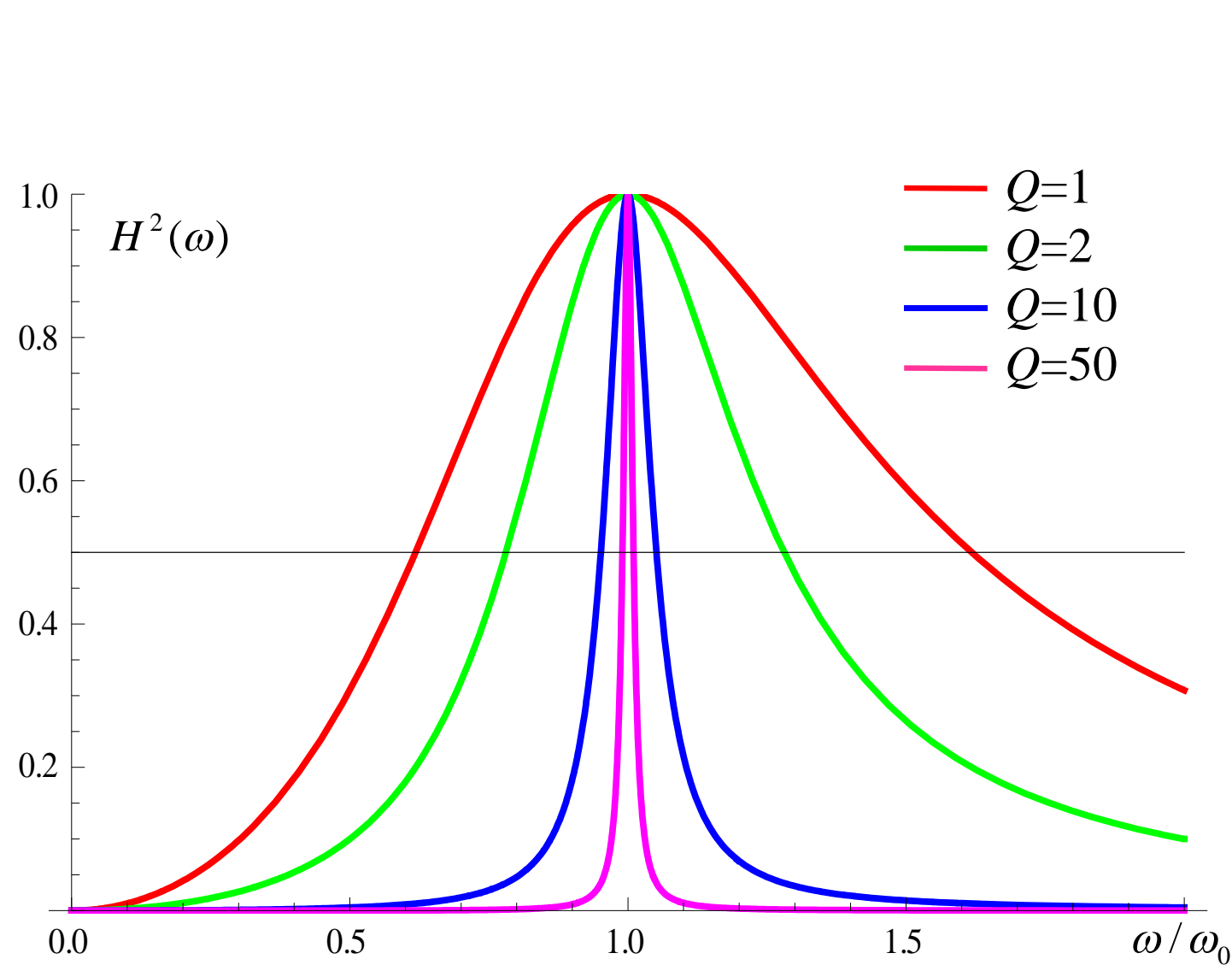
$$\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC} \right)^2 + \omega_0^2}$$

$$= \omega_0 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

0.5 → -3 dB



Risonanza parallelo



$$H^2(\omega) = \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Se $Q \gg 1$ si ha:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

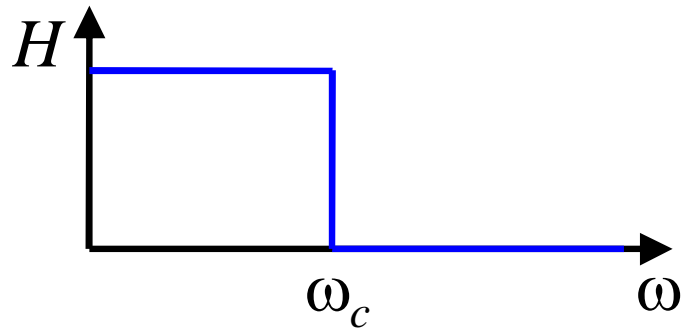
$$\approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) = \omega_0 \pm \frac{B}{2}$$

Filtri

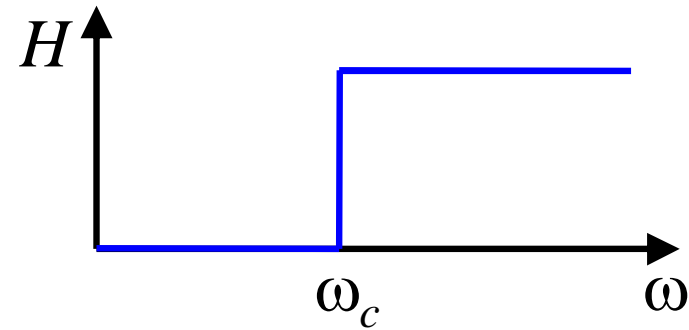
Un filtro è un circuito progettato per lasciar passare i segnali alle frequenze desiderate e per bloccare o attenuare quelli alle altre frequenze

Filtri

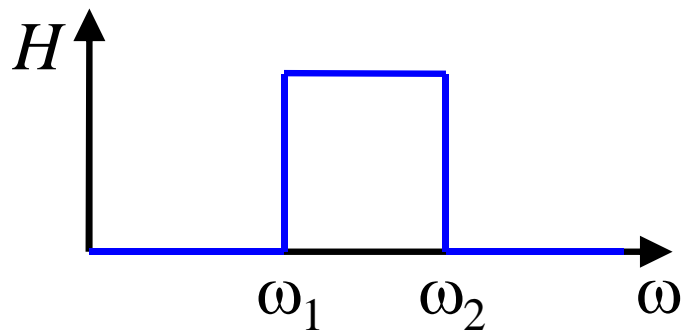
Di norma si distinguono quattro tipologie di circuiti filtranti, in base alla **funzione di trasferimento ideale** che devono realizzare:



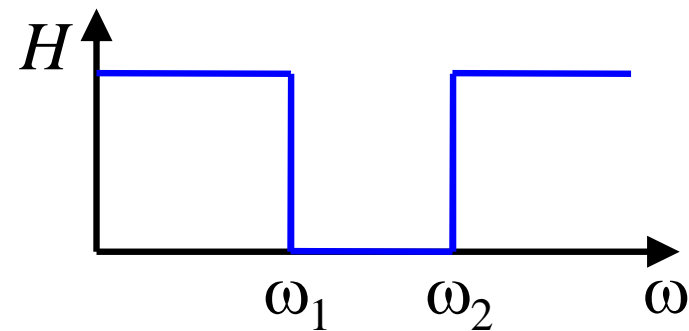
Filtro passa basso



Filtro passa alto



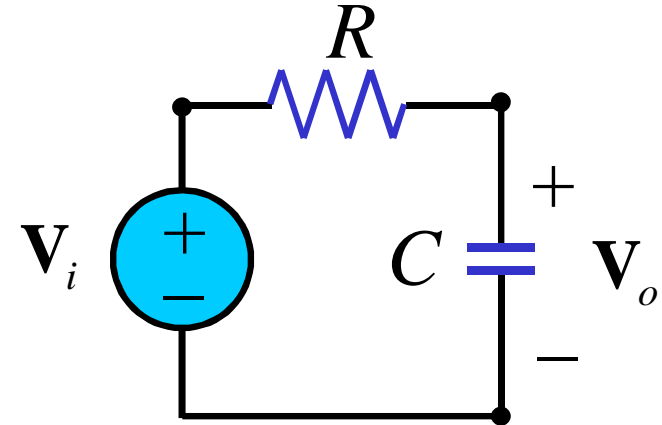
Filtro passa banda



Filtro arresta banda

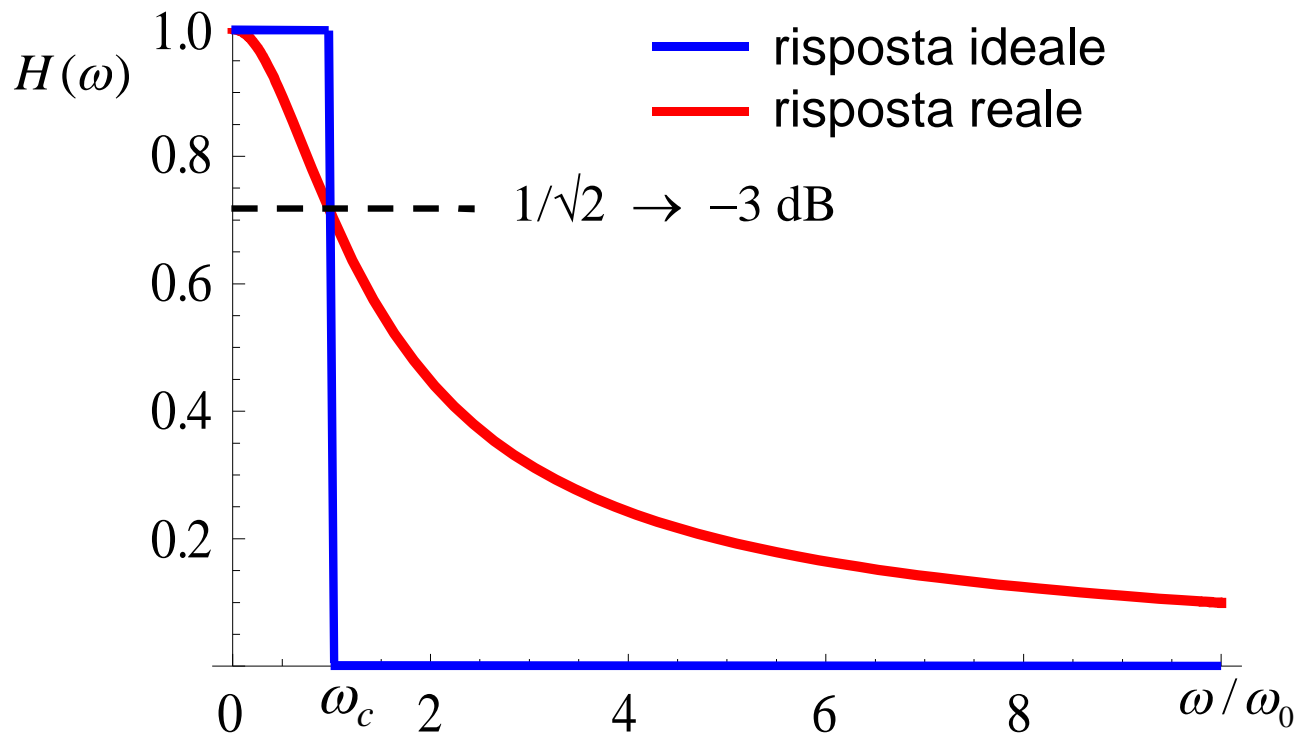
Filtri

Esempio di filtro **passa basso**:



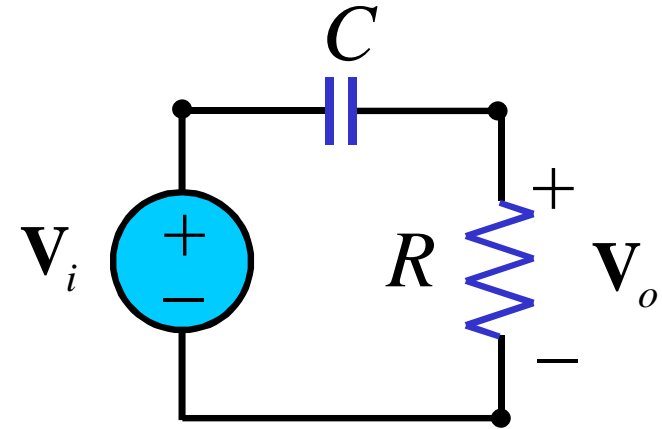
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$



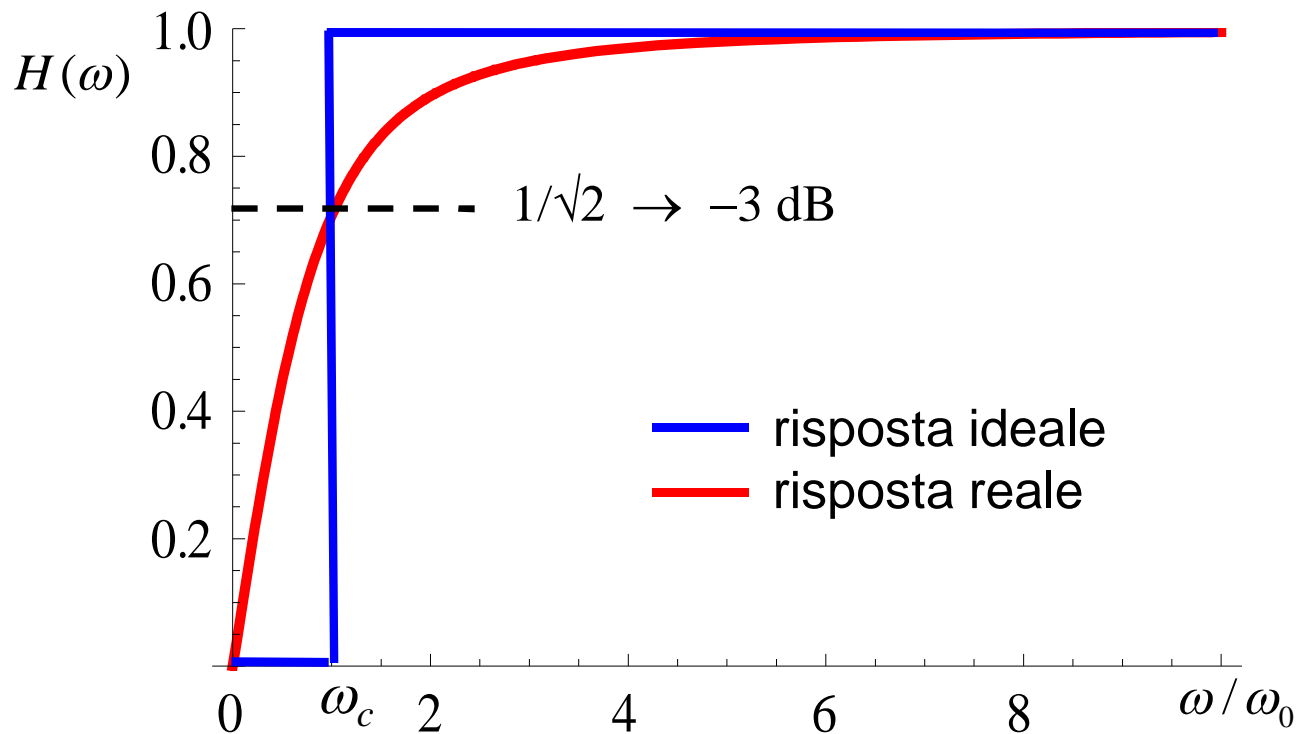
Filtri

Esempio di filtro **passa alto**:



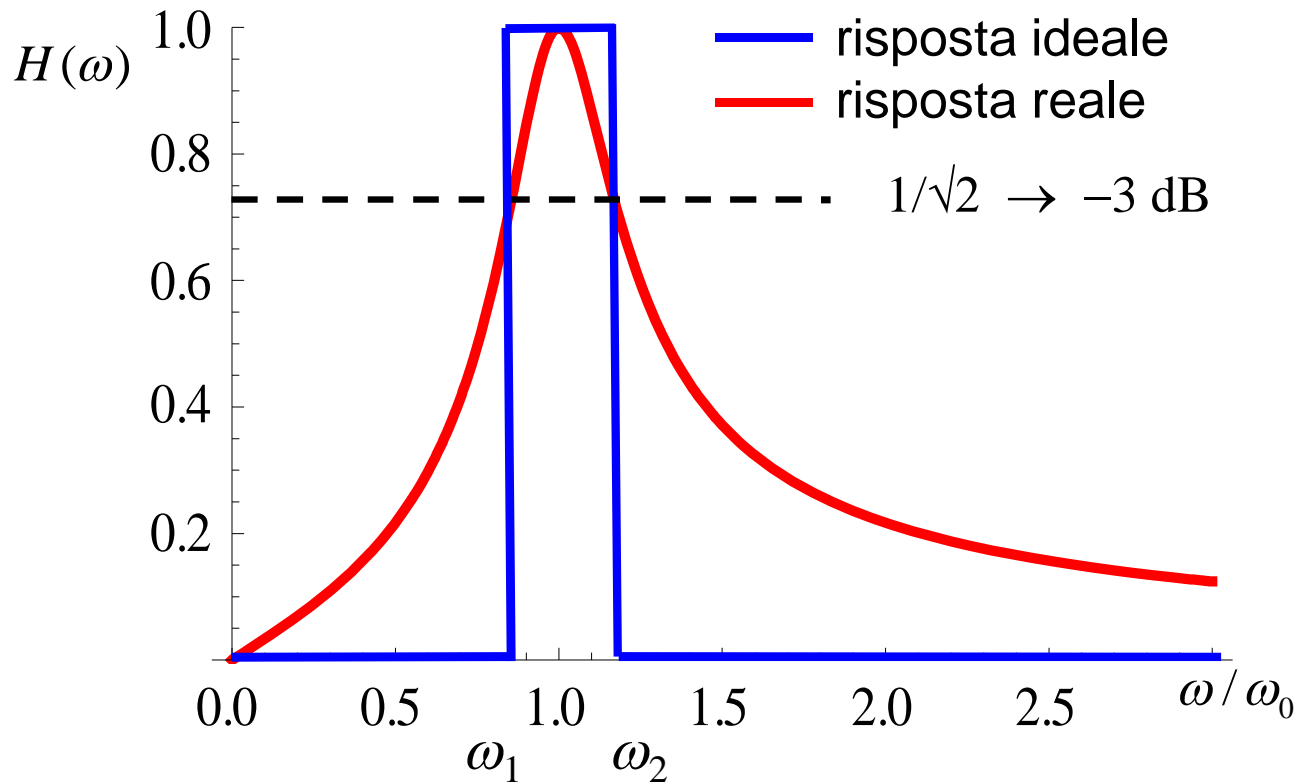
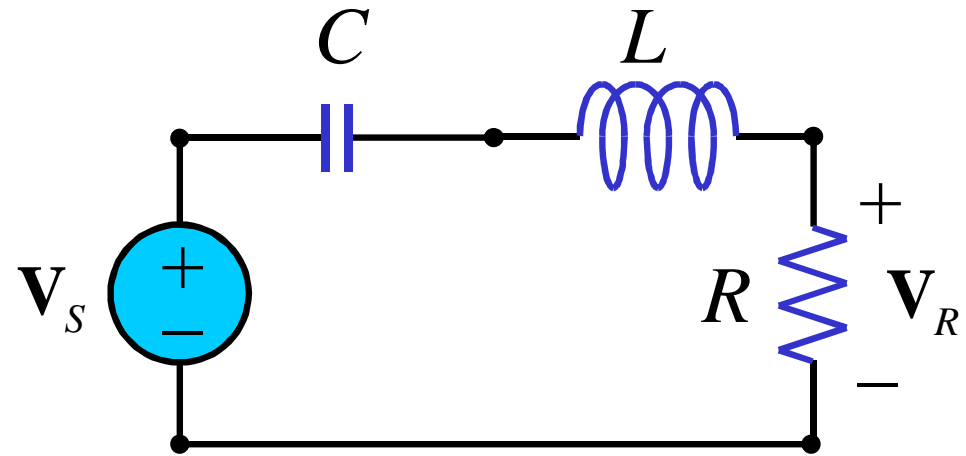
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$



Filtri

Esempio di filtro **passa banda**:



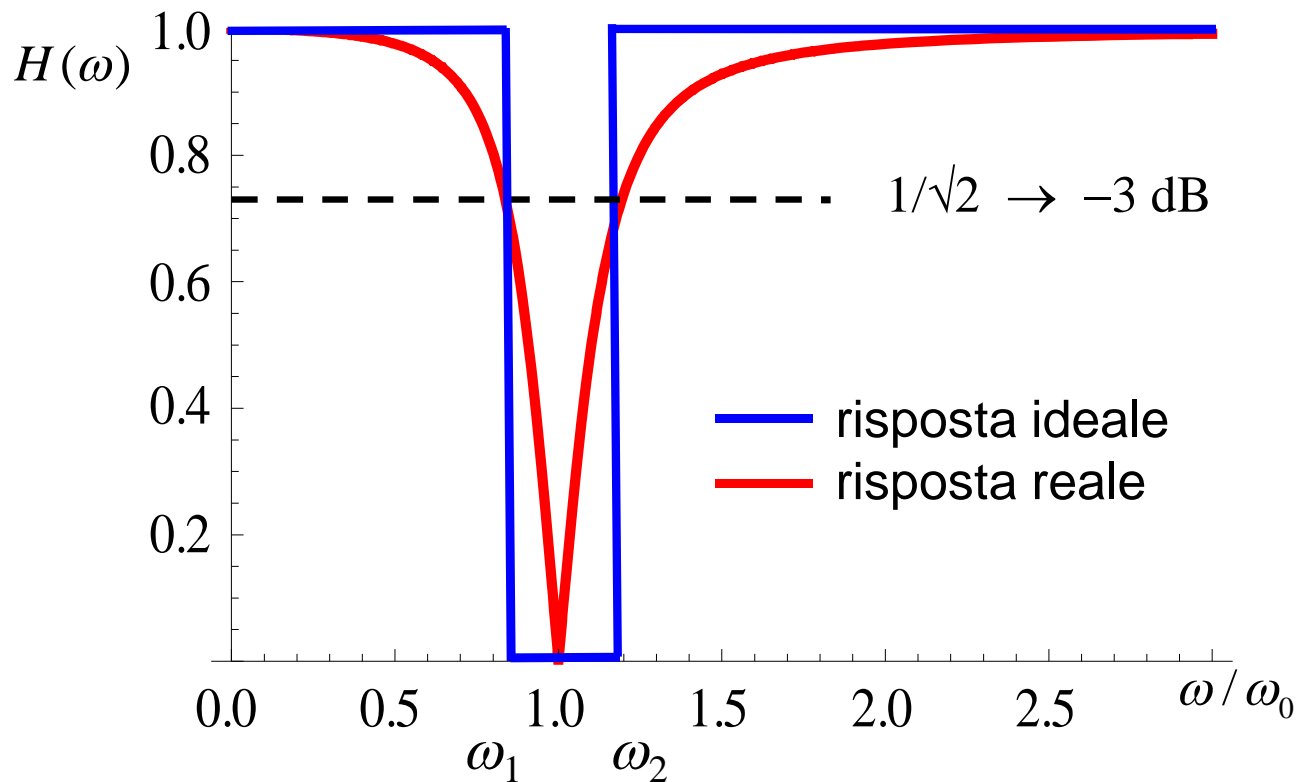
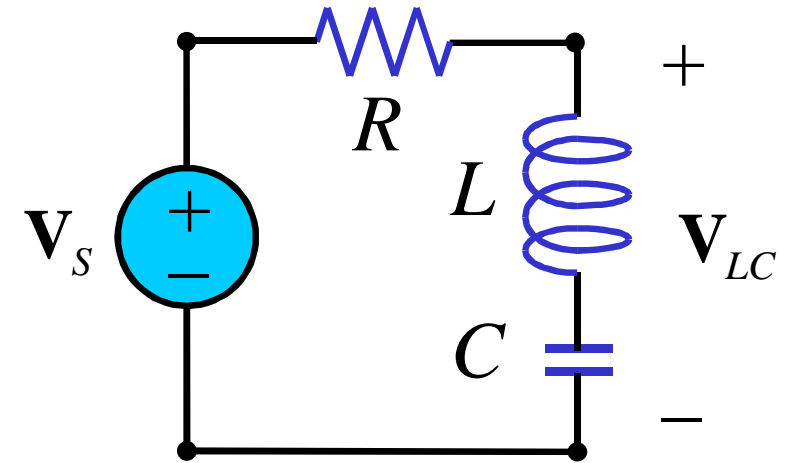
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_S} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

Filtri

Esempio di filtro **arresta banda**:



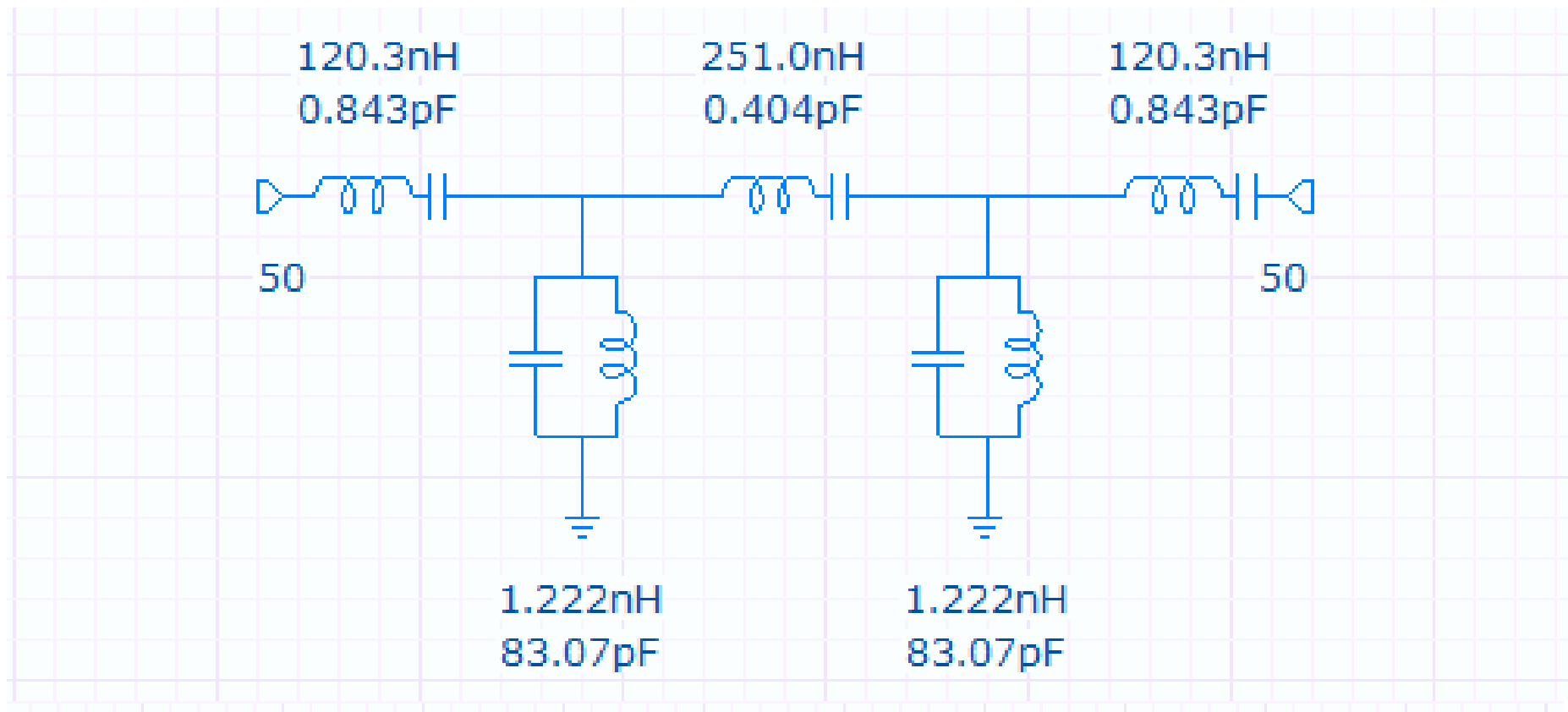
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{LC}}{\mathbf{V}_S} = \frac{jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

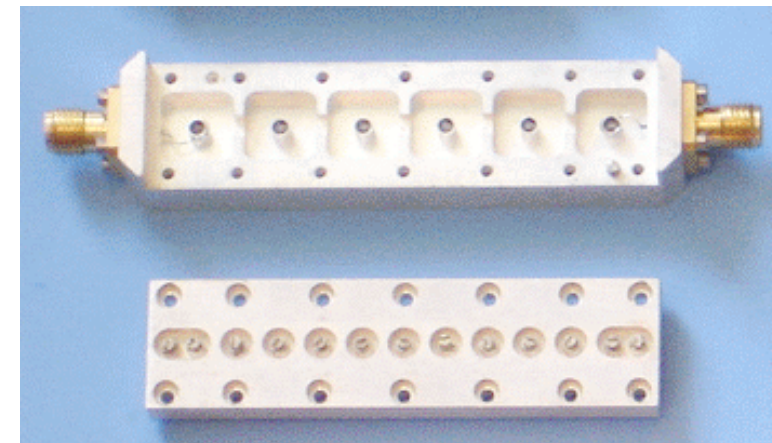
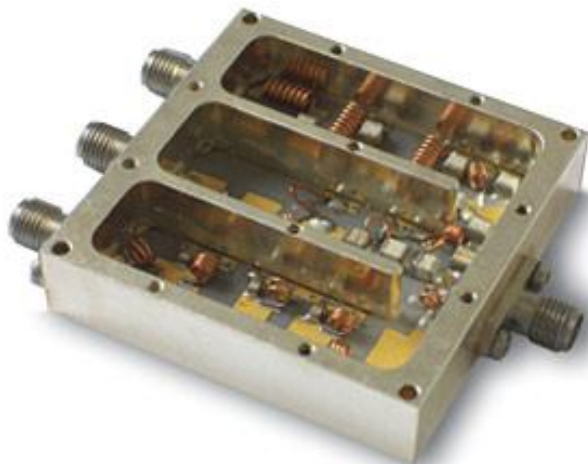
Filtri

Esempio di filtro **passa banda**



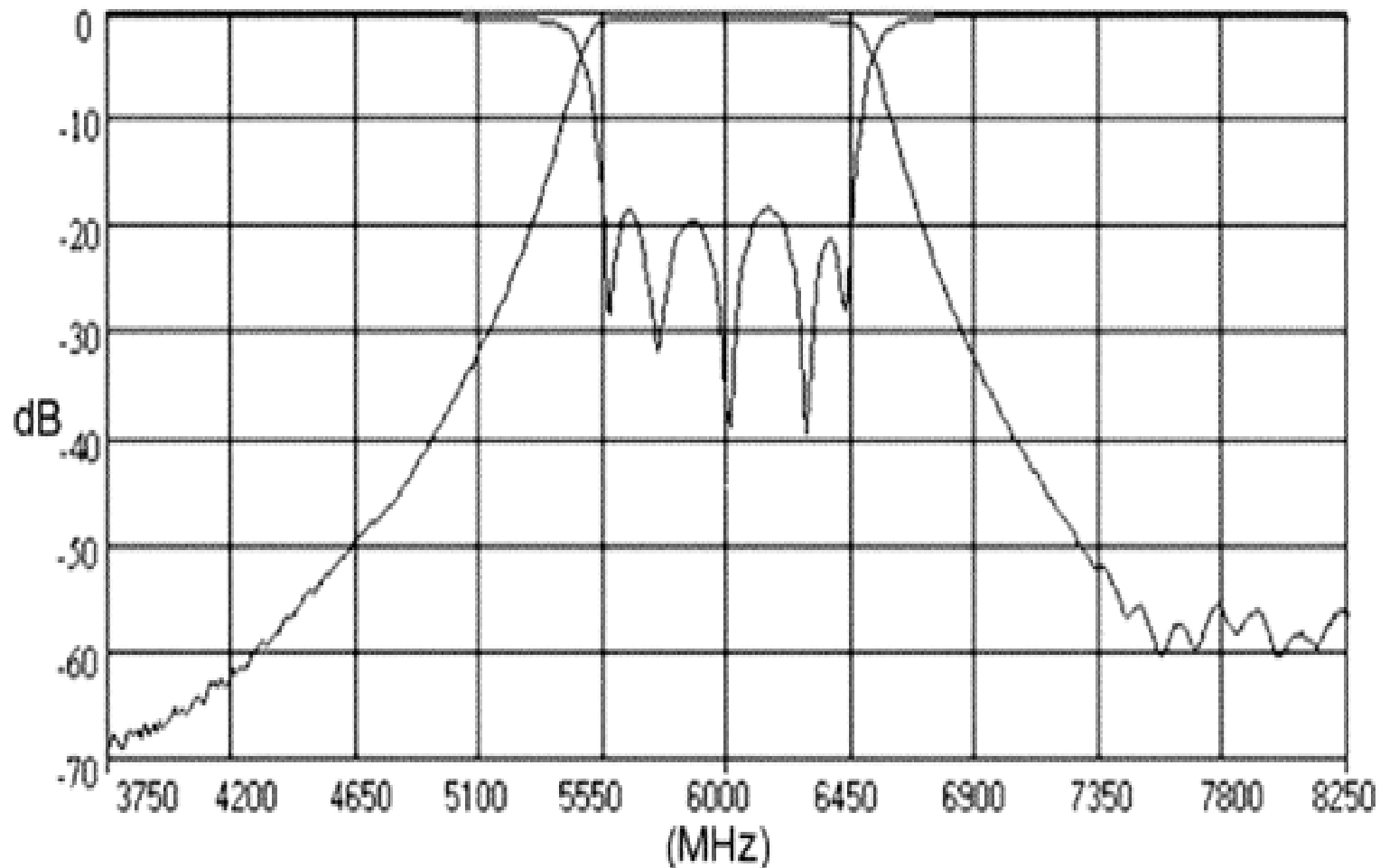
Filtri

Esempi di realizzazione



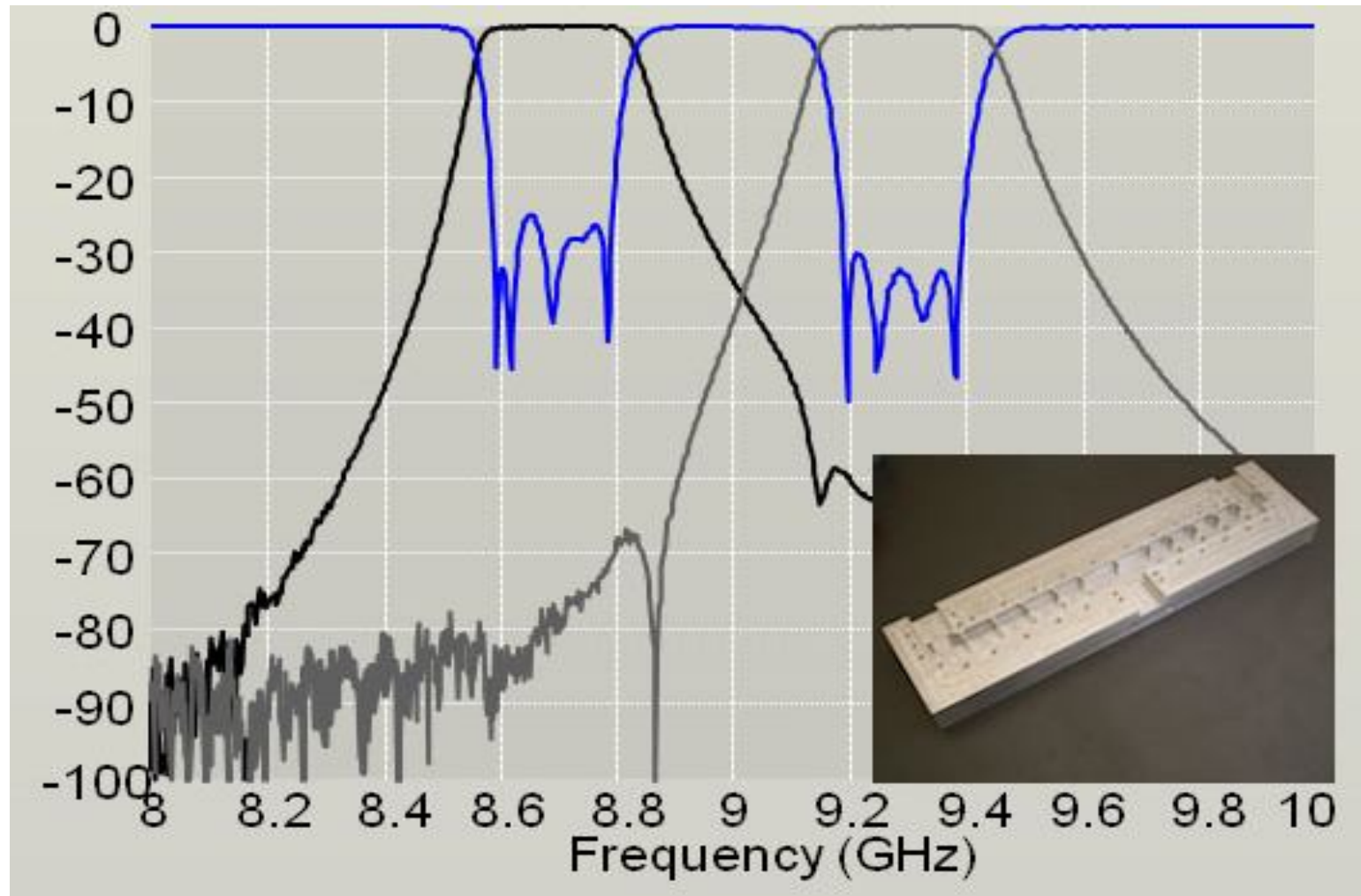
Filtri

Esempio di filtro **passa banda**



Filtri

Esempio di **diplexer passa banda** per selezione di canale



Diagrammi di Bode

In generale, la funzione di trasferimento può sempre essere posta nella **forma canonica** (o forma di Bode):

$$\mathbf{H}(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^Z (1 + j\omega / z_j) \prod_{n=1}^N \left[1 + 2\xi_n (j\omega / \omega_{Z_n}) + (j\omega / \omega_{Z_n})^2 \right]}{(j\omega)^k \prod_{i=1}^P (1 + j\omega / p_i) \prod_{m=1}^M \left[1 + 2\zeta_m (j\omega / \omega_{P_m}) + (j\omega / \omega_{P_m})^2 \right]}$$

dove K , z_j , ξ_h , ω_{Z_n} , p_i , ζ_m , ω_{P_m} sono tutte quantità reali

Diagrammi di Bode

$$\mathbf{H}(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^Z (1 + j\omega / z_j) \prod_{n=1}^N \left[1 + 2\xi_n (j\omega / \omega_{Z_n}) + (j\omega / \omega_{Z_n})^2 \right]}{(j\omega)^k \prod_{i=1}^P (1 + j\omega / p_i) \prod_{m=1}^M \left[1 + 2\zeta_m (j\omega / \omega_{P_m}) + (j\omega / \omega_{P_m})^2 \right]}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} H_{\text{dB}}(\omega) &= 20 \log_{10} |\mathbf{H}| = 20 \log_{10} K - k 20 \log_{10} \omega \\ &\quad + \sum_{j=1}^Z 10 \log_{10} \left[1 + (\omega / z_j)^2 \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^N 10 \log_{10} \left[(1 - (\omega / \omega_{Z_n})^2)^2 + 4\xi_n^2 (\omega / \omega_{Z_n})^2 \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^P 10 \log_{10} (1 + (\omega / p_i)^2) \\ &\quad - \sum_{m=1}^M 10 \log_{10} \left[(1 - (\omega / \omega_{P_m})^2)^2 + 4\zeta_m^2 (\omega / \omega_{P_m})^2 \right] \end{aligned}$$

Diagrammi di Bode

$$\mathbf{H}(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^Z (1 + j\omega / z_j) \prod_{n=1}^N \left[1 + 2\xi_n (j\omega / \omega_{Z_n}) + (j\omega / \omega_{Z_n})^2 \right]}{(j\omega)^k \prod_{i=1}^P (1 + j\omega / p_i) \prod_{m=1}^M \left[1 + 2\zeta_m (j\omega / \omega_{P_m}) + (j\omega / \omega_{P_m})^2 \right]}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = \arg | \mathbf{H} | = & -k \frac{\pi}{2} \\ & + \sum_{j=1}^Z \arctg(\omega / z_j) + \sum_{n=1}^N \arctg \frac{2\xi_n (\omega / \omega_{Z_n})}{1 - (\omega / \omega_{Z_n})^2} \\ & - \sum_{i=1}^P \arctg(\omega / p_i) - \sum_{m=1}^M \arctg \frac{2\zeta_m (\omega / \omega_{P_m})}{1 - (\omega / \omega_{P_m})^2} \end{aligned}$$

Diagrammi di Bode

Per tracciare i grafici di H_{dB} e ϕ è sufficiente saper tracciare l'andamento delle seguenti funzioni e sommarle in forma grafica:

$$20 \log_{10} K$$

$$k 20 \log_{10} \omega$$

$$10 \log_{10} \left[1 + (\omega / \alpha)^2 \right]$$

$$10 \log_{10} \left[(1 - (\omega / \alpha)^2)^2 + \gamma^2 (\omega / \alpha)^2 \right]$$

$$k \frac{\pi}{2}$$

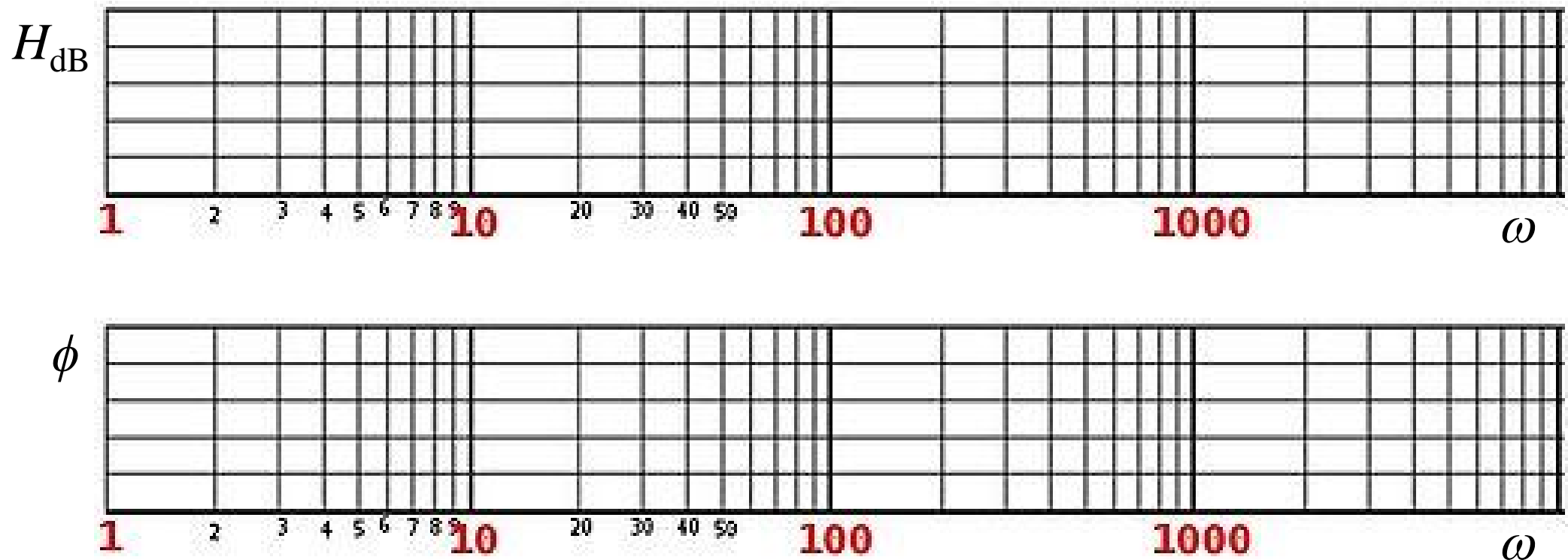
$$\text{arctg}(\omega / \alpha)$$

$$\text{arctg} \frac{\gamma(\omega / \alpha)}{1 - (\omega / \alpha)^2}$$

Di seguito vengono studiati separatamente gli andamenti di queste funzioni.

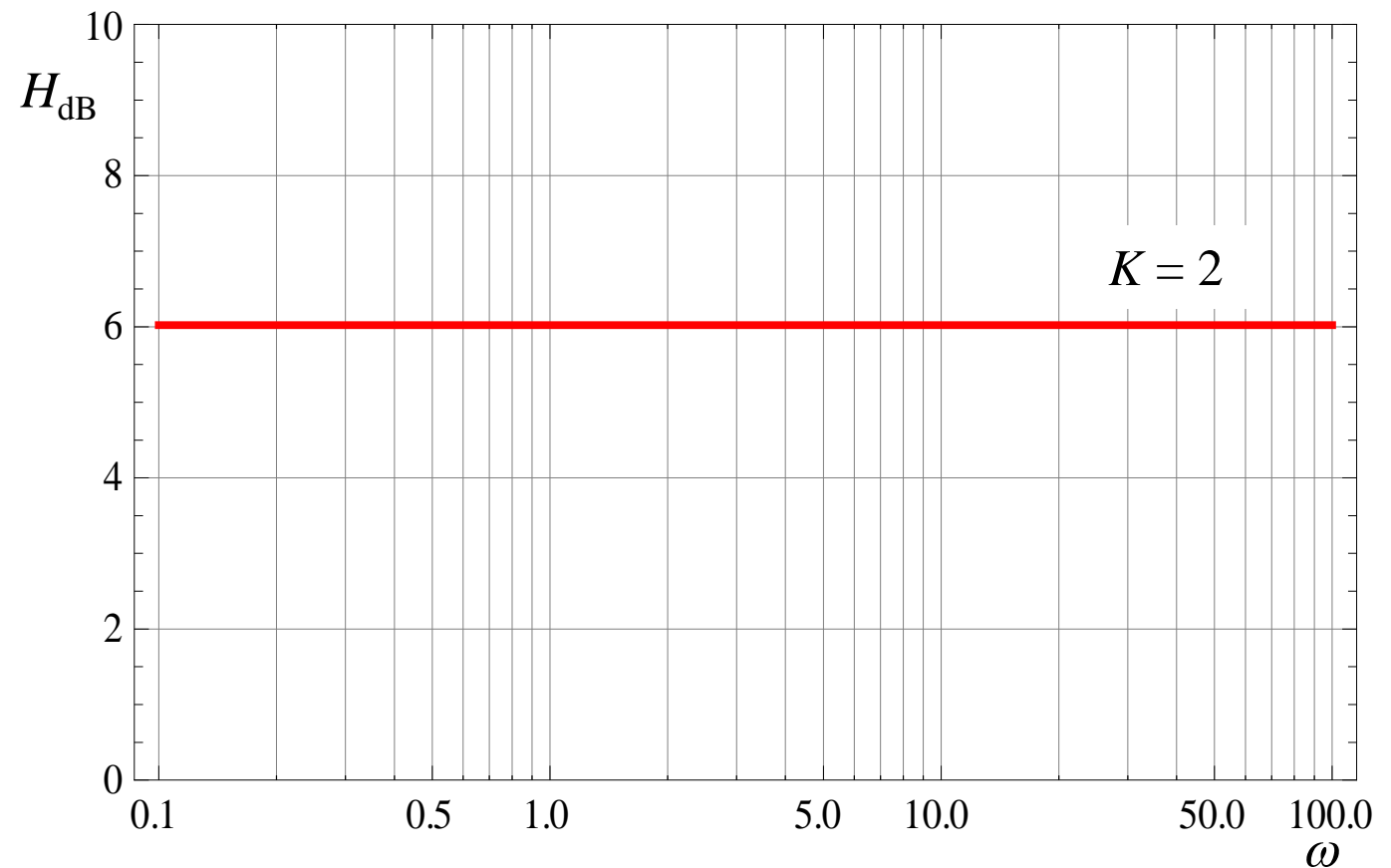
Diagrammi di Bode

H_{dB} e ϕ vengono normalmente tracciati su un grafico di tipo semilogaritmico, in cui la scala dell'asse delle ascisse (pulsazioni ω) è logaritmica:



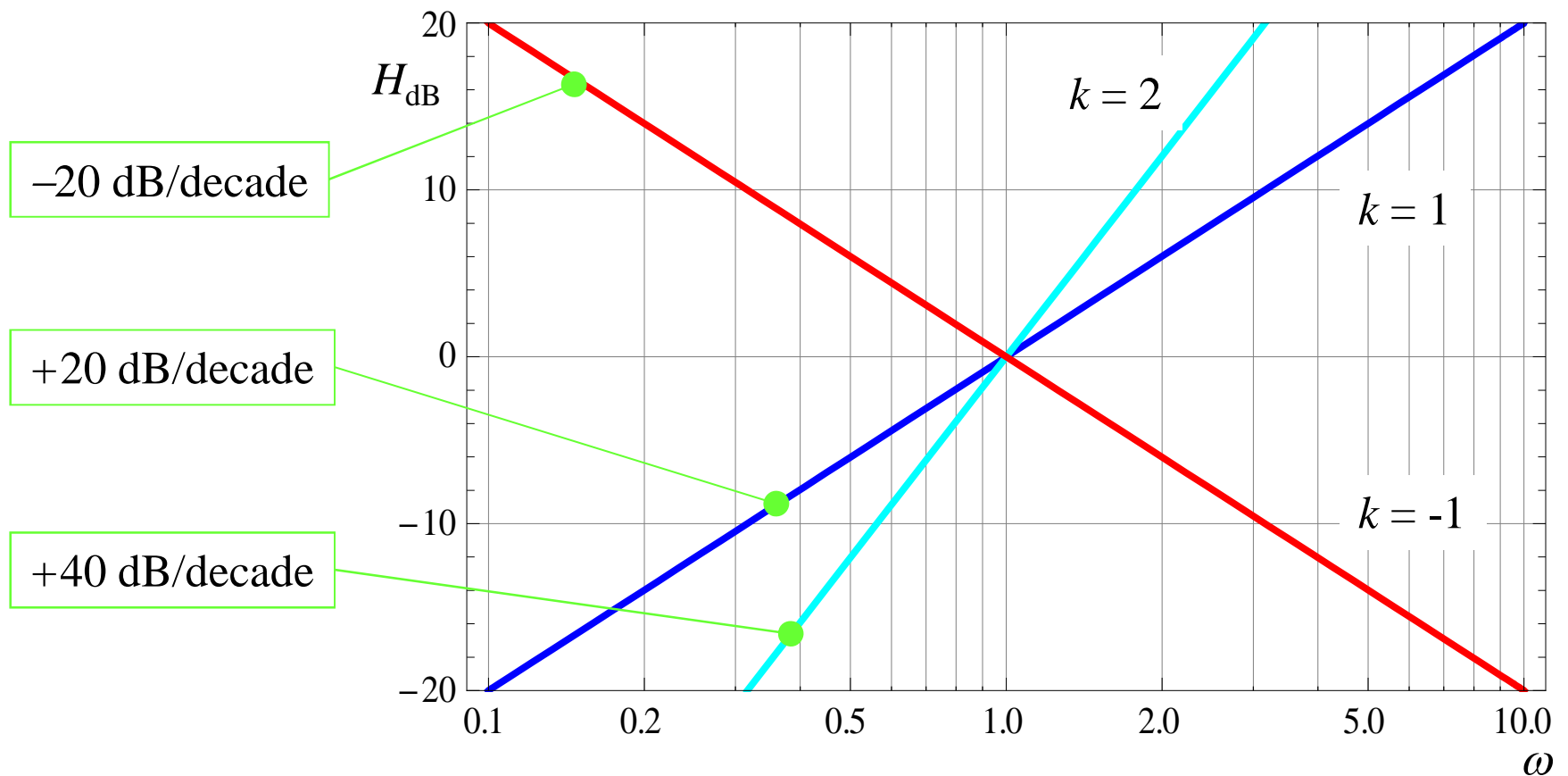
Diagrammi di Bode

$$20\log_{10} K$$



Diagrammi di Bode

$$k 20 \log_{10} \omega$$

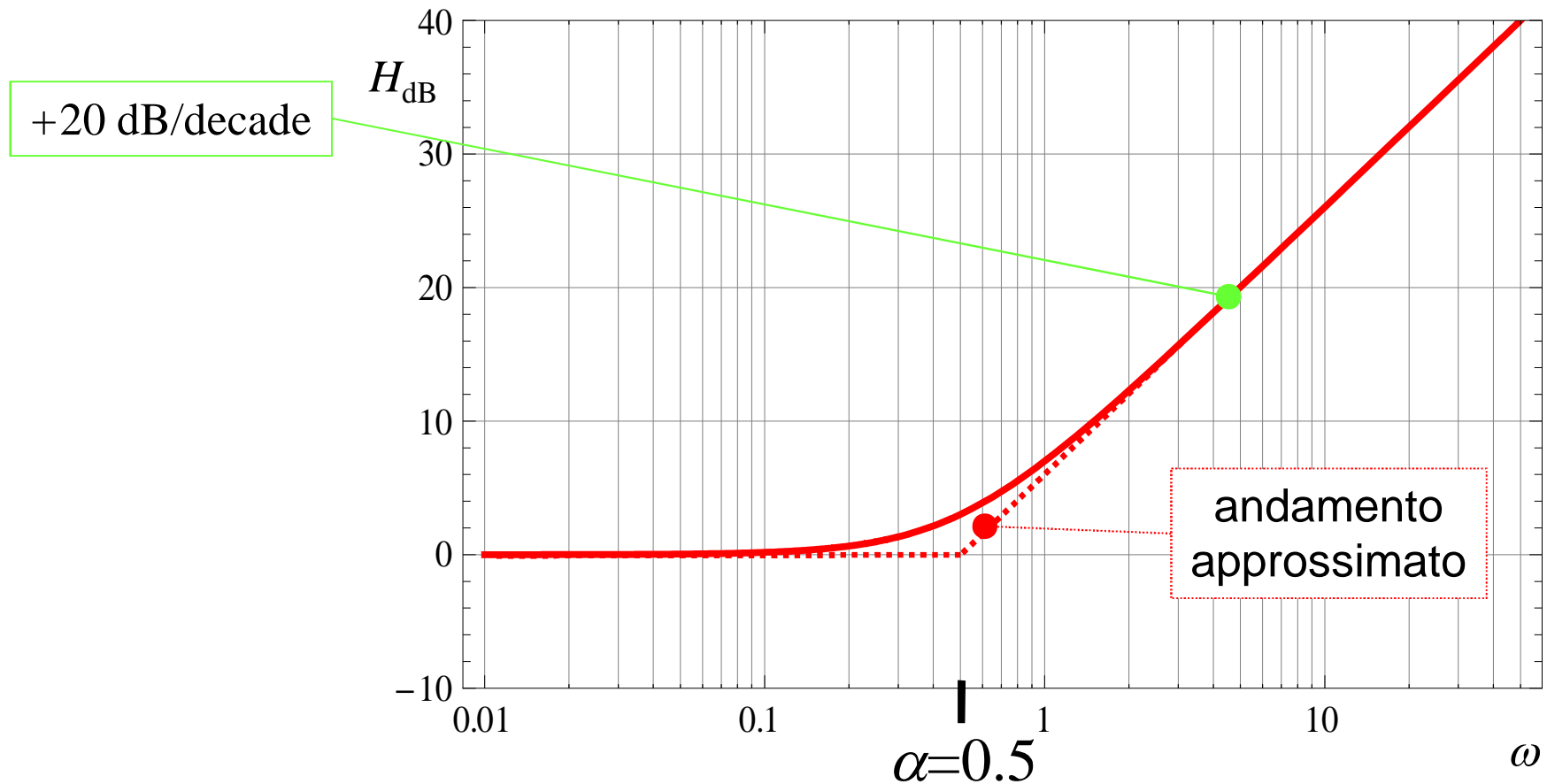


Diagrammi di Bode

$$10\log_{10}\left[1 + (\omega / \alpha)^2\right]$$

$$\xrightarrow{\omega \ll \alpha} 10\log_{10}[1] = 0$$

$$\xrightarrow{\omega \gg \alpha} 10\log_{10}\left[(\omega / \alpha)^2\right] = 20\log_{10}[\omega / \alpha]$$

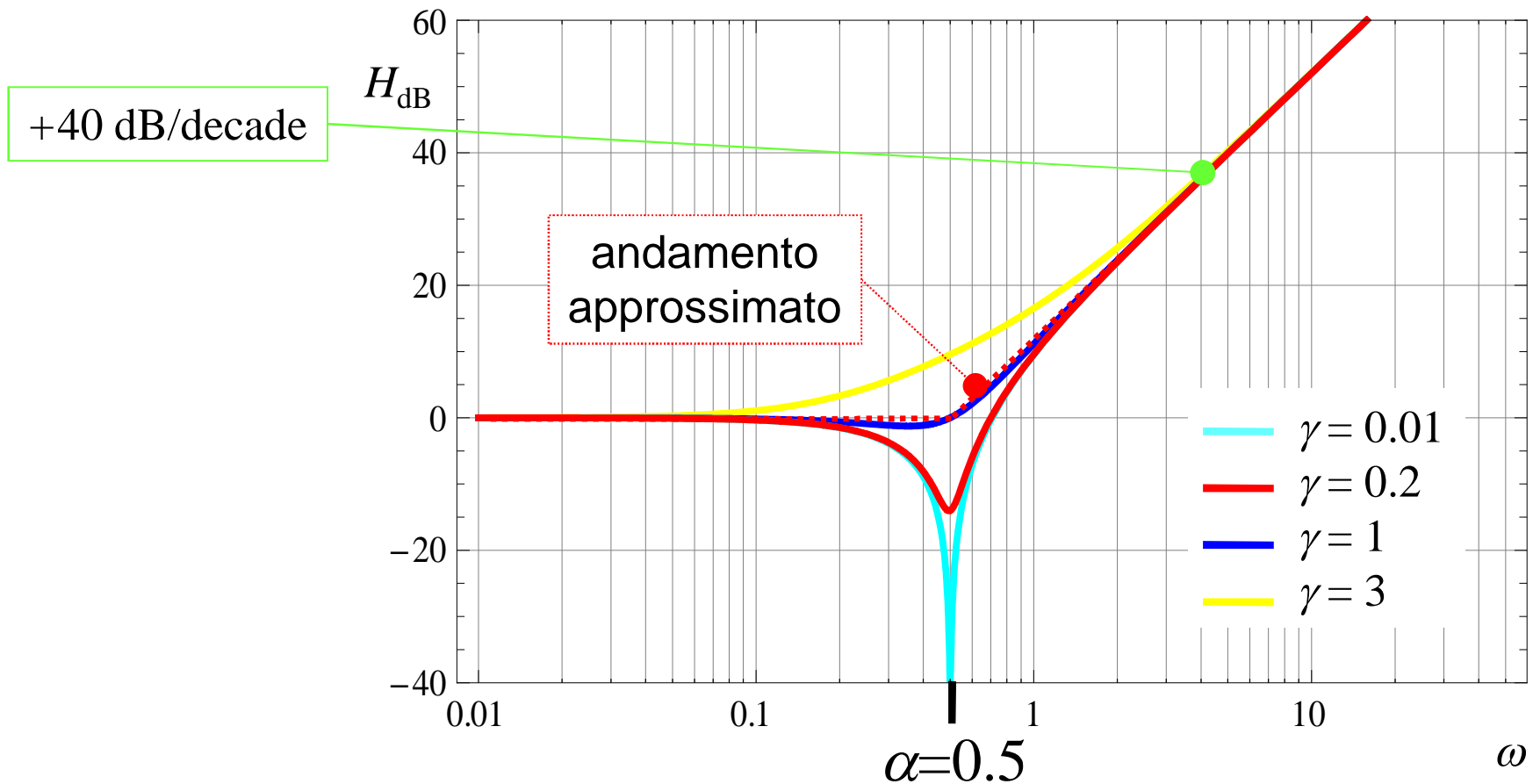


Diagrammi di Bode

$$10\log_{10}\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right]$$

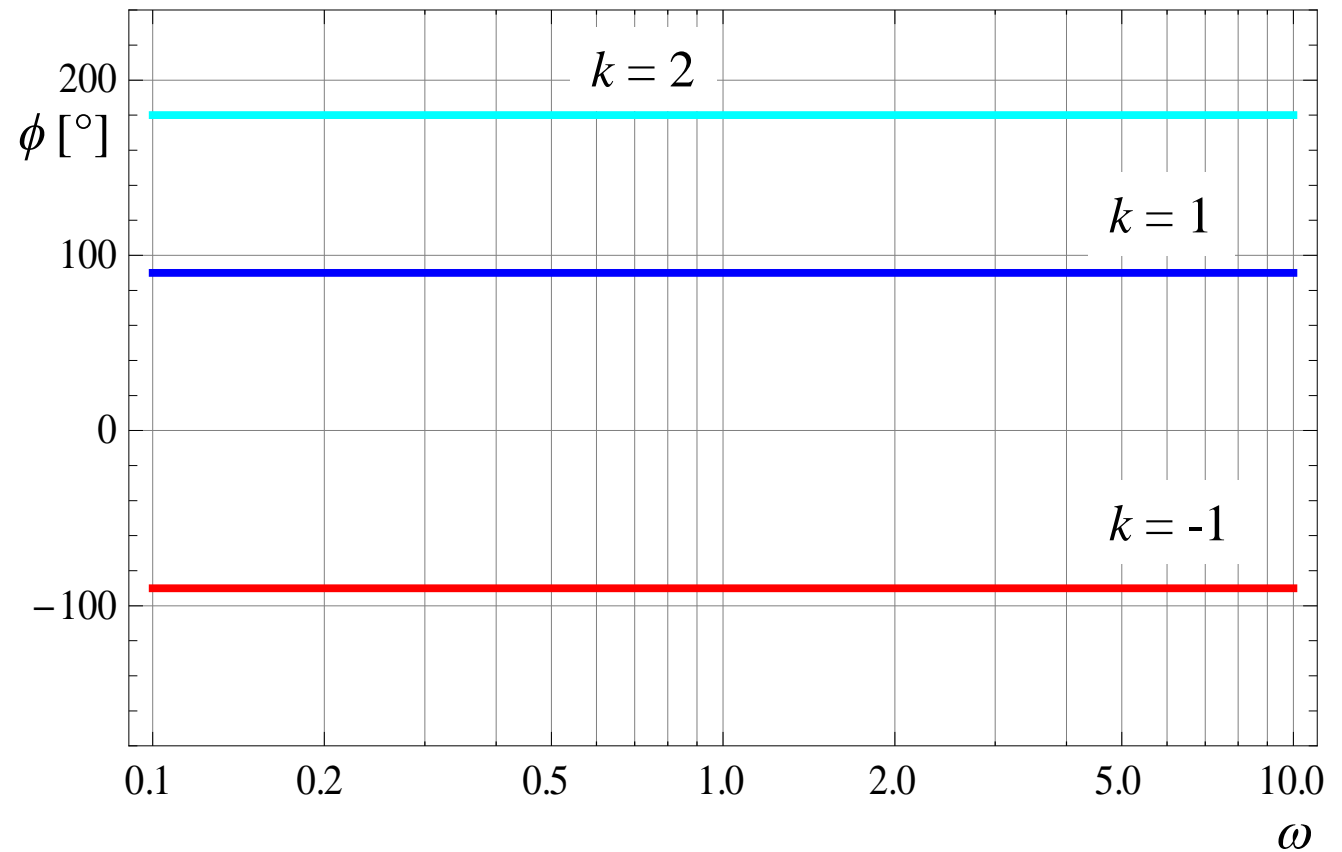
$$\xrightarrow{\omega \ll \alpha} 10\log_{10}[1] = 0$$

$$\xrightarrow{\omega \gg \alpha} 10\log_{10}\left[\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^4\right] = 40\log_{10}\left[\frac{\omega}{\alpha}\right]$$



Diagrammi di Bode

$$k \frac{\pi}{2}$$

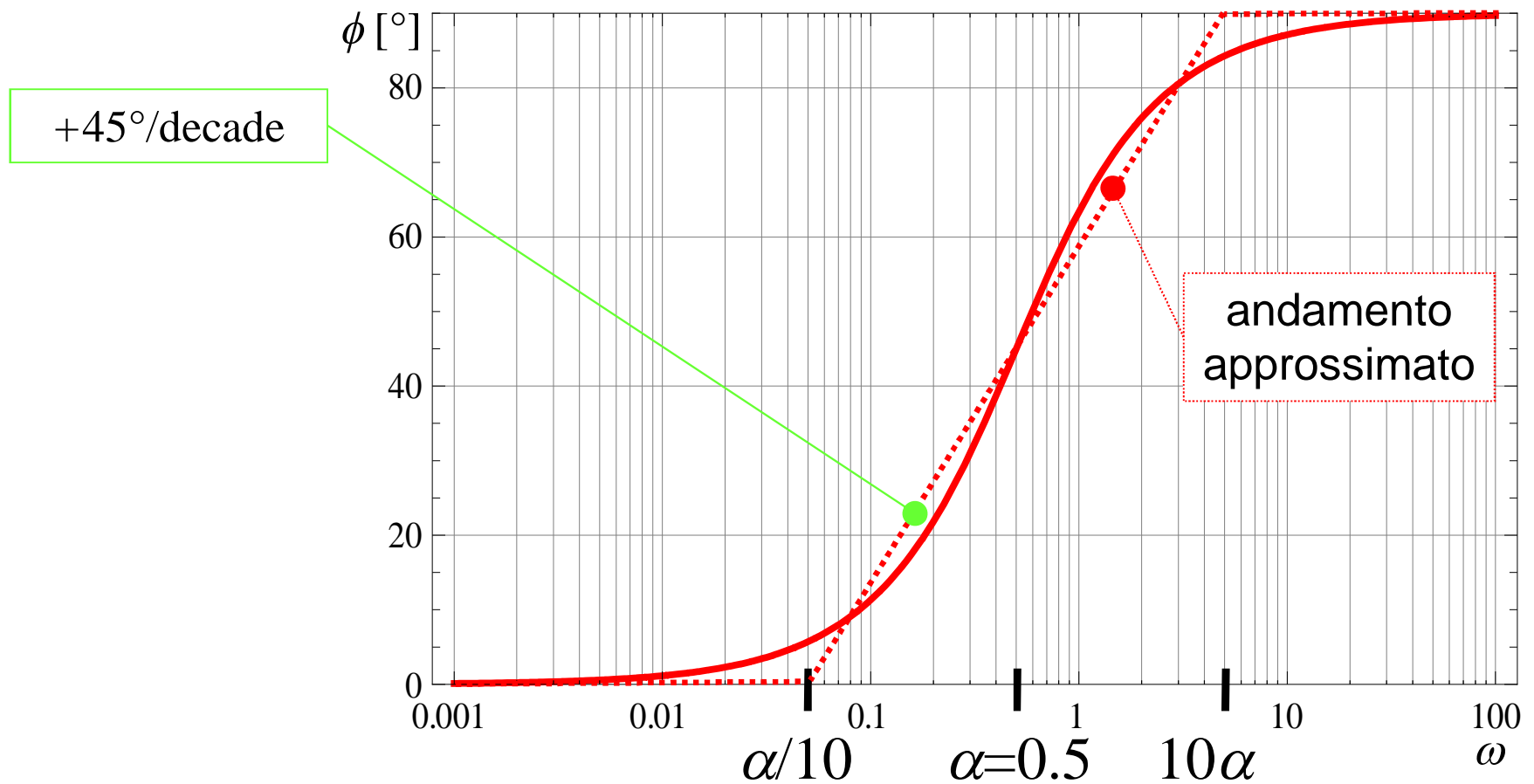


Diagrammi di Bode

$$\arctg(\omega / \alpha)$$

$$\omega \ll \alpha \longrightarrow \arctg[0] = 0$$

$$\omega \gg \alpha \longrightarrow \arctg[\infty] = 90^\circ$$

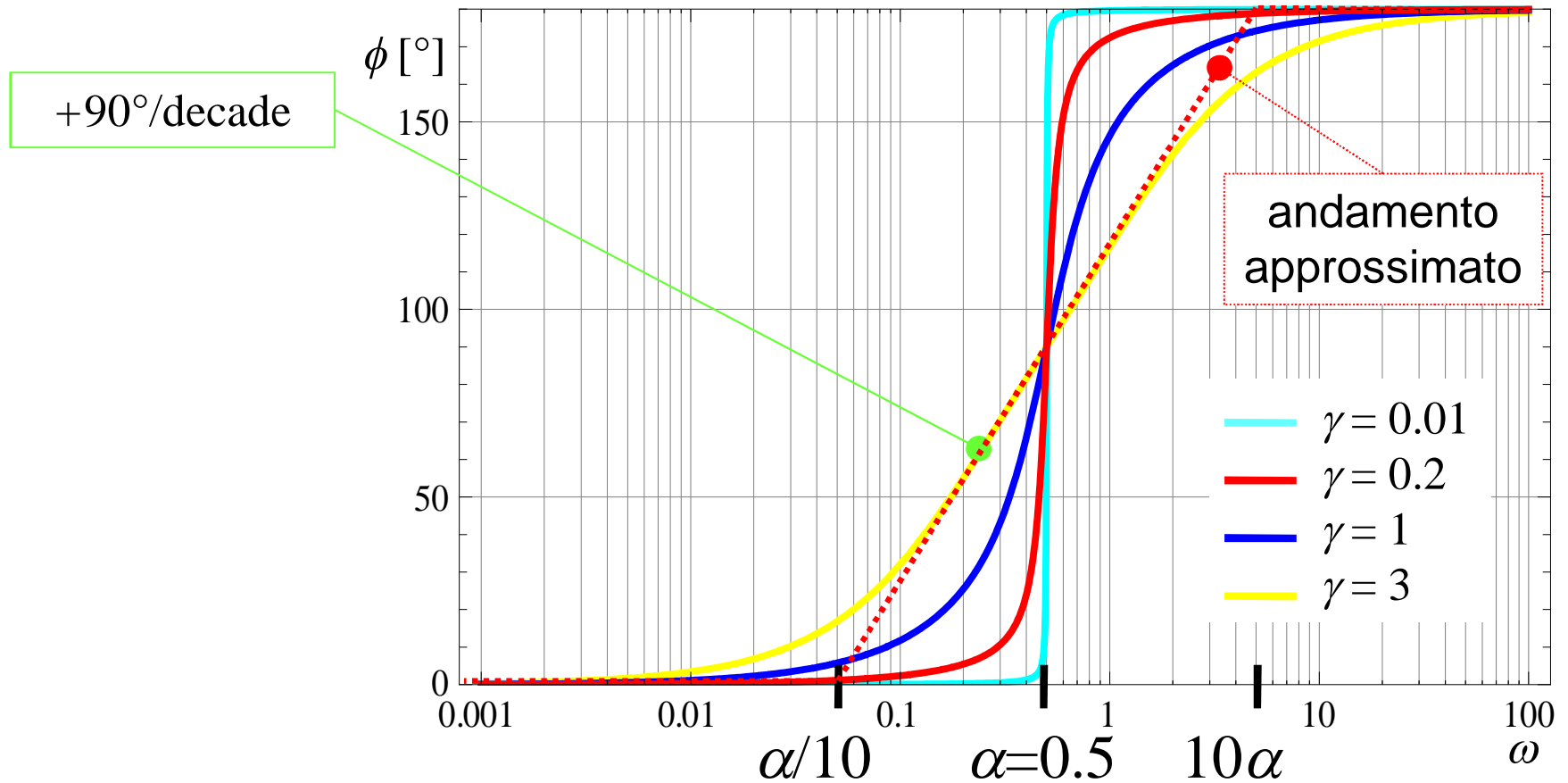


Diagrammi di Bode

$$\arctg \frac{\gamma(\omega / \alpha)}{1 - (\omega / \alpha)^2}$$

$$\omega \ll \alpha \longrightarrow \arctg[0] = 0$$

$$\omega \gg \alpha \longrightarrow 180^\circ - \arctg[0] = 180^\circ$$

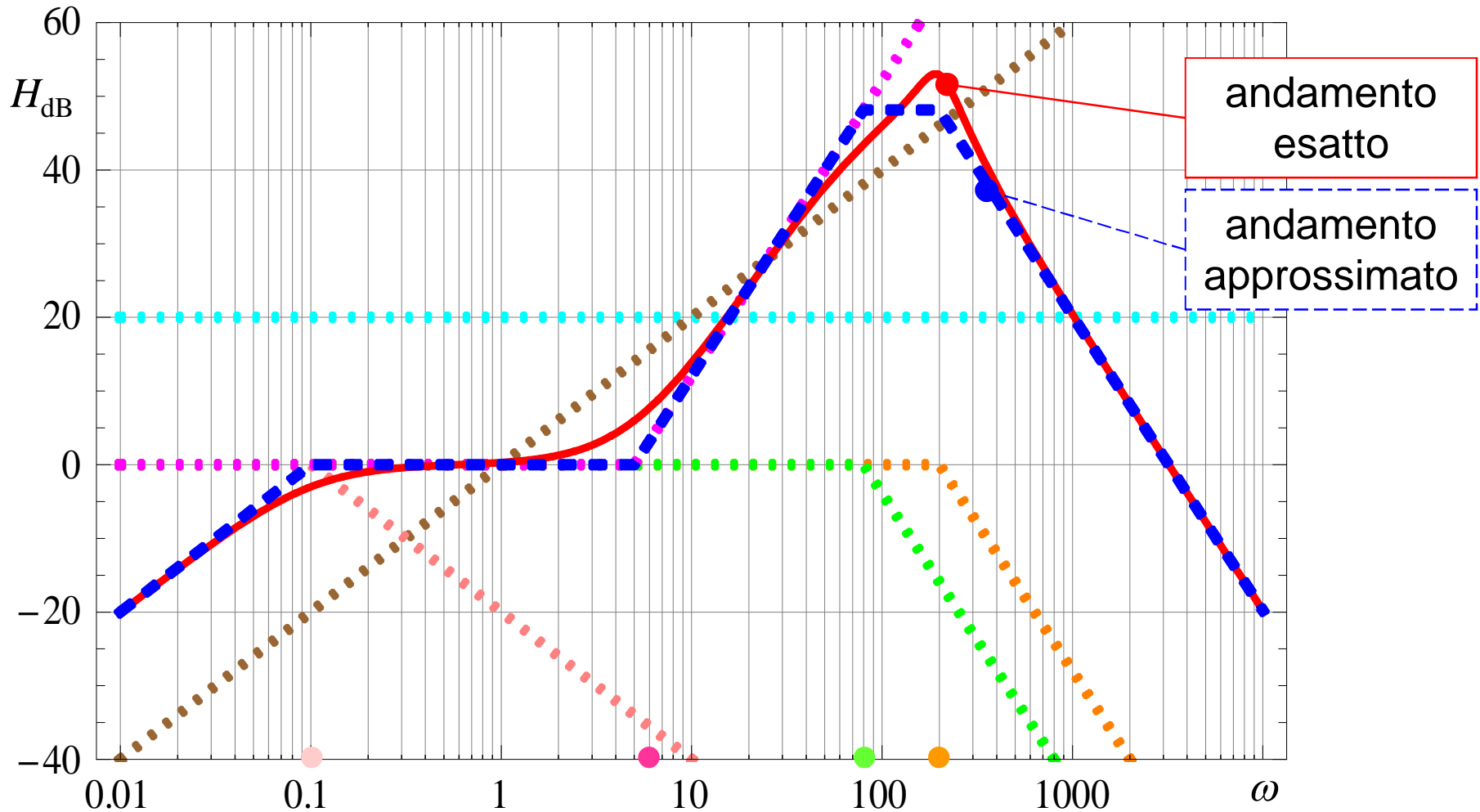


Diagrammi di Bode

Esempio:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K \cdot j\omega \cdot (1 + j\omega/z_1)^2}{(1 + j\omega/p_1) \cdot (1 + j\omega/p_2)^2 \cdot [1 + 2\zeta_3(j\omega/p_3) + (j\omega/p_3)^2]}$$

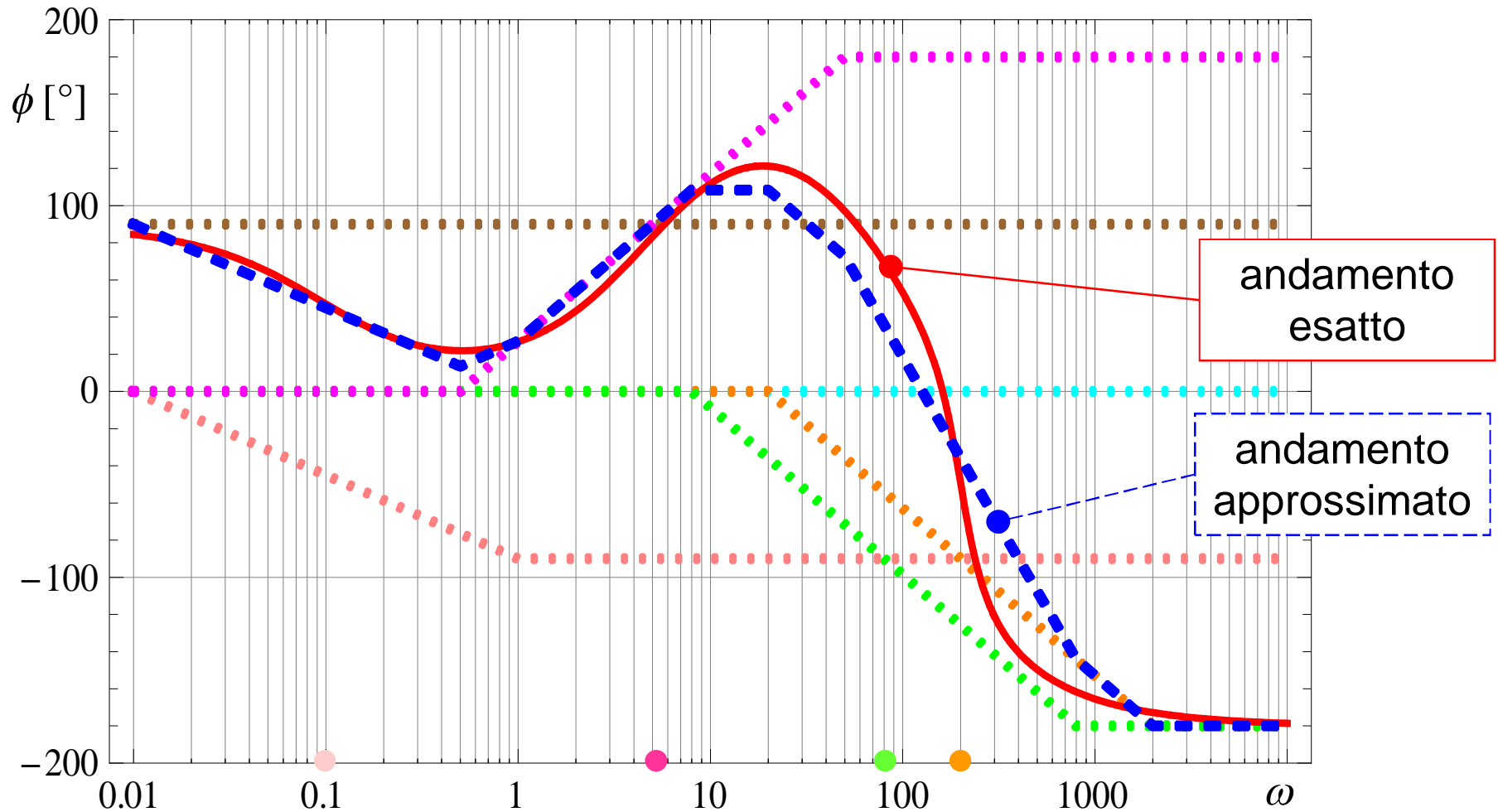
- $K = 10$
- $z_1 = 5$
- $p_1 = 0.1$
- $p_2 = 80$
- $p_3 = 200$
- $\zeta_1 = 0.5$



Diagrammi di Bode

Esempio:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K \cdot j\omega \cdot (1 + j\omega/z_1)^2}{(1 + j\omega/p_1) \cdot (1 + j\omega/p_2)^2 \cdot [1 + 2\zeta_3(j\omega/p_3) + (j\omega/p_3)^2]}$$



- $K = 10$
- $z_1 = 5$
- $p_1 = 0.1$
- $p_2 = 80$
- $p_3 = 200$
- $\zeta_3 = 0.5$

andamento esatto

andamento approssimato