Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica

Campi Elettromagnetici e Circuiti I

Parametri di diffusione

Sommario

- Motivazione
- Definizione dei parametri di diffusione (caso 2 porte)
- Definizione dei parametri di diffusione (caso N porte)
- Casi particolari
- Proprietà dei parametri di diffusione
- Collegamento con la potenza

Motivazione

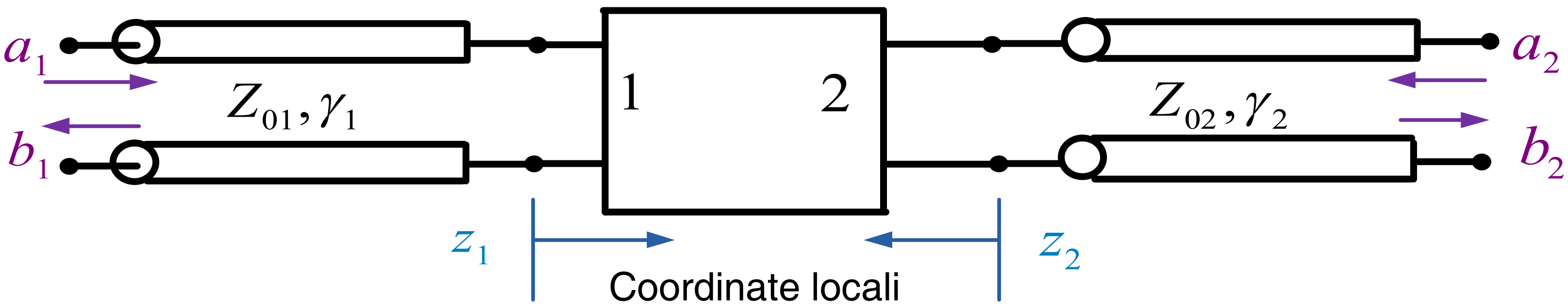
Ad alta frequenza i parametri Z, Y, h, g, ABCD sono difficili (e a volte impossibili) da misurare, dato che:

- tensione e corrente non sono definite in modo univoco
- la misura della tensione e (soprattutto) della corrente porterebbe ad una forte perturbazione del funzionamento del circuito (e quindi a risultati errati)
- è necessario introdurre carichi che possono essere difficili da realizzare (ad es. il circuito aperto)

I parametri di diffusione sono quindi preferiti per le alte frequenze (tipicamente > 1 GHz)

Definizione (caso 2 porte)

Dato un circuito a due porte, con ciascuna porta sia collegata ad una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_i e costante di propagazione $\gamma_i = \alpha_i + j\beta_i$:



Su ogni linea di trasmissione si ha:

$$V_i(z_i) = V_{i0}^+ e^{-\gamma_i z_i} + V_{i0}^- e^{+\gamma_i z_i} = V_i^+(z_i) + V_i^-(z_i)$$

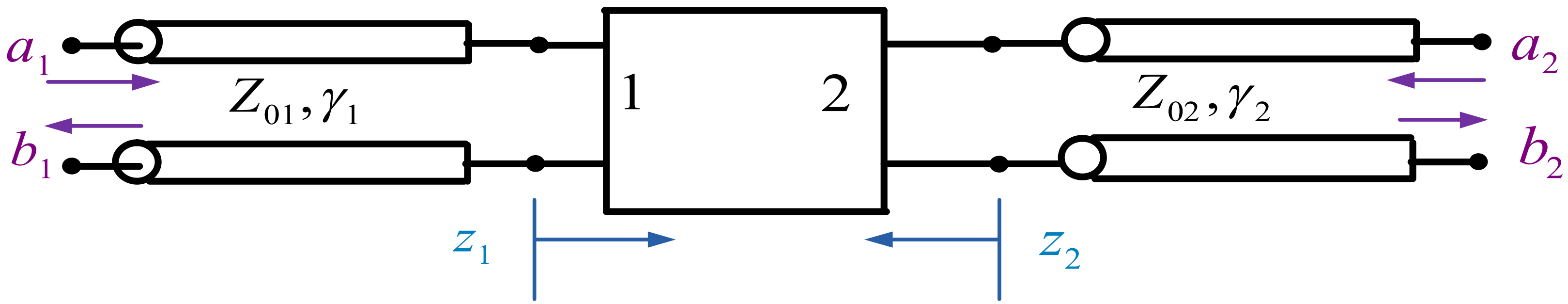
$$I_i(z_i) = \frac{V_i^+(z_i)}{Z_{0i}} - \frac{V_i^-(z_i)}{Z_{0i}} \qquad i = 1, 2$$

Si definiscono le funzioni:

$$a_i(z_i) \equiv V_i^+(z_i) / \sqrt{Z_{0i}} \qquad \text{funzione d'onda incidente}$$

$$b_i(z_i) \equiv V_i^-(z_i) / \sqrt{Z_{0i}} \qquad \text{funzione d'onda riflessa}$$

Definizione (caso 2 porte)



$$b_1(0) = S_{11}a_1(0) + S_{12}a_2(0)$$
$$b_2(0) = S_{21}a_1(0) + S_{22}a_2(0)$$

Matrice di diffusione (*scattering matrix*)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} \Rightarrow [b] = [S][a]$$

Definizione (caso 2 porte)

$$b_1(0) = S_{11}a_1(0) + S_{12}a_2(0)$$
$$b_2(0) = S_{21}a_1(0) + S_{22}a_2(0)$$

$$S_{11} = \left.\frac{b_1(0)}{a_1(0)}\right|_{a_2=0}$$

Uscita adattata

Coefficiente di riflessione d'ingresso

$$S_{12} = \left.\frac{b_1(0)}{a_2(0)}\right|_{a_1=0}$$

Ingresso adattato

Coefficiente di trasmissione diretta

$$S_{21} = \left.\frac{b_2(0)}{a_1(0)}\right|_{a_2=0}$$

Uscita adattata

Coefficiente di trasmissione inversa

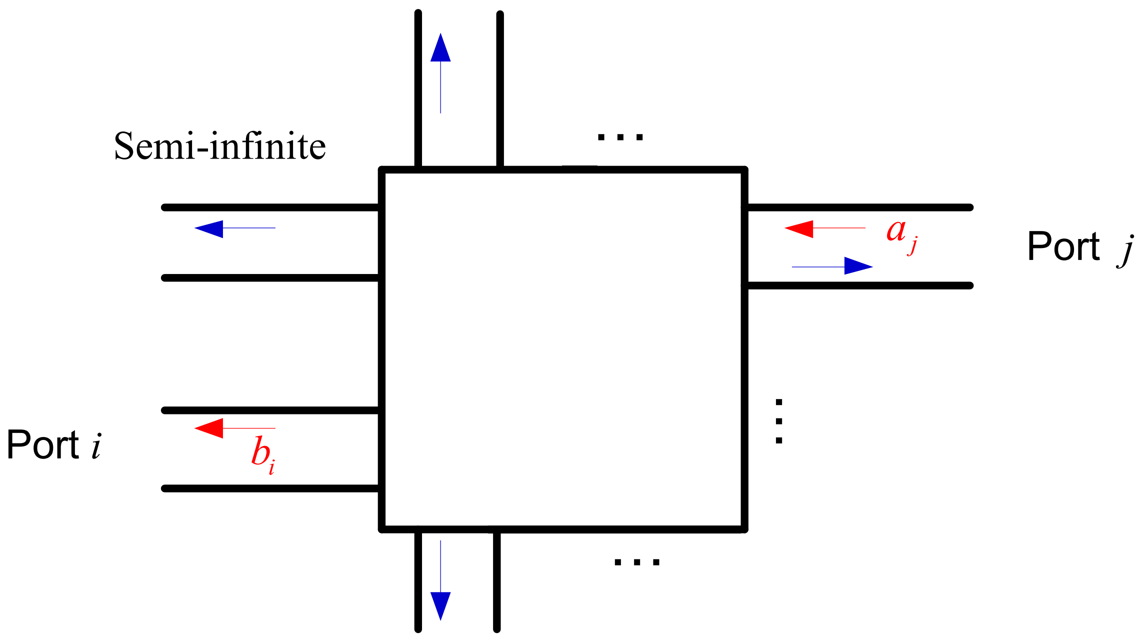
$$S_{22} = \left.\frac{b_2(0)}{a_2(0)}\right|_{a_1=0}$$

Ingresso adattato

Coefficiente di riflessione d'uscita

Definizione (caso N porte)

Nel caso di un circuito a N porte, con la porta i-esima collegata ad una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_i e costante di propagazione $\gamma_i = \alpha_i + j\beta_i$:



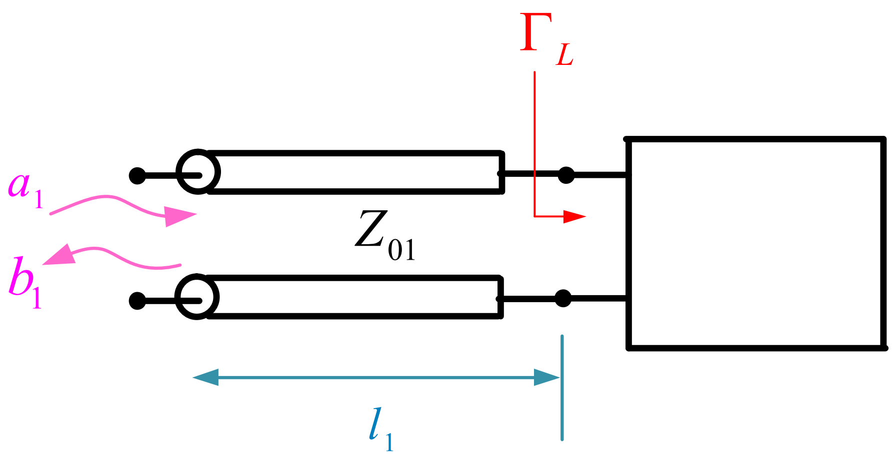
$$S_{ij} = \left.\frac{b_i(0)}{a_j(0)}\right|_{a_k=0 \;\; k\neq j}$$

Tutte le porte sono adattate, eccetto la j-esima.

Caso particolare: terminazione a 1 porta

funzione d'onda incidente: $a_i(z_i) \equiv V_i^+(z_i) / \sqrt{Z_{0i}}$ $\quad \Rightarrow \quad b_1(0) = \Gamma_L a_1(0)$

funzione d'onda riflessa: $b_i(z_i) \equiv V_i^-(z_i) / \sqrt{Z_{0i}}$ $\quad = S_{11}\, a_1(0)$



$$\Gamma_L = \frac{V_1^-(0) / \sqrt{Z_{01}}}{V_1^+(0) / \sqrt{Z_{01}}} = \frac{b_1(0)}{a_1(0)} = S_{11}$$

Per un circuito ad una porta, S_{11} coincide con Γ_L.

Proprietà dei parametri di diffusione

Se il circuito è reciproco la matrice di diffusione è simmetrica:

$$\Rightarrow S_{ij} = S_{ji} \qquad i \neq j$$

Se tutte le linee di trasmissione collegate al circuito hanno la stessa impedenza caratteristica, si ha:

$$S_{ij} = \left. \frac{V_i^-(0)}{V_j^+(0)} \right|_{V_k^+=0 \ \ k\neq j}$$

Proprietà dei parametri di diffusione

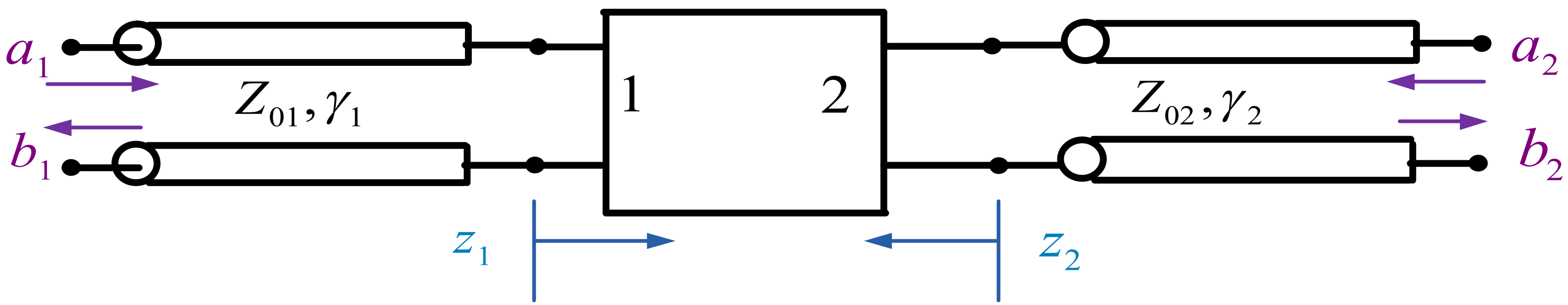
Se il circuito è senza perdite la matrice di diffusione è unitaria:

$$[S]^T [S]^* = [S]^* [S]^T = [U] \qquad \Rightarrow \qquad [S]^{T*} = [S]^{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} S_{ik}^T \; S_{kj}^* = \sum_{k=1}^{N} S_{ki} \; S_{kj}^* = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,;\, i = j \\ 0\,;\, i \neq j \end{cases}$$

Collegamento con la potenza



$$P_i^+(0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[V_i^+(0)\, I_i^{+*}(0)\right] = \frac{1}{2}\frac{\left|V_i^+(0)\right|^2}{Z_{0i}}$$

(nell'ipotesi di line senza perdite)

$$a_i(0) = V_i^+(0)\Big/\sqrt{Z_{0i}}$$

$$\Rightarrow\ P_i^+(0) = \frac{1}{2}\left|a_i(0)\right|^2$$

Collegamento con la potenza

Analogamente:

$$P_i^-(0) = \frac{1}{2}\frac{\left|V_i^-(0)\right|^2}{Z_{0i}} = \frac{1}{2}\left|b_i(0)\right|^2$$

e quindi;

$$V_i^+(-l_i) = V_i^+(0)\, e^{+\gamma_i l_i}$$

$$V_i^-(-l_i) = V_i^-(0)\, e^{-\gamma_i l_i}$$

$$\Rightarrow\ P_i^+(-l_i) = \frac{1}{2}\left|a_i(-l_i)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|a_i(0)\right|^2 e^{+2\alpha_i l_i}$$

$$P_i^-(-l_i) = \frac{1}{2}\left|b_i(-l_i)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|b_i(0)\right|^2 e^{-2\alpha_i l_i}$$

Conversione tra parametri

	S	Z	Y	$ABCD$
S_{11}	S_{11}	$\dfrac{(Z_{11}-Z_0)(Z_{22}+Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\dfrac{(Y_0-Y_{11})(Y_0+Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\dfrac{A+B/Z_0-CZ_0-D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{12}	S_{12}	$\dfrac{2Z_{12}Z_0}{\Delta Z}$	$\dfrac{-2Y_{12}Y_0}{\Delta Y}$	$\dfrac{2(AD-BC)}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{21}	S_{21}	$\dfrac{2Z_{21}Z_0}{\Delta Z}$	$\dfrac{-2Y_{21}Y_0}{\Delta Y}$	$\dfrac{2}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{22}	S_{22}	$\dfrac{(Z_{11}+Z_0)(Z_{22}-Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\dfrac{(Y_0+Y_{11})(Y_0-Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\dfrac{-A+B/Z_0-CZ_0+D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
Z_{11}	$Z_0\dfrac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\dfrac{Y_{22}}{\lvert Y\rvert}$	$\dfrac{A}{C}$
Z_{12}	$Z_0\dfrac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\dfrac{-Y_{12}}{\lvert Y\rvert}$	$\dfrac{AD-BC}{C}$
Z_{21}	$Z_0\dfrac{2S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\dfrac{-Y_{21}}{\lvert Y\rvert}$	$\dfrac{1}{C}$
Z_{22}	$Z_0\dfrac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\dfrac{Y_{11}}{\lvert Y\rvert}$	$\dfrac{D}{C}$
Y_{11}	$Y_0\dfrac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\dfrac{Z_{22}}{\lvert Z\rvert}$	Y_{11}	$\dfrac{D}{B}$
Y_{12}	$Y_0\dfrac{-2S_{12}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\dfrac{-Z_{12}}{\lvert Z\rvert}$	Y_{12}	$\dfrac{BC-AD}{B}$
Y_{21}	$Y_0\dfrac{-2S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\dfrac{-Z_{21}}{\lvert Z\rvert}$	Y_{21}	$\dfrac{-1}{B}$
Y_{22}	$Y_0\dfrac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\dfrac{Z_{11}}{\lvert Z\rvert}$	Y_{22}	$\dfrac{A}{B}$
A	$\dfrac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\dfrac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\dfrac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A
B	$Z_0\dfrac{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\dfrac{\lvert Z\rvert}{Z_{21}}$	$\dfrac{-1}{Y_{21}}$	B
C	$\dfrac{1}{Z_0}\dfrac{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\dfrac{1}{Z_{21}}$	$\dfrac{-\lvert Y\rvert}{Y_{21}}$	C
D	$\dfrac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\dfrac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\dfrac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D

$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $\quad |Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\quad \Delta Y = (Y_{11}+Y_0)(Y_{22}+Y_0) - Y_{12}Y_{21}$; $\quad \Delta Z = (Z_{11}+Z_0)(Z_{22}+Z_0) - Z_{12}Z_{21}$; $\quad Y_0 = 1/Z_0$