

## Le linee come elementi circuitali

---

Molto spesso i circuiti ad alta frequenza includono linee di trasmissione connesse ad altri componenti più convenzionali (resistori, bobine, condensatori, trasformatori, transistori, ecc.). Nelle linee si propaga il solo modo dominante, per il quale le tensioni e le correnti sono definite come in tutti gli altri componenti circuitali (vedi Capitolo 3). Le relazioni esistenti fra le tensioni, le correnti e le impedenze all'ingresso e all'uscita caratterizzano le proprietà circuitali delle linee. Poiché le linee hanno lunghezze paragonabili o superiori alla lunghezza d'onda, la propagazione delle onde di tensione e di corrente ha grande influenza sulle proprietà circuitali. Lo studio di queste proprietà è l'argomento centrale di questo capitolo.

Nelle linee schermate contenenti un solo dielettrico il modo dominante è il modo TEM. Questo modo è stato trattato nel Capitolo 3, dove sono state determinate le espressioni generali delle onde di tensione e di corrente. Nulla invece è stato detto riguardo alle linee non schermate e/o contenenti più di un dielettrico, che pure sono usate nei circuiti, soprattutto a frequenze non troppo elevate. Per questa ragione il capitolo inizia con l'esposizione della cosiddetta "teoria elementare delle linee", che permette di trattare in maniera approssimata ma semplice anche questi tipi di linea. La teoria elementare mostra che, anche in queste linee, considerate a frequenze non troppo elevate, il modo dominante ha proprietà analoghe a quelle del modo TEM. Grazie a questo risultato, lo studio delle proprietà circuitali delle linee può essere svolto in modo unitario, senza distinguere fra i vari tipi di linea.

### 5.1 Teoria elementare delle linee di trasmissione

È possibile studiare la propagazione nelle linee di trasmissione in modo elementare, utilizzando concetti mutuati dalla teoria dei circuiti. È opportuno considerare la teoria elementare per tre ragioni: a) alcuni testi applicativi fanno riferimento ad essa; b) il paragone dei risultati di questa teoria con quelli già trovati nel Capitolo 3 mette in evidenza i limiti dei concetti circuitali nelle applicazioni ad alta frequenza; c) i risultati della teoria elementare valgono anche per le linee aperte (come la linea bifilare di Figura 1.1a) e/o contenenti più dielettrici (come la linea a microstriscia di Figura 1.1b), almeno come approssimazioni a frequenze non troppo elevate. Per semplicità si farà riferimento alle linee costituite da due soli conduttori.

Si supponga di alimentare in corrente continua un carico attraverso una linea, ad esempio del tipo bifilare. Come indicato nella Figura 1.2, intorno alla linea si ha un campo stazionario, in cui sia  $\mathbf{E}$  che  $\mathbf{H}$  sono trasversali. Sugli elementi di conduttore compresi fra le sezioni

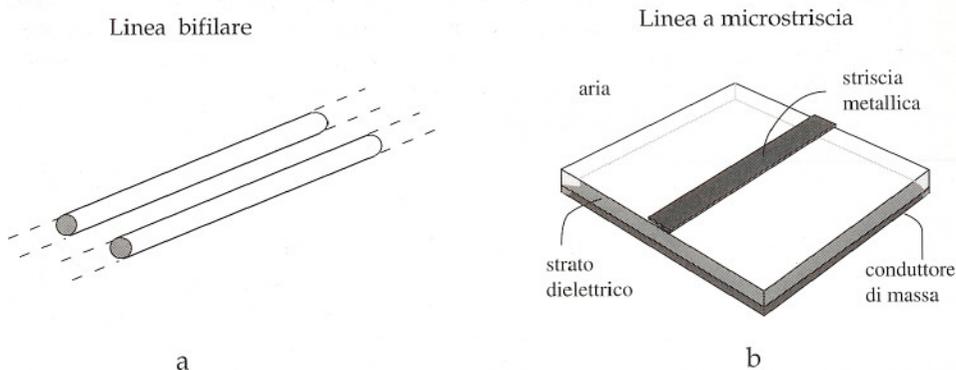


Figura 1.1

trasversali di ascissa  $z$  e  $z + dz$  (vedi figura) si hanno due cariche opposte,  $dq$  e  $-dq$ , date da

$$dq = V (Cdz) \tag{1.1}$$

dove  $V$  è la tensione e  $C$  rappresenta la capacità della linea, riferita all'unità di lunghezza [F/m]. Inoltre la superficie ABCD indicata in figura è attraversata dal flusso d'induzione

$$d\Phi = I (L dz) \tag{1.2}$$

dove  $I$  è la corrente ed  $L$  rappresenta l'induttanza per unità di lunghezza [H/m]. Se i conduttori sono perfetti e se la conducibilità del dielettrico è nulla  $V$  e  $I$  sono costanti su tutta la linea. In caso contrario  $V$  e  $I$  dipendono da  $z$ : infatti la tensione cambia a causa della resistenza dei

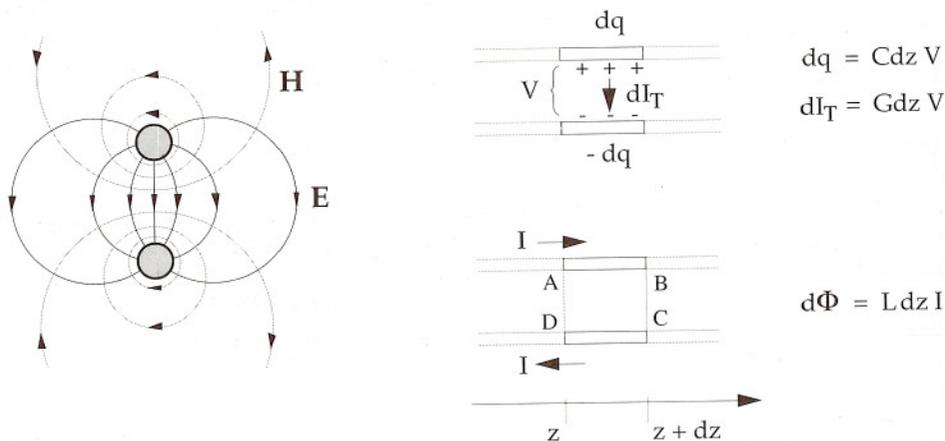


Figura 1.2

conduttori e la corrente varia perché una parte sfugge dai conduttori a causa dell'imperfetto isolamento. Per la legge di Ohm la densità della corrente di conduzione dovuta all'imperfetto isolamento è proporzionale al campo elettrico. Pertanto la corrente  $dI_T$  che fluisce fra i due elementi conduttori considerati in precedenza è proporzionale alla tensione ed è data da un'espressione del tipo

$$dI_T = V (Gdz) \quad (1.3)$$

dove  $G$  rappresenta la conduttanza trasversale della linea, riferita all'unità di lunghezza [S/m]. I valori di  $C$ ,  $L$  e  $G$  dipendono dalla forma e dalle dimensioni della linea, oltre che dalle caratteristiche del mezzo interposto fra i conduttori. Tali valori possono essere dedotti teoricamente attraverso lo studio del campo stazionario ovvero - più semplicemente - possono essere misurati.

Se la linea viene alimentata alla pulsazione  $\omega$ , e se si assume che *nell'ambito di ciascuna sezione trasversale la conformazione del campo si mantenga uguale a quella che si ha nel caso stazionario*, le formule (1.1), (1.2) e (1.3) rimangono valide. Applicando la legge di Faraday-Neumann alla linea ABCD e la legge di conservazione della carica all'elemento conduttore AB, si ha:

$$(E_z)_A dz + V(z + dz) - (E_z)_D dz - V(z) = -j\omega d\Phi = -j\omega I(z) (L dz) \quad (1.4a)$$

$$I(z + dz) - I(z) = -j\omega dq - dI_T = -(G + j\omega C) V(z) dz \quad (1.4b)$$

dove  $(E_z)_A$  e  $(E_z)_D$  indicano i campi elettrici assiali nei punti A e D. Se la frequenza è tanto elevata da poter assumere che nei conduttori l'effetto pelle sia spinto, si ha:

$$(E_z)_A = (1 + j) R_s (J_{sz})_A \quad (E_z)_D = (1 + j) R_s (J_{sz})_D$$

dove  $(J_{sz})_A$  e  $(J_{sz})_D$  sono le densità della corrente superficiale nei punti A e D (più precisamente le componenti assiali, che sono le uniche esistenti). In corrispondenza della sezione  $z$  il campo magnetico sulla superficie dei conduttori (e quindi la densità di corrente) varia in ampiezza ma non in fase. Ne consegue che le fasi di  $(J_{sz})_A$  e di  $(J_{sz})_D$  sono identiche a quelle di  $I$  e di  $-I$  rispettivamente, mentre le ampiezze sono proporzionali a  $|I|$ . Pertanto si può scrivere

$$(J_{sz})_A = K_A I \quad (J_{sz})_D = -K_D I$$

dove  $K_A$  e  $K_D$  sono opportuni coefficienti reali positivi, dipendenti dall'andamento del campo magnetico sulla superficie dei conduttori (quindi, dalla conformazione della linea). Si ha dunque:

$$(E_z)_A dz = (1 + j) R_s K_A I dz \quad (E_z)_D dz = -(1 + j) R_s K_D I dz$$

Sostituendo nella (1.4a) si ottiene:

$$V(z + dz) - V(z) = -[R + j(R + \omega L)] I(z) dz$$

dove

$$R = R_s (K_A + K_D)$$

A causa dell'elevata conducibilità dei conduttori  $R$  è molto minore di  $\omega L$ ; pertanto si può scrivere:

$$V(z + dz) - V(z) \approx - [R + j\omega L] I(z) dz \quad (1.5)$$

La caduta di tensione in fase con la corrente dipende da  $R$ . Quindi  $R$  rappresenta la resistenza della linea, riferita all'unità di lunghezza [ $\Omega/m$ ].<sup>1</sup>

È facile verificare che, a meno di un infinitesimo dell'ordine di  $dz^2$  la (1.4b) e la (1.5) sono le equazioni del quadripolo indicato nella Figura 1.3a. Quindi l'intera linea può essere vista come un insieme di infiniti quadripoli elementari di questo tipo connessi in cascata (Figura 1.3b). Ciascun quadripolo è costituito da un'impedenza longitudinale  $(R + j\omega L)dz$  e da un'ammittenza trasversale  $(G + j\omega C)dz$ . L'impedenza e l'ammittenza sono infinitesime e sono distribuite lungo tutta la linea. Un circuito di questo genere viene detto "a costanti distribuite".

Dalle (1.5) e (1.4b), dividendo per  $dz$ , si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{dV}{dz} = -(R + j\omega L)I \quad \frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)V \quad (1.6)$$

Nel caso della linea senza perdite ( $R = 0$ ,  $G = 0$ ), differenziando la prima equazione ed eliminando  $dI/dz$  mediante la seconda, si ottiene:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + \beta^2 V = 0 \quad (1.7)$$

dove

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (1.8)$$

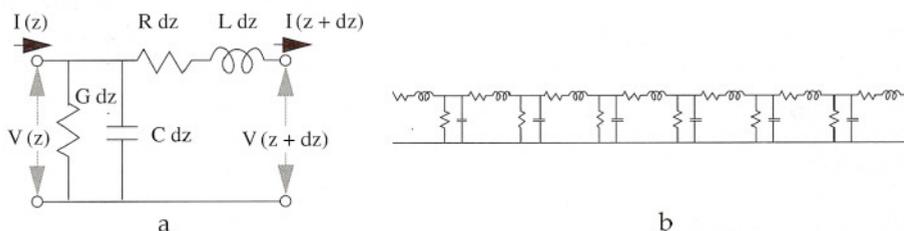


Figura 1.3

1 La resistenza cresce con la frequenza perchè è proporzionale a  $R_s$ .

Risolvendo la (1.7) si ottiene la solita espressione:

$$V = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \quad (V_0^+, V_0^- = \text{costanti arbitrarie})$$

Inoltre, sostituendo nella prima delle (1.6) si trova:

$$I = \frac{V_0^+}{Z^0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z^0} e^{j\beta z}$$

dove

$$Z^0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.9)$$

Si vede che le onde di tensione e di corrente si propagano con la velocità

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.10)$$

Se si considerano le perdite si trovano onde che si attenuano (lo studio di questo caso viene ommesso per brevità). Nell'ipotesi  $R \ll \omega L$  e  $G \ll \omega C$  (linea a basse perdite) si trova che le formule (1.8) (1.9) e (1.10) continuano ad essere valide approssimativamente e che la costante di attenuazione è data da:

$$\alpha \approx \frac{R/Z^0 + GZ^0}{2} \quad (R \ll \omega L, G \ll \omega C) \quad (1.11)$$

Le espressioni della tensione e della corrente sono analoghe a quelle trovate nel Capitolo 3 per il modo TEM delle linee schermate contenenti un solo dielettrico. Però l'impedenza caratteristica e la velocità di fase sono espresse in funzione delle grandezze circuitali  $L$  e  $C$ , invece che - direttamente - in funzione delle quantità fisico-geometriche che caratterizzano la linea. In effetti, nel caso delle linee schermate con un solo dielettrico, i risultati della teoria elementare coincidono con quelli ottenuti nel Capitolo 3. Ad esempio, nel caso del cavo coassiale, la capacità e l'induttanza per unità di lunghezza sono rispettivamente

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon'}{\ln(R_e/R_i)} \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R_e/R_i)$$

e quindi, usando (1.9) e (1.10) si ottiene

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}} \quad Z^0 = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon'}} \ln \frac{R_e}{R_i}$$

proprio come nel Capitolo 3. A posteriori si comprende che i risultati sono identici perché - nel modo TEM - l'andamento del campo sulle sezioni trasversali coincide con l'andamento del campo stazionario, in accordo con l'ipotesi che sta alla base della teoria elementare. Naturalmente, poiché la coincidenza si ha solo per il modo TEM, la teoria elementare delle linee non permette di evidenziare l'esistenza dei modi TE e TM.

Come si è già detto, la teoria elementare non presuppone né che la linea sia schermata né che il dielettrico sia omogeneo. Essa presuppone solo che l'andamento del campo su ciascuna sezione trasversale sia uguale (o almeno molto prossimo) a quello del campo stazionario. Poiché questa ipotesi è certamente verificata a frequenze sufficientemente basse, la teoria elementare permette di affermare che in ogni linea - a frequenze non troppo elevate - la tensione e la corrente sono costituite da onde che si propagano con velocità di fase indipendente dalla frequenza (Equazione 1.10), e che le onde di tensione e di corrente sono collegate da un'impedenza caratteristica reale, pure indipendente dalla frequenza (Equazione 1.9).

Sia le linee aperte con dielettrico omogeneo che quelle aperte o schermate, ma con dielettrico inomogeneo, possono essere studiate in maniera rigorosa, senza fare alcuna ipotesi preliminare circa l'andamento dei campi. Tale studio è però molto più complicato di quello visto nel Capitolo 3.

Nel caso delle linee aperte con dielettrico omogeneo la teoria elettromagnetica mostra che, oltre al modo TEM (che ha proprietà identiche a quelle viste nel Capitolo 3), esistono altre soluzioni delle equazioni di Maxwell, che comportano trasporto di energia anche in direzione trasversale alla linea (modi radianti). Per la presenza di questi modi le linee in questione possono essere utilizzate per trasmettere energia solo a bassa frequenza (ad esempio linee aeree a frequenza industriale), perché a bassa frequenza le perdite di energia dovute ai modi radianti sono irrilevanti.

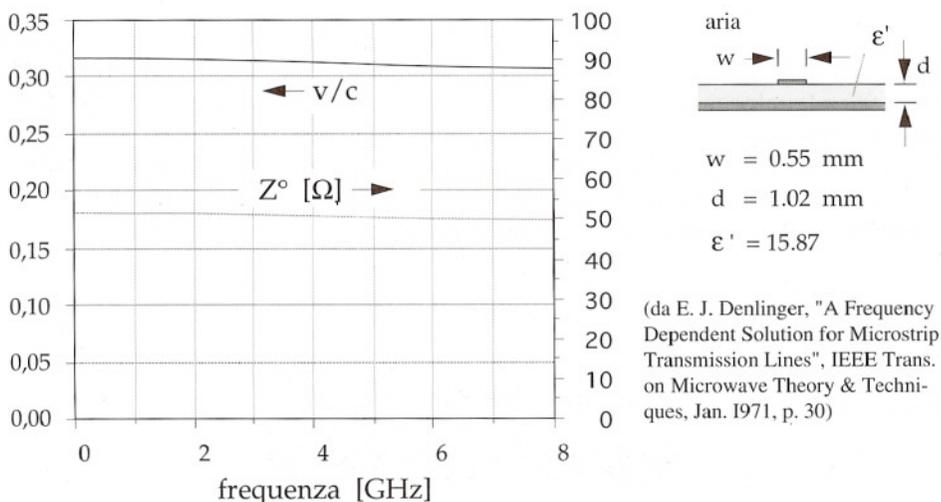


Figura 1.4

Nel caso delle linee con dielettrico inomogeneo la teoria elettromagnetica mostra che il modo TEM non esiste. Si trova che anche in queste linee il modo dominante si può propagare a frequenze comunque basse e che tale modo è tanto più prossimo ad un modo TEM quanto minore è la frequenza (modo "quasi-TEM"). È chiaro che, nel caso di queste linee, i risultati della teoria elementare riguardano proprio le onde di tensione e di corrente del modo quasi-TEM, considerato a frequenze tanto basse da rendere ammissibile l'ipotesi sull'andamento quasi-statico del campo. Per meglio apprezzare il livello di precisione dei risultati della teoria elementare, si riportano in Figura 1.4 gli andamenti effettivi della velocità di fase e dell'impedenza caratteristica di una linea a microstriscia al variare della frequenza, così come risultano da una trattazione rigorosa. In accordo con le previsioni della teoria elementare, la velocità di fase e l'impedenza caratteristica sono pressoché costanti fino a qualche gigahertz.

■ Nella microstriscia considerata in Figura 1.4 la velocità di fase è  $v \approx 0.3c$ ; essa ha un valore intermedio fra quelli che si avrebbero se lo spazio intorno ai conduttori fosse completamente riempito dall'aria ( $v = c$ ) o dal dielettrico del substrato ( $v = c/\sqrt{\epsilon'} = 0.251c$ ). Ciò dipende dal fatto che nella microstriscia la capacità ha un valore intermedio fra quelli che si avrebbero nei due casi suddetti, mentre l'induttanza è la stessa in tutti i casi. L'andamento del campo elettrico nella microstriscia è simile a quello schizzato nella Figura 1.5. ■

## 5.2 Impedenza, ammettenza, coefficiente di riflessione

La linea rappresentata nella Figura 2.1 è alimentata da sinistra ed è chiusa a destra su di un carico di impedenza  $Z_L$ . Nella linea, oltre all'onda che incide sul carico, è in genere presente anche l'onda riflessa. Pertanto la tensione e la corrente sono rappresentate da:

$$V = V^+ + V^- \quad I = I^+ + I^- \quad (2.1)$$

dove :

$$V^+ = V_0^+ e^{-\gamma z} \quad I^+ = V^+/Z^0 \quad (2.2a)$$

$$V^- = V_0^- e^{\gamma z} \quad I^- = -V^-/Z^0 \quad (2.2b)$$

( $\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j2\pi/\lambda$ ;  $V_0^+$  e  $V_0^-$  costanti)

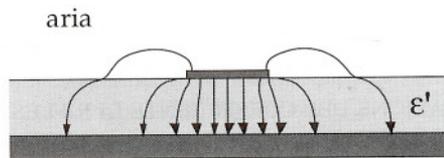


Figura 1.5

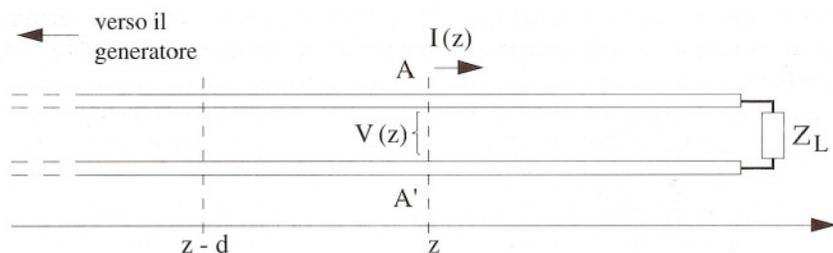


Figura 2.1

Il coefficiente di riflessione, l'impedenza e l'ammettenza in una generica sezione sono definiti dalle espressioni:

$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} \quad (2.3)$$

$$Z = R + jX = \frac{V}{I} \quad (2.4)$$

$$Y = G + jB = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} \quad (2.5)$$

(R, X, G e B rappresentano la resistenza, la reattanza, la conduttanza e la suscettanza viste nella sezione considerata, guardando verso il carico). Poiché V, I, V<sup>+</sup> e V<sup>-</sup> dipendono dalla sezione considerata,  $\Gamma$ , Z e Y sono funzioni di z.

In ogni sezione della linea valgono le seguenti relazioni:

$$Z = Z^0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (2.6a)$$

$$Y = Y^0 \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \quad (2.6b)$$

$$\Gamma = \frac{Z - Z^0}{Z + Z^0} \quad (2.6c)$$

$$\Gamma = -\frac{Y - Y^0}{Y + Y^0} \quad (2.6d)$$

**FORMULE DI TRASFORMAZIONE DEL COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE, DELL'IMPEDENZA E DELL'AMMETTENZA** Le precedenti espressioni sono analoghe a quelle incontrate nello studio delle onde piane uniformi (vedi Paragrafo 10 del Capitolo 2): il campo elettrico è sostituito dalla tensione, il campo magnetico dalla corrente, l'impedenza caratteristica del mezzo dall'impedenza caratteristica della linea, l'impedenza d'onda dall'impedenza intesa

in senso circuitale. Pertanto, passando dalla sezione di ascissa  $z$  a un'altra sezione spostata di  $d$  verso il generatore (vedi Figura 2.1), analogamente a quanto visto nel caso delle onde piane, si ha:

$$\Gamma(z-d) = \Gamma(z) e^{-2\alpha d} e^{-j4\pi d/\lambda} \quad (2.7)$$

$$Z(z-d) = Z^0 \frac{Z(z) + Z^0 \operatorname{tgh}\gamma d}{Z^0 + Z(z) \operatorname{tgh}\gamma d} \quad (2.8)$$

Inoltre:

$$Y(z-d) = Y^0 \frac{Y(z) + Y^0 \operatorname{tgh}\gamma d}{Y^0 + Y(z) \operatorname{tgh}\gamma d} \quad (2.9)$$

Al variare di  $d$  il coefficiente di riflessione descrive sul piano complesso una spirale logaritmica ovvero - se la linea è senza perdite - una circonferenza (vedi Capitolo 2, Figura 10.2).

RELAZIONI FRA I COEFFICIENTI DI RIFLESSIONE, LE IMPEDENZE E LE AMMETTENZE ALL'INGRESSO E ALL'USCITA Siano  $Z_L$  e  $Y_L$  l'impedenza e l'ammettenza del carico. Ai terminali d'uscita della linea si ha  $Z = Z_L$ ,  $Y = Y_L$ ; quindi, per le (2.6c, d), il coefficiente di riflessione all'uscita è:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z^0}{Z_L + Z^0} = -\frac{Y_L - Y^0}{Y_L + Y^0} \quad (2.10)$$

Se la linea ha lunghezza  $d$  (Figura 2.2), per le (2.7), (2.8) e (2.9) il coefficiente di riflessione, l'impedenza e l'ammettenza all'ingresso sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\Gamma_I = \Gamma_L e^{-2\gamma d} = \Gamma_L e^{-2\alpha d} e^{-j4\pi d/\lambda} \quad (2.11a)$$

$$Z_I = Z^0 \frac{Z_L + Z^0 \operatorname{tgh}\gamma d}{Z^0 + Z_L \operatorname{tgh}\gamma d} \quad (2.11b)$$

$$Y_I = Y^0 \frac{Y_L + Y^0 \operatorname{tgh}\gamma d}{Y^0 + Y_L \operatorname{tgh}\gamma d} \quad (2.11c)$$

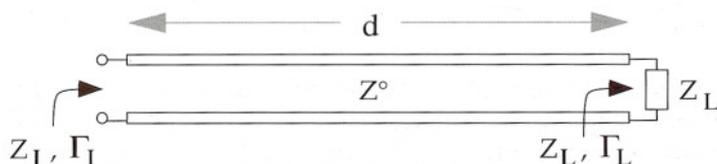


Figura 2.2

La (2.11b) mostra che la linea trasforma l'impedenza (ammettenza) di carico in un'impedenza (ammettenza) generalmente diversa, che dipende dalla lunghezza  $d$  e dalla frequenza attraverso il prodotto  $\gamma d$ .

**POTENZA** La potenza attiva che attraversa nel verso positivo una generica sezione trasversale della linea è:

$$P = \operatorname{Re} \frac{VI^*}{2} \quad (2.12)$$

Da questa espressione si ricavano facilmente le seguenti formule fra loro equivalenti:

$$P = \begin{cases} \frac{R|I|^2}{2} & (2.13a) \\ \frac{G|V|^2}{2} & (2.13b) \\ P_{\text{inc}}(1-|\Gamma|^2) & (2.13c) \end{cases}$$

Nell'ultima espressione  $P_{\text{inc}}$  rappresenta la potenza trasportata dall'onda incidente, che è data da

$$P_{\text{inc}} = \frac{V^+ I^{+*}}{2} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z} \quad (2.14)$$

**LINEE SENZA PERDITE** In molti casi pratici il prodotto  $\alpha d$  è molto piccolo (ad esempio:  $\alpha_{\text{db}} d < 0.1$  db) e le perdite possono essere trascurate. In questo caso le formule di trasformazione si semplificano perché si pone

$$\alpha = 0 \quad \gamma = j2\pi/\lambda \quad \operatorname{tgh} \gamma d = j \operatorname{tg} 2\pi/\lambda.$$

Le formule di trasformazione per le linee senza perdite sono elencate nella Tabella 2.1.

Nelle linee senza perdite il modulo del coefficiente di riflessione è costante e si ha  $|\Gamma| = |\Gamma_L|$ . L'andamento dell'ampiezza della tensione e della corrente al variare di  $z$  è quello tipico dei diagrammi d'onda stazionaria indicati nella Figura 8.3 del Capitolo 3. Si definisce il rapporto d'onda stazionaria

$$\mathcal{R} = \frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}} = \frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{min}}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} \quad (2.15)$$

dove  $V_{\text{max}}$  e  $I_{\text{max}}$ ,  $V_{\text{min}}$  e  $I_{\text{min}}$  sono le ampiezze massime e minime della tensione e della corrente lungo la linea. Si ha

**Tabella 2.1** Trasformazione del coefficiente di riflessione, dell'impedenza e dell'ammettenza in una linea senza perdite

$\Gamma(z-d) = \Gamma(z) e^{-j4\pi d/\lambda}$ $Z(z-d) = Z^0 \frac{Z(z) + jZ^0 \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}{Z^0 + jZ(z) \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}$ $Y(z-d) = Y^0 \frac{Y(z) + jY^0 \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}{Y^0 + jY(z) \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}$ <p><math>d</math> = spostamento verso il generatore (Figura 2.1)</p>	$\Gamma_I = \Gamma_L e^{-j4\pi d/\lambda}$ $Z_I = Z^0 \frac{Z_L + jZ^0 \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}{Z^0 + jZ_L \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}$ $Y_I = Y^0 \frac{Y_L + jY^0 \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}{Y^0 + jY_L \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}$ <p><math>d</math> = lunghezza della linea (Figura 2.2)</p>
---	---

$$|\Gamma| = |\Gamma_L| = \frac{\mathcal{R} - 1}{\mathcal{R} + 1} \quad (2.16)$$

Inoltre, analogamente a quanto visto nel Capitolo 2 (vedi Equazione 10.12), l'impedenza è reale nelle sezioni di massima e di minima tensione; in tali sezioni l'impedenza assume il valore massimo ( $R_{\max}$ ) e il valore minimo ( $R_{\min}$ ) rispettivamente e si ha:

$$R_{\max} = Z^0 \mathcal{R} \quad R_{\min} = Z^0/\mathcal{R} \quad (2.17)$$

È ovvio che nelle linee senza perdite tutte le sezioni sono attraversate dalla stessa potenza  $P$ . Tale potenza uguaglia quella all'ingresso ( $P_I$ ) e quella assorbita dal carico ( $P_L$ ). Per la (2.14) e la (2.13c) si ha:

$$P_{\text{inc}} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z^0} \quad (2.18)$$

$$P = P_I = P_L = \frac{|V_0^+|^2}{2Z^0} (1 - |\Gamma_L|^2) \quad (2.19)$$

La potenza può anche essere messa in relazione con l'ampiezza massima della tensione ( $V_{\max}$ ) o dalla corrente ( $I_{\max} = V_{\max}/Z^0$ ). Si ha infatti:

$$V_{\max} = |V_0^+| (1 + |\Gamma_L|) \quad |V_0^+| = V_{\max} / (1 + |\Gamma_L|)$$

e quindi, sostituendo nella (2.19) e ricordando la (2.15), si ottiene:

$$P = \frac{V_{\max}^2}{2Z^0 \mathcal{R}} = \frac{Z^0 I_{\max}^2}{2 \mathcal{R}} \quad (2.20)$$

Queste formule sono utili per valutare la massima potenza trasmissibile, per dato valore del R.O.S. prodotto dal carico. Infatti la potenza è limitata dalla tensione e dalla corrente massima raggiungibile (per evitare scariche e surriscaldamento,<sup>1</sup>) cosicché, per ogni linea i valori  $V_{\max}$  e  $I_{\max}$  non possono superare certi limiti, in genere tanto più elevati quanto maggiori sono le dimensioni trasversali della linea. Attraverso le precedenti relazioni tali limiti determinano la massima potenza trasmissibile. Si nota che, per data linea, la potenza trasmissibile è massima quando il rapporto d'onda stazionaria è minimo ( $\mathcal{R} = 1$ , linea adattata, vedi paragrafo successivo).

### 5.3 Casi di particolare interesse

**LINEA ADATTATA** La (2.6c) mostra che il coefficiente di riflessione si annulla se - e solo se - l'impedenza di carico è uguale all'impedenza caratteristica della linea (Figura 3.1). Quando non si ha riflessione si dice che la linea è "adattata". Dunque si ha:

$$\text{condizione di adattamento: } Z_L = Z^0$$

La tensione e la corrente hanno la forma:

$$V = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j2\pi z/\lambda} \quad I = \frac{V_0^+}{Z^0} e^{-\alpha z} e^{-j2\pi z/\lambda} \quad (3.1)$$

Se la linea è senza perdite la tensione e la corrente hanno ovunque la stessa ampiezza ( $\mathcal{R} = 1$ ).

In una linea adattata l'impedenza vista in una sezione qualsiasi è sempre uguale all'impedenza caratteristica. In particolare si ha:

$$Z_1 = Z^0 \quad (3.2)$$

indipendentemente dalla lunghezza della linea e dalla frequenza.

1 Il surriscaldamento è dovuto alle perdite, che sono in realtà presenti anche se vengono ignorate in prima approssimazione. Esso dipende dalla potenza dissipata per unità di lunghezza che, in assenza di onda riflessa, è data dalla somma  $W_c + W_d = 2\alpha P$  (vedi Equazione 11.3, Capitolo 3). Il surriscaldamento può essere ignorato nelle linee che trasmettono periodicamente brevi impulsi a radiofrequenza, quando la durata degli impulsi è una piccola frazione del loro periodo di ripetizione (come, ad esempio, nei radar). In questo caso, infatti, la potenza media dissipata (da cui dipende il surriscaldamento) è molto minore di quella dissipata durante gli impulsi, e il surriscaldamento è basso anche nel caso di elevati valori della potenza degli impulsi.

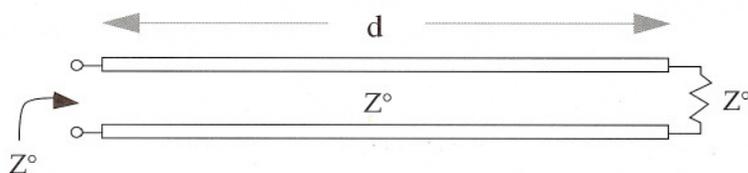


Figura 3.1

Poiché l'onda riflessa è assente si ha:

$$P = P_{\text{inc}} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z}$$

Pertanto, in una linea adattata, le potenze all'ingresso e all'uscita sono collegate dalla semplice relazione:

$$P_L = P_I e^{-2\alpha d} \quad (3.3)$$

**LINEA IN CORTOCIRCUITO** In questo caso (Figura 3.2) si ha  $Z_L = 0$  e quindi dalla (2.11b) si deduce:

$$Z_I = Z_0 \operatorname{tgh} \gamma d = Z_0 \frac{\sinh 2\alpha d + j \sin 4\pi d / \lambda}{\cosh 2\alpha d + \cos 4\pi d / \lambda} \quad (3.4)$$

Inoltre, poiché si ha  $\Gamma_L = -1$ , se si prende l'origine dell'asse  $z$  sulla sezione del cortocircuito risulta (vedi Equazione 2.2a, b):

$$\begin{aligned} V_0^- &= \Gamma_L V_0^+ = -V_0^+ \\ V(z) &= -2V_0^+ \sinh \gamma z \quad I(z) = 2 \frac{V_0^+}{Z_0} \cosh \gamma z \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se la linea è senza perdite l'impedenza è reattiva:

$$Z_I = jX_I = jZ_0 \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda} = jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\omega d}{v} \quad (3.6)$$

L'andamento della reattanza al variare della frequenza è indicato nella Figura 3.2. Alle frequenze per cui  $d$  è uguale a un multiplo di mezza lunghezza d'onda l'impedenza

d'ingresso è nulla come in un circuito LC tipo serie alla risonanza. Invece, alla frequenza per cui  $d$  è uguale a un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda l'impedenza è infinita, come in un circuito LC tipo parallelo alla risonanza.<sup>1</sup>

Dalla (3.5), ponendo  $\gamma = j2\pi/\lambda$ , si deducono le espressioni della tensione e della corrente nel caso di una linea senza perdite:

$$V = -j2V_0^+ \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \quad I = 2 \frac{V_0^+}{Z^0} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \quad (3.7)$$

L'andamento della tensione e della corrente è quello solito delle onde stazionarie pure (Figura 3.2). Il primo nodo della tensione si ha sul cortocircuito terminale, gli altri nodi si susseguono a distanza di mezza lunghezza d'onda. In corrispondenza dei nodi di tensione si hanno i massimi della corrente, mentre i nodi della corrente si hanno nelle stesse posizioni dei massimi della tensione. La posizione dei nodi cambia con la frequenza, e quindi, per certe frequenze, all'ingresso della linea si ha un nodo di tensione o di corrente. Queste frequenze sono quelle per cui l'impedenza d'ingresso si annulla o diverge.

La potenza trasmessa in una linea senza perdite cortocircuitata è nulla perché la tensione e la corrente sono in quadratura; questo risultato era prevedibile perché né la linea né il carico assorbono energia.

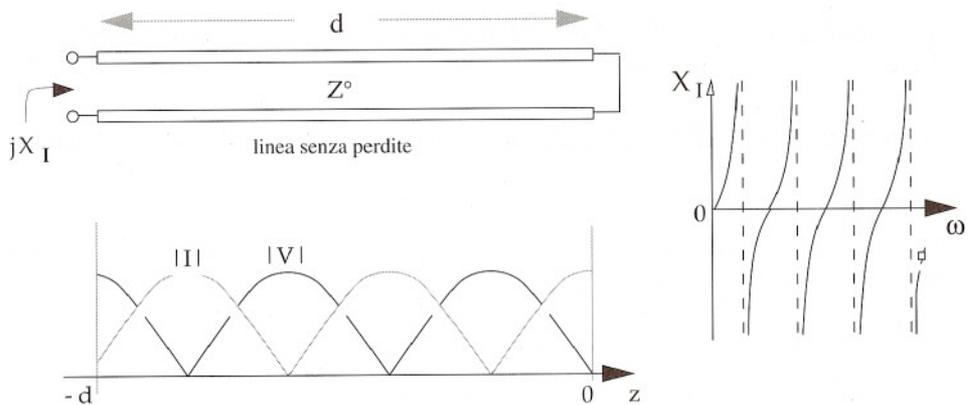


Figura 3.2

<sup>1</sup> A bassa frequenza, quando  $d \ll \lambda$ , si ha:

$$Z_1 = jX_1 \approx jZ^0 \frac{2\pi d}{\lambda} = jZ^0 \frac{\omega d}{v} = j\omega Ld$$

dove  $L = Z^0/v$  è l'induttanza per unità di lunghezza (vedi Equazione 1.9 e 1.10). Come era prevedibile, a bassa frequenza la linea in cortocircuito si comporta come un induttore di induttanza  $Ld$ .

■ Se si considera una linea a basse perdite ( $\alpha d \ll 1$ ) si ha:

$$\sinh 2\alpha d \approx 2\alpha d \quad \cosh 2\alpha d \approx 1 + 2(\alpha d)^2$$

Pertanto dalla (3.4) si ottiene:

$$R_I \approx Z^0 \frac{\alpha d}{(\alpha d)^2 + \cos^2(2\pi d/\lambda)} \quad X_I \approx \frac{Z^0}{2} \frac{\sin(4\pi d/\lambda)}{(\alpha d)^2 + \cos^2(2\pi d/\lambda)} \quad (3.8)$$

L'andamento tipico di  $R_I$  e di  $X_I$  al variare della frequenza è indicato nella Figura 3.3. L'andamento della reattanza è praticamente coincidente con quello che si avrebbe se la linea fosse senza perdite, tranne che in prossimità delle frequenze alle quali la lunghezza della linea è prossima ad un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda. Intorno a tali frequenze la reattanza passa rapidamente - ma in modo continuo - da valori positivi a valori negativi, mentre la resistenza assume valori elevati. Intorno a queste frequenze l'andamento dell'impedenza è analogo a quello che si ha, intorno alla frequenza di risonanza, in un circuito RLC tipo parallelo.

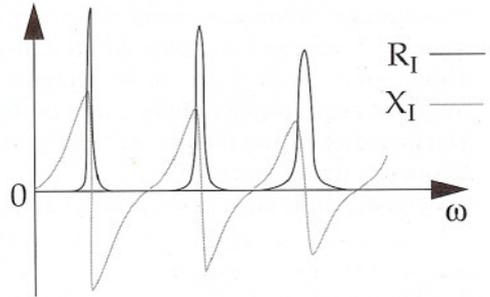


Figura 3.3

LINEA A VUOTO In questo caso (Figura 3.4) si ha  $Y_L = 0$  e quindi, per la (2.11c):

$$Y_I = Y^0 \operatorname{tgh} \gamma d = Y^0 \frac{\sinh 2\alpha d + j \sin 4\pi d/\lambda}{\cosh 2\alpha d + \cos 4\pi d/\lambda} \quad (3.9)$$

Nella linea a vuoto si ha  $\Gamma_L = 1$ . Pertanto, prendendo l'origine dell'asse  $z$  sulla sezione terminale, risulta:

$$V_0^- = \Gamma_L V_0^+ = V_0^+$$

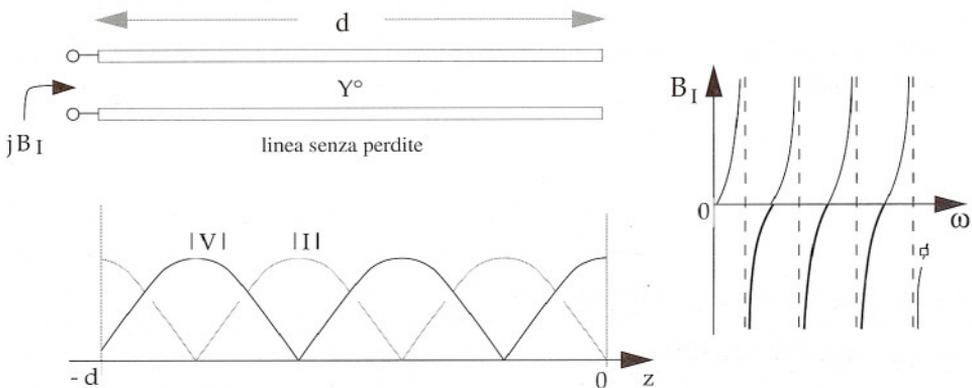


Figura 3.4

$$V = 2 V_0^+ \cosh \gamma z \quad I = -2 \frac{V_0^+}{Z^0} \sinh \gamma z \quad (3.10)$$

Se la linea è senza perdite l'ammettenza è immaginaria:

$$Y_1 = jB_1 = jY^0 \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda} = jY^0 \operatorname{tg} \frac{\omega d}{v} \quad (3.11)$$

L'andamento della suscettanza al variare della frequenza è indicato nella Figura 3.4. Alle frequenze per cui  $d$  è uguale ad un multiplo di mezza lunghezza d'onda la suscettanza d'ingresso è nulla, come in un circuito LC tipo parallelo alla risonanza. Invece, alla frequenza per cui  $d$  è uguale a un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda la suscettanza è infinita, come avviene per la suscettanza di un circuito LC tipo serie, alla frequenza di risonanza.<sup>1</sup>

Sempre nell'ipotesi di linea senza perdite, si ha:

$$V(z) = 2 V_0^+ \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \quad I(z) = j2 \frac{V_0^+}{Z^0} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \quad (3.12)$$

La tensione e la corrente hanno l'andamento di onde stazionarie (Figura 3.4). Il primo nodo della tensione si ha a un quarto di lunghezza d'onda dalla sezione terminale, gli altri nodi si susseguono a distanza di mezza lunghezza d'onda. I nodi della corrente si hanno in corrispondenza dei massimi della tensione e il primo nodo si ha sulla sezione terminale. Le frequenze per cui l'ammettenza d'ingresso è nulla sono quelle per cui all'ingresso della linea si ha un nodo della corrente; invece le frequenze per cui l'ammettenza diverge sono quelle per cui all'ingresso si ha un nodo della tensione. Come nel caso della linea in cortocircuito, in una linea senza perdite a vuoto la potenza trasmessa è nulla.

L'andamento con la frequenza della conduttanza e della suscettanza di una linea a basse perdite ( $\alpha d \ll 1$ ) è analogo a quello della resistenza e della reattanza nella linea in cortocircuito (sostituire  $G_1$  a  $R_1$ ,  $B_1$  a  $X_1$ ,  $Y^0$  a  $Z^0$  nelle (3.8) e nella Figura 3.3).

**LINEA  $\lambda/2$  SENZA PERDITE** Se la linea è senza perdite e se la sua lunghezza è pari a mezza lunghezza d'onda, si ha:

$$\Gamma_1 = \Gamma_L \quad Z_1 = Z_L$$

<sup>1</sup> A bassa frequenza, quando  $d \ll \lambda$ , si ha:

$$Y_1 = jB_1 \approx jY^0 \frac{2\pi d}{\lambda} = jY^0 \frac{\omega d}{v} = j\omega Cd$$

dove  $C = 1/vZ^0$  è la capacità per unità di lunghezza (vedi Equazione 1.9 e 1.10). Come era prevedibile, a bassa frequenza la linea aperta si comporta come un condensatore di capacità  $Cd$ .

È inoltre facile verificare che, indipendentemente dal valore di  $Z_L$ , le tensioni (correnti) all'ingresso e sul carico hanno ampiezza uguale e sono in opposizione di fase (Figura 3.5).

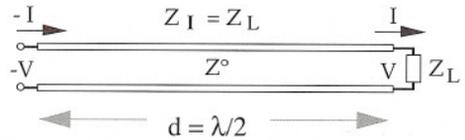


Figura 3.5

**LINEA  $\lambda/4$  SENZA PERDITE** Se la linea è senza perdite e se la sua lunghezza è uguale ad un quarto d'onda (Figura 3.6) si ha:

$$\Gamma_I = -\Gamma_L \quad (3.13a)$$

$$Z_I = \frac{Z^0{}^2}{Z_L} \quad (3.13b)$$

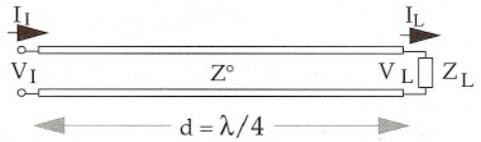


Figura 3.6

Analogamente a quanto osservato per gli strati in quarto d'onda considerati nel Capitolo 2, le linee  $\lambda/4$  si comportano come invertitori d'impedenza.

Posta l'origine all'uscita della linea, la tensione e la corrente sul carico sono date da

$$V_L = V_0^+ + V_0^- \quad I_L = (V_0^+ - V_0^-) / Z^0$$

Poiché  $2\pi d/\lambda = \pi/2$ , la tensione e la corrente all'ingresso sono:

$$V_I = V_0^+ e^{j\pi/2} + V_0^- e^{-j\pi/2} = j(V_0^+ - V_0^-)$$

$$I_I = (V_0^+ e^{j\pi/2} - V_0^- e^{-j\pi/2}) / Z^0 = j(V_0^+ + V_0^-) / Z^0$$

Pertanto si ha:

$$I_L = -jV_I / Z^0 \quad V_L = -jZ^0 I_I \quad (3.14)$$

Si nota che la corrente sul carico è in ritardo di  $\pi/2$  rispetto alla tensione d'ingresso e dipende solo dall'impedenza caratteristica e dalla tensione stessa.

Per questa ragione, collegando in parallelo gli ingressi di  $N$  linee  $\lambda/4$  chiuse su carichi di impedenze  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  (Figura 3.7), risulta che le correnti  $I_1, I_2, \dots, I_N$  sui carichi hanno tutte la stessa fase; inoltre le loro ampiezze stanno fra loro nel rapporto inverso delle impedenze caratteristiche delle linee, indipendentemente dai valori delle impedenze di carico.

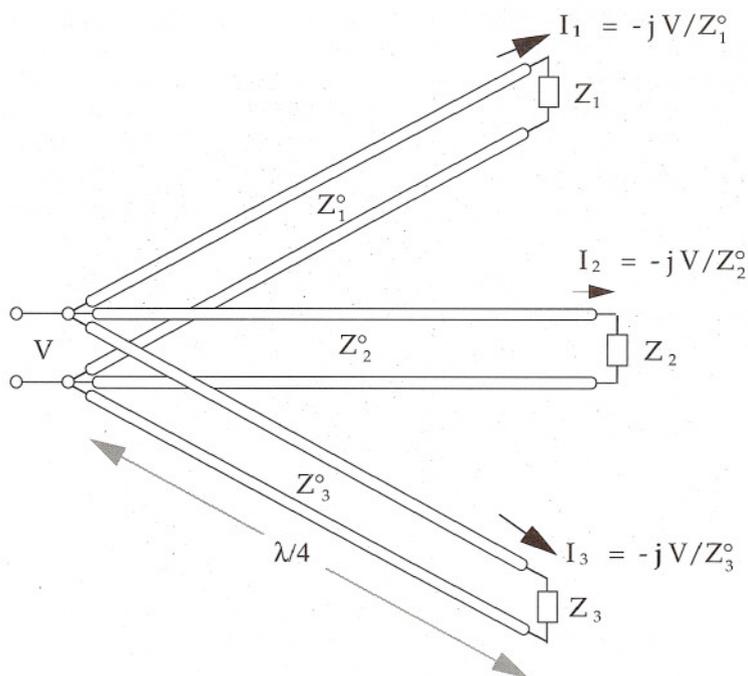


Figura 3.7

## 5.4 Carta di Smith

Le quantità adimensionali

$$\bar{Z} = Z / Z^0 \quad \bar{R} = \text{Re} \bar{Z} = R / Z^0 \quad \bar{X} = \text{Im} \bar{Z} = X / Z^0$$

vengono dette impedenza, resistenza e reattanza normalizzate. Analogamente le quantità

$$\bar{Y} = Y / Y^0 \quad \bar{G} = \text{Re} \bar{Y} = G / Y^0 \quad \bar{B} = \text{Im} \bar{Y} = B / Y^0$$

sono dette ammettenza, conduttanza e suscettanza normalizzate. Dalle (2.6c) e (2.6d) risulta:

$$\Gamma = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} \tag{4.1a}$$

$$-\Gamma = \frac{\bar{Y} - 1}{\bar{Y} + 1} \tag{4.1b}$$

Queste espressioni mostrano che a ogni valore di impedenza (ammettenza) normalizzata corrisponde un coefficiente di riflessione ben determinato. Il collegamento esistente fra

l'impedenza normalizzata e il coefficiente di riflessione è evidenziato graficamente nella "carta di Smith" (Figura 4.1).

La carta rappresenta sul piano  $\Gamma$  i luoghi  $\bar{R} = \text{cost.}$  (cerchi a tratto pieno) e i luoghi  $\bar{X} = \text{cost.}$  (archi di cerchio a tratto più debole).<sup>1</sup> Pertanto la carta di Smith permette di individuare graficamente il coefficiente di riflessione corrispondente ad una data impedenza normalizzata e viceversa. Ad esempio (vedi figura) l'impedenza  $\bar{Z} = 0.2 + j 0.5$  corrisponde al punto P, così che il modulo e l'argomento del coefficiente di riflessione corrispondente a  $\bar{Z}$  sono dati da  $\overline{OP}$  e da  $\theta$  rispettivamente.

Carta di Smith (impedenze)

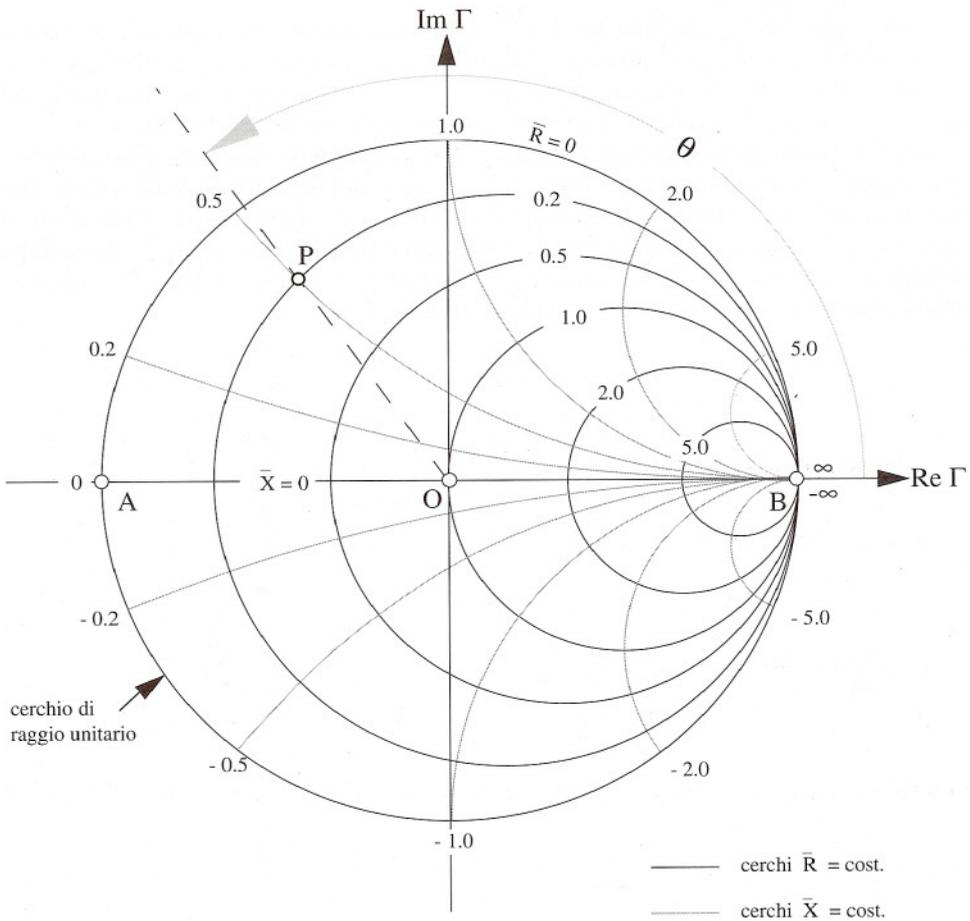


Figura 4.1

<sup>1</sup> Per la costruzione della carta di Smith si veda: Ramo, Whinnery, Van Duzer, *Fields and Waves in Modern Radio*, J. Wiley, 1967, sec. 1.20.

La carta di Smith è compresa all'interno di un cerchio di raggio unitario, perché il modulo del coefficiente di riflessione non può superare 1 (la potenza riflessa non può superare quella incidente). Si osserva inoltre quanto segue:

- il centro della carta ( $\Gamma = 0$ ) corrisponde a  $\bar{Z} = 1 + j0$  (linea adattata,  $Z = Z^0$ );
- il cerchio di raggio unitario ( $|\Gamma| = 1$ ) è il luogo delle impedenze reattive ( $\bar{Z} = 0 + j\bar{X}$ ) perché si ha riflessione totale solo quando la parte reale dell'impedenza è nulla;
- il diametro AB ( $\Gamma$  reale) è il luogo delle impedenze puramente resistive ( $\bar{Z} = \bar{R} + j0$ ), perché il coefficiente di riflessione è reale solo quando l'impedenza è reale;
- il punto A corrisponde all'impedenza  $\bar{Z} = 0$  (cortocircuito);
- il punto B corrisponde a  $|\bar{Z}| = \infty$  (circuito aperto);
- i punti collocati nella parte superiore (inferiore) della carta corrispondono alle impedenze induttive (capacitive).

La (4.1b) mostra che la relazione fra  $-\Gamma$  e  $\bar{Y}$  è identica a quella esistente fra  $\Gamma$  e  $\bar{Z}$ . Pertanto i cerchi della carta di Smith possono anche essere interpretati come cerchi  $\bar{G} = \text{cost.}$  e  $\bar{B} = \text{cost.}$  purché l'orientamento degli assi  $\text{Re}\Gamma$  e  $\text{Im}\Gamma$  venga invertito rispetto a quello della Figura 4.1. La carta di Smith per le ammettenze è rappresentata nella Figura 4.2.

A parte il diverso orientamento degli assi (che in genere non vengono rappresentati), la struttura della carta di Smith per le impedenze e per le ammettenze è identica. Pertanto la stessa carta può essere usata sia come carta d'impedenza sia come carta d'ammettenza, con l'avvertenza di misurare l'argomento del coefficiente di riflessione a partire dal semiasse orizzontale di destra quando si considerano le impedenze (Figura 4.3a), dal semiasse di sinistra quando si considerano le ammettenze (Figura 4.3b).

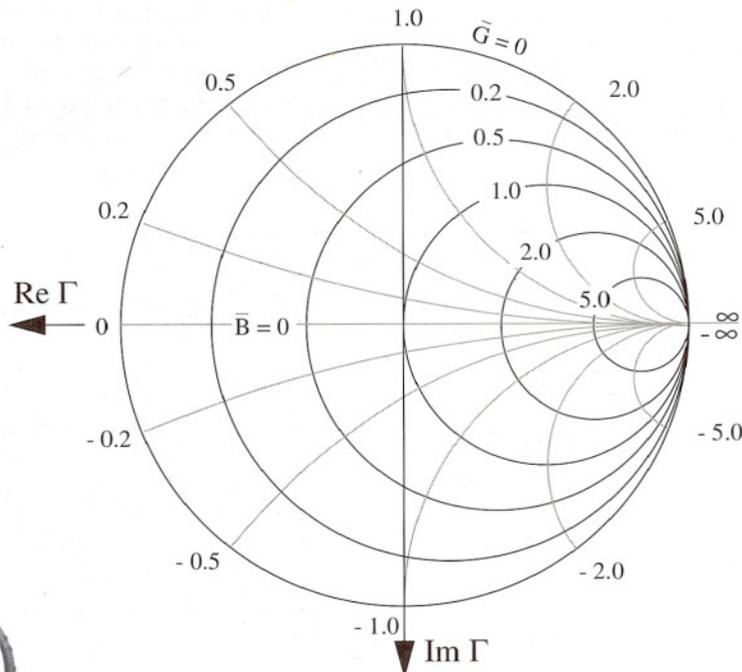


Figura 4.2



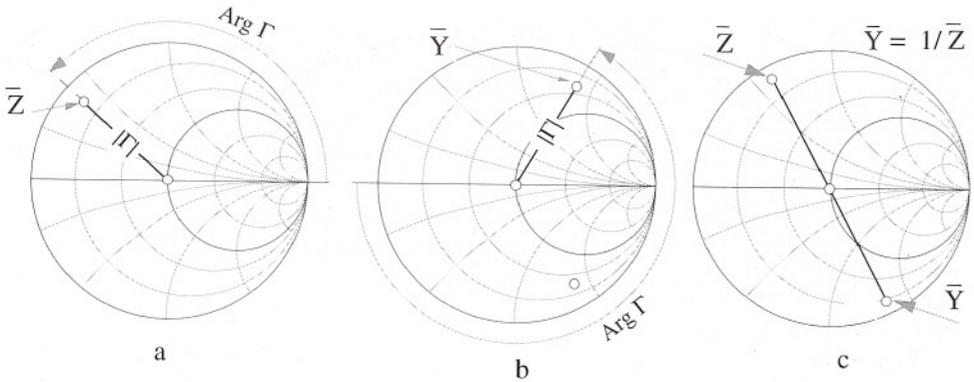


Figura 4.3

L'ammettenza  $\bar{Y}$  corrispondente all'impedenza  $\bar{Z}$  (cioè  $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$ ) è rappresentata sulla carta di Smith dal punto simmetrico a quello che rappresenta  $\bar{Z}$  (Figura 4.3c); infatti sia a  $\bar{Z}$  che a  $\bar{Y}$  compete lo stesso coefficiente di riflessione, che è rappresentato da punti simmetrici sulla carta di ammettenza e su quella di impedenza.

La carta di Smith è utile perché permette di visualizzare le trasformazioni di impedenza (ammettenza) lungo le linee, trasformazioni che non sono per niente intuitive, a causa della complessità delle espressioni (2.8) e (2.9). Si consideri ad esempio la trasformazione d'impedenza che si ha al passaggio dalla sezione  $z$  alla sezione  $z-d$  in una linea *senza perdite* di impedenza caratteristica  $Z^0$ . Sia  $Z/Z^0 = \bar{R} + j\bar{X}$  l'impedenza normalizzata nella sezione  $z$ , cui corrisponde il coefficiente di riflessione  $\Gamma$  rappresentato dal punto  $P$  (Figura 4.4). Poiché la linea è senza perdite il coefficiente di riflessione nella sezione  $z-d$  è dato da

$$\Gamma' = \Gamma e^{-j4\pi d/\lambda}$$

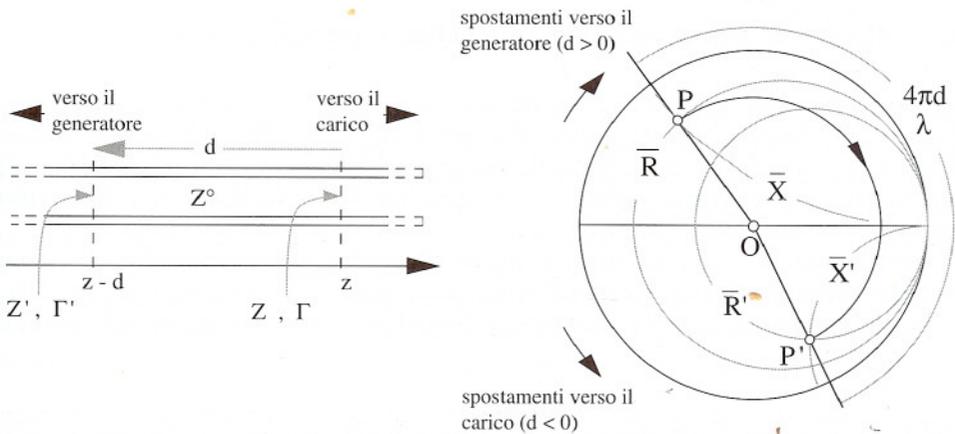


Figura 4.4

e differisce da  $\Gamma$  solo per l'argomento. Pertanto  $\Gamma'$  è rappresentato dal punto  $P'$ , ottenuto spostando  $P$  nel verso orario lungo un arco di circonferenza con centro sull'origine, di ampiezza angolare pari a  $4\pi d/\lambda$  (le rotazioni orarie corrispondono agli spostamenti verso il generatore, quelle antiorarie a spostamenti verso il carico). In corrispondenza di  $P'$  si leggono i valori  $\bar{R}'$  e  $\bar{X}'$  della parte reale e della parte immaginaria dell'impedenza normalizzata nella sezione  $z - d$ . L'impedenza cercata è  $Z' = Z^0(\bar{R}' + j\bar{X}')$ .

Le trasformazioni di ammettenza vengono effettuate esattamente nello stesso modo.

La carta di Smith può essere usata per trasformare le impedenze (ammettenze) anche nel caso di una linea con perdite. In questo caso si ha:

$$\Gamma' = (\Gamma e^{-j4\pi d/\lambda}) e^{-2\alpha d}$$

Pertanto, dopo aver effettuato la rotazione che porta  $P$  in  $P'$ , il punto  $Q'$  che rappresenta  $\Gamma'$  (vedi Figura 4.5) viene ottenuto modificando la lunghezza del segmento  $OP'$  in base alla relazione

$$OQ' = OP' e^{-2\alpha d}$$

I valori di  $\bar{R}'$  e  $\bar{X}'$  vengono letti nel punto  $Q'$ .

Le rotazioni sulla carta di Smith sono proporzionali a  $d/\lambda$ . Esse vengono agevolate dalla presenza di due cerchi graduati (vedi Figura 4.6), su cui sono riportati i valori di  $d/\lambda$  nell'intervallo  $0 \div 0.5$ .<sup>1</sup> Nei due cerchi le scale sono orientate nel verso orario (per le rotazioni corrispondenti a spostamenti verso il generatore) o in quello antiorario (per gli spostamenti verso il carico).

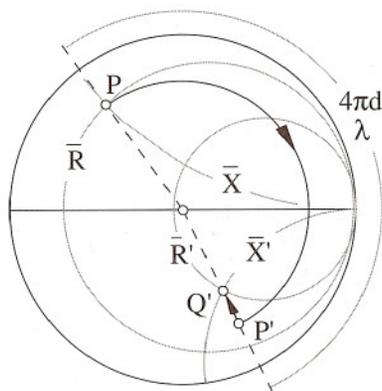


Figura 4.5

## 5.5 Misura d'impedenza mediante la linea fessurata

Ad alta frequenza la misura d'impedenza può essere effettuata connettendo l'impedenza da determinare all'estremità di una linea e misurando il rapporto d'onda stazionaria e la distanza di un minimo del diagramma d'onda stazionaria dall'estremità della linea. Il metodo, oggi pressoché abbandonato grazie all'avvento di strumenti molto più sofisticati e pratici da usare, è istruttivo e merita di essere considerato.

Normalmente la linea è costituita da un cavo coassiale nel quale viene introdotta una sonda attraverso una fenditura longitudinale praticata sul conduttore esterno (Figura 5.1). Se la fenditura è stretta la perturbazione che essa introduce sulla propagazione del modo TEM

<sup>1</sup> Il valore  $d/\lambda = 0.5$  corrisponde ad una rotazione di  $2\pi$ . Rotazioni corrispondenti a spostamenti maggiori di  $\lambda/2$ , vengono effettuate sottraendo da  $d/\lambda$  il multiplo di 0.5 che consente di ottenere un valore compreso fra 0 e 0.5. Ad esempio lo spostamento  $d/\lambda = 4.772 = 9 \times 0.5 + 0.272$  è equivalente allo spostamento  $d/\lambda = 0.272$ .

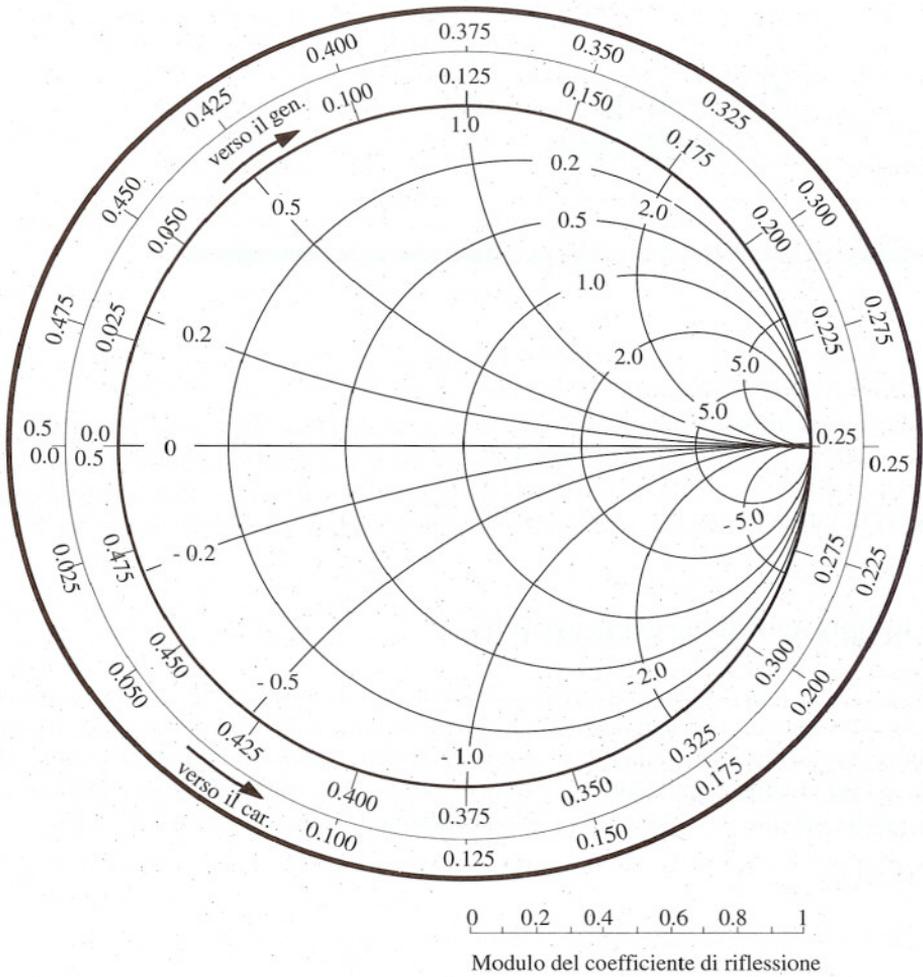


Figura 4.6

è trascurabile (si ricorda che nel modo TEM le correnti sono longitudinali) così che il diagramma d'onda stazionaria è praticamente identico a quello che si avrebbe in assenza della fenditura. La sonda può essere spostata lungo il cavo, in modo da prelevare un segnale di ampiezza proporzionale all'ampiezza della tensione esistente nelle varie sezioni trasversali. Mediante la linea fessurata è possibile determinare il rapporto d'onda stazionaria e la distanza  $d_{\min}$  (Figura 5.2). Da queste quantità si deduce l'impedenza di carico, mediante il seguente procedimento. Dal rapporto d'onda stazionaria si deduce il valore dell'impedenza normalizzata vista nella sezione di minimo, che è data da (vedi Equazione 2.17):

$$\bar{Z} = \frac{Z^0 / \mathcal{R}}{Z^0} = \frac{1}{\mathcal{R}} \quad (\text{punto P sulla carta di Smith})$$

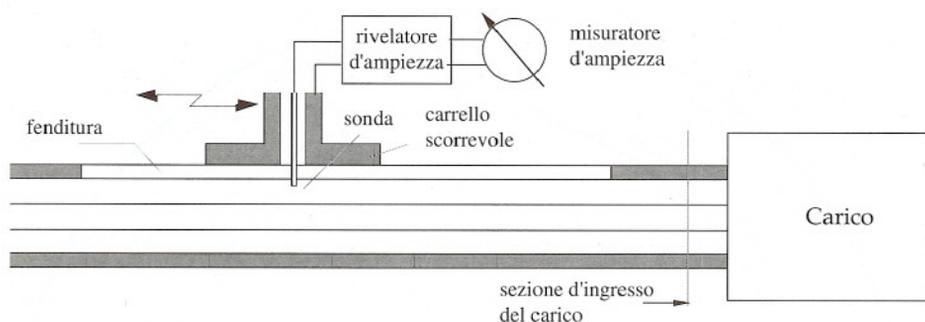


Figura 5.1

Si passa dalla sezione di minimo alla sezione d'ingresso del carico effettuando uno spostamento  $d_{\min}$  verso il carico. Quindi la rotazione in verso antiorario corrispondente a  $d_{\min}/\lambda$  permette di individuare sulla carta di Smith l'impedenza di carico normalizzata  $\bar{Z}_L$  (punto Q). Infine l'impedenza incognita viene determinata calcolando  $Z_L = \bar{Z}_L Z^0$ .

## 5.6 Rappresentazione dei generatori

La Figura 6.1a rappresenta in maniera schematica un generatore che eroga potenza ad un carico attraverso una linea di trasmissione. I terminali del generatore e del carico sono posti su una certa sezione AA' della linea. La potenza è generata da correnti di densità  $\mathbf{J}_0$ , che si assume siano indipendenti dalle condizioni di carico.<sup>1</sup> Le correnti  $\mathbf{J}_0$  generano il campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e - nella sezione AA' - la tensione  $V$  e la corrente  $I$ . Nella stessa sezione si ha

$$\mathbf{H} = I \mathbf{h}^0 \quad (6.1)$$

dove  $\mathbf{h}^0$  è il vettore modale magnetico per il modo dominante della linea.

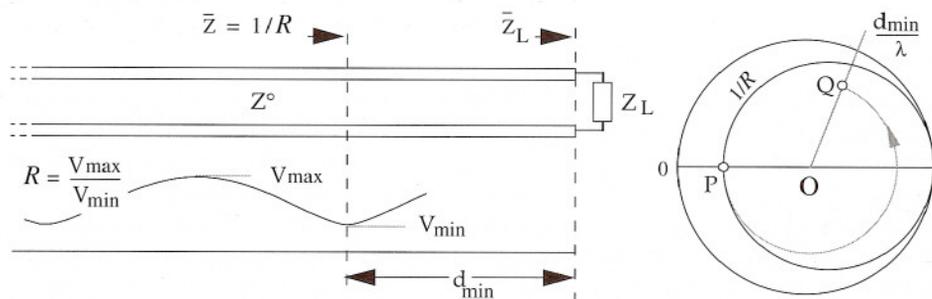


Figura 5.2

<sup>1</sup> In alcuni tipi di generatore  $\mathbf{J}_0$  dipende in qualche misura dalle condizioni di carico. In questi casi l'ipotesi è accettabile solo in prima approssimazione.

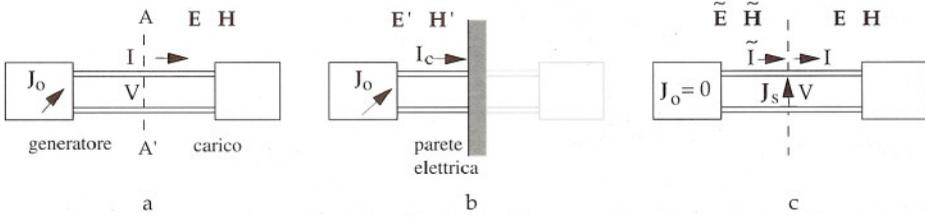


Figura 6.1

Se il generatore viene cortocircuitato, ponendo una parete perfettamente conduttrice sulla sezione AA' (Figura 6.1b), nella regione del generatore si ha il campo  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  e la corrente sulla sezione AA' assume un certo valore  $I_c$  (corrente di cortocircuito del generatore). In queste condizioni il campo magnetico sulla sezione AA' diviene:

$$\mathbf{H}' = I_c \mathbf{h}^0$$

Per la regola di equivalenza illustrata nella Figura 3.3 del Capitolo 4, il campo nella regione del carico rimane uguale a quello creato dal generatore, se si considera la situazione di Figura 6.1c, in cui le sorgenti effettive del campo vengono sostituite da una lamina di corrente di densità

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{u}_z \times \mathbf{H}' = I_c \mathbf{u}_z \times \mathbf{h}^0 \quad (6.2)$$

giacente sulla sezione AA'. In particolare la lamina equivalente genera nella sezione AA' proprio la tensione  $V$  e - dalla parte del carico - proprio la corrente  $I$ . La lamina determina una discontinuità nel campo magnetico che, alla sinistra di AA' è dato da

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{I} \mathbf{h}^0$$

dove  $\tilde{I}$  rappresenta la corrente immediatamente a sinistra di AA'. Indicando con  $Z_g$  l'impedenza vista dalla sezione AA', guardando verso il generatore quando  $\mathbf{J}_0 = 0$  (impedenza interna del generatore), si ha:

$$-\tilde{I} = V / Z_g$$

Pertanto risulta:

$$\tilde{\mathbf{H}} = -(V/Z_g) \mathbf{h}^0 \quad (6.3)$$

Considerando la relazione

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{u}_z \times (\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}})$$

e sostituendo le espressioni (6.1), (6.2) e (6.3) si ottiene:

$$I_c \mathbf{u}_z \times \mathbf{h}^0 = (I + V / Z_g) \mathbf{u}_z \times \mathbf{h}^0$$

da cui:

$$I_c = I + V/Z_g$$

Questa relazione corrisponde allo schema circuitale indicato nel riquadro tratteggiato nella Figura 6.2a (generatore equivalente di Norton). Il generatore equivalente può sostituire quello reale ai fini di tutti i calcoli circuitali. Esso è determinato da due sole quantità: la corrente di cortocircuito del generatore e la sua impedenza interna. Tali quantità caratterizzano completamente il generatore, qualunque sia la sua reale struttura.

La tensione a vuoto del generatore è  $V_0 = Z_g I_c$ ; pertanto, eliminando  $I_c$  dalla precedente equazione, si ottiene:

$$V_0 = Z_g I + V$$

Questa relazione corrisponde allo schema circuitale indicato nel riquadro tratteggiato nella Figura 6.2b (generatore equivalente di Thevenin).<sup>1</sup> Dunque il generatore può anche essere caratterizzato mediante la tensione a vuoto, piuttosto che attraverso la corrente di cortocircuito.

Come è noto dalla teoria dei circuiti un generatore eroga la massima potenza (potenza disponibile) quando esso è chiuso su un'impedenza pari a  $Z_g^*$ . Grazie a questo fatto è possibile determinare indirettamente l'impedenza interna collegando il generatore a un carico di impedenza variabile e osservando per quale valore d'impedenza si ha la massima erogazione di potenza. La misura della potenza disponibile permette inoltre di determinare indirettamente i moduli di  $I_c$  e di  $V_0$ .<sup>2</sup> Infatti, come risulta immediatamente dall'esame dei circuiti indicati in Figura 6.3, la potenza disponibile è data da:

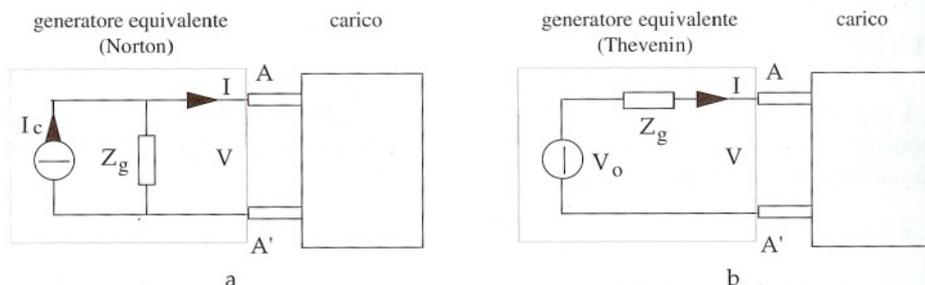


Figura 6.2

- 1 Sarebbe stato possibile giungere direttamente al circuito equivalente di Thevenin, applicando il criterio di equivalenza illustrato nella Figura 3.4 del Capitolo 4.
- 2 Ad alta frequenza (esempio  $f > 100$  MHz) le tensioni e le correnti non possono essere misurate direttamente, a causa della difficoltà di realizzare voltmetri e amperometri adeguati allo scopo. Pertanto  $V_0$  e  $I_c$  non possono essere ottenute direttamente mediante misure a vuoto o in cortocircuito. Invece le misure di potenza non presentano particolari difficoltà.

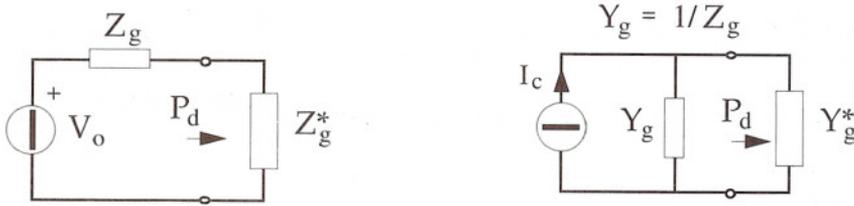


Figura 6.3

$$P_d = \frac{|V_0|^2}{8R_g} = \frac{|I_c|^2}{8G_g} \quad (6.4)$$

( $R_g$  e  $G_g$  sono la resistenza e la conduttanza interna del generatore). Pertanto risulta:

$$|V_0| = \sqrt{8R_g P_d} \quad |I_c| = \sqrt{8G_g P_d} \quad (6.5)$$

Le fasi di  $V_0$  e di  $I_c$  rimangono indeterminate, ma questo non costituisce un problema nella maggior parte dei casi.

In generale l'impedenza all'ingresso della linea collegata al generatore è diversa da quella che dà luogo all'erogazione della potenza disponibile. È facile mostrare che, in questo caso, la potenza erogata dal generatore, ossia quella che entra nella linea, è data da

$$P_I = \operatorname{Re} \frac{V_I I_I^*}{2} = \begin{cases} \frac{R_I |I_I|^2}{2} = \frac{R_I |V_0|^2}{2|Z_g + Z_I|^2} = \frac{4R_g R_I}{|Z_g + Z_I|^2} P_d \\ \frac{G_I |V_I|^2}{2} = \frac{G_I |I_c|^2}{2|Y_g + Y_I|^2} = \frac{4G_g G_I}{|Y_g + Y_I|^2} P_d \end{cases} \quad (6.6)$$

Le formule che mettono in relazione la potenza erogata con quella disponibile sono particolarmente utili, perché la potenza disponibile e l'impedenza interna rientrano fra le specifiche che normalmente caratterizzano i generatori ad alta frequenza.

## 5.7 Adattatori d'impedenza

L'impedenza d'ingresso di una linea disadattata è sensibile alle variazioni di frequenza, tanto più quanto maggiore è la lunghezza della linea. Se la linea è lunga molte lunghezze d'onda le variazioni dell'impedenza d'ingresso possono essere ingenti, anche in bande di frequenza ristrette, come quelle occupate dagli spettri dei segnali quasi-sinusoidali impiegati nei sistemi di radiocomunicazione. In un sistema di telecomunicazioni questo può provocare forti differenze fra il segnale ricevuto dal carico e quello trasmesso dal generatore (distorsione). Per questa ragione fra la linea e il carico viene normalmente inserito un "adattatore d'impedenza" (Figura 7.1), costituito da un quadripolo virtualmente senza perdite che

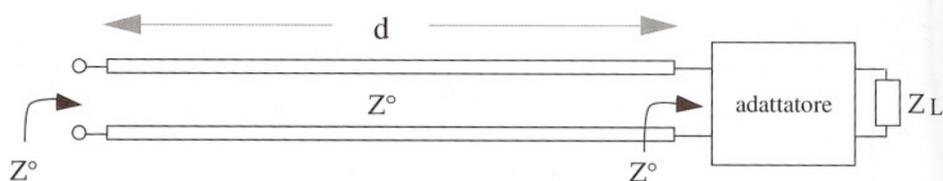


Figura 7.1

trasforma l'impedenza  $Z_L$  nell'impedenza caratteristica della linea.<sup>1</sup> Così, se nella banda di interesse la trasformazione è pressoché perfetta, l'impedenza d'ingresso della linea è pressoché costante ( $Z_I \approx Z^0$ ) e le distorsioni vengono ridotte.

L'adattamento della linea presenta inoltre i seguenti vantaggi:

- poiché l'impedenza d'ingresso è indipendente dalla lunghezza della linea, la potenza erogata dal generatore è quella prevista dal progettista, indipendentemente dalla lunghezza della linea che l'installatore impiega per collegare il generatore al carico;
- la massima potenza trasmissibile aumenta quando la linea è adattata (vedi commento alla Equazione 2.20); pertanto, negli impianti di potenza, l'adattamento permette di ridurre le dimensioni delle linee.

Dunque, nella maggior parte dei casi, i generatori vengono collegati a linee adattate e vedono, come impedenza di carico, l'impedenza caratteristica della linea. Pertanto, affinché la potenza erogata sia massima, è necessario che anche l'impedenza interna del generatore sia uguale all'impedenza caratteristica della linea. Se è verificata questa condizione si dice che il generatore è adattato alla linea. L'adattamento del generatore è ottenuto collegando alla sua uscita un adattatore d'impedenza che trasforma l'impedenza interna del generatore nell'impedenza caratteristica della linea (Figura 7.2a, b). Così il generatore e l'adattatore possono essere visti come un nuovo generatore di impedenza interna pari a  $Z^0$  (Figura 7.2c).

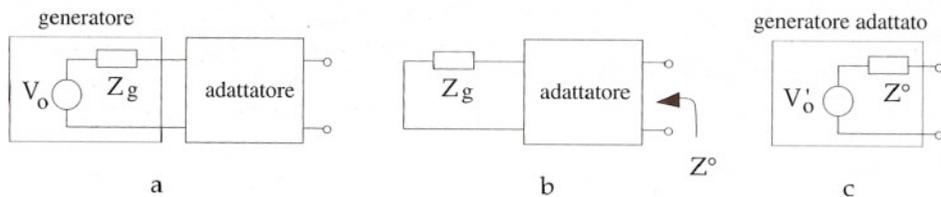


Figura 7.2

<sup>1</sup> L'adattamento di carichi puramente reattivi è impossibile. Infatti, se esso fosse possibile, la linea trasporterebbe la potenza attiva  $P_{inc}$ , che dovrebbe essere totalmente assorbita dal carico (l'adattatore è senza perdite), cosa che non può avvenire se il carico è puramente reattivo.

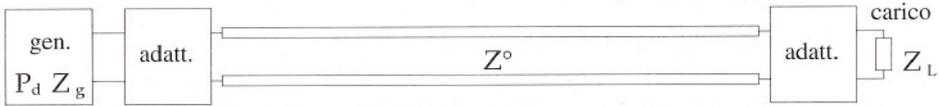


Figura 7.3

In conclusione, in molti casi, il generatore e il carico sono collegati da un circuito del genere di quello indicato nella Figura 7.3. Normalmente, gli apparati commerciali (trasmettitori, ricevitori, antenne, ecc.) includono l'adattatore come parte integrante, così da presentare un'impedenza pari a quella della linea con cui è previsto il collegamento.

Il progetto dell'adattatore connesso al generatore differisce da quello del carico solo perché l'impedenza da adattare è  $Z_g$  invece di  $Z_L$ . Per questa ragione in seguito si farà riferimento al solo caso dell'adattamento del carico. Esistono molti tipi di adattatore, ma non è questa la sede per esaminarli in dettaglio. Pertanto ci si limiterà a pochi esempi.

Se l'impedenza che deve essere adattata è reale ( $Z_L = R_L$ ), l'adattamento può essere ottenuto mediante un tratto  $\lambda/4$  di impedenza caratteristica

$$Z_A^0 = \sqrt{Z^0 R_L} \quad (7.1)$$

La Figura 7.4 rappresenta un adattatore in quarto d'onda realizzato in coassiale; nel tratto  $\lambda/4$  il valore richiesto di impedenza caratteristica viene ottenuto scegliendo opportunamente il diametro del conduttore interno. Si noti che l'impedenza d'ingresso del carico può sempre essere resa reale modificando opportunamente la lunghezza del tratto di linea AB.

Altri tipi di adattatore vengono realizzati inserendo in serie o in parallelo alla linea reattanze opportunamente posizionate. Le reattanze vengono realizzate con tronchi di linea a vuoto o in corto circuito ("stub"). La Figura 7.5 rappresenta lo schema di un adattatore che utilizza uno stub in cortocircuito, posto in parallelo alla linea. La stessa figura mostra la realizzazione in coassiale di questo adattatore. La linea di lunghezza  $d$  trasforma l'ammittenza di carico nell'ammittenza  $Y' = Y^0 + jB$ , che ha parte reale pari all'ammittenza caratteristica della linea con cui si vuole realizzare l'adattamento e parte immaginaria in generale non nulla. La parte immaginaria viene cancellata dallo stub in parallelo, la cui suscettanza è  $-B$ . Così, immediatamente a sinistra dello stub, si vede la richiesta ammettenza  $Y^0$ .

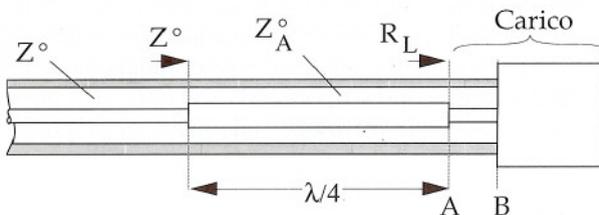


Figura 7.4

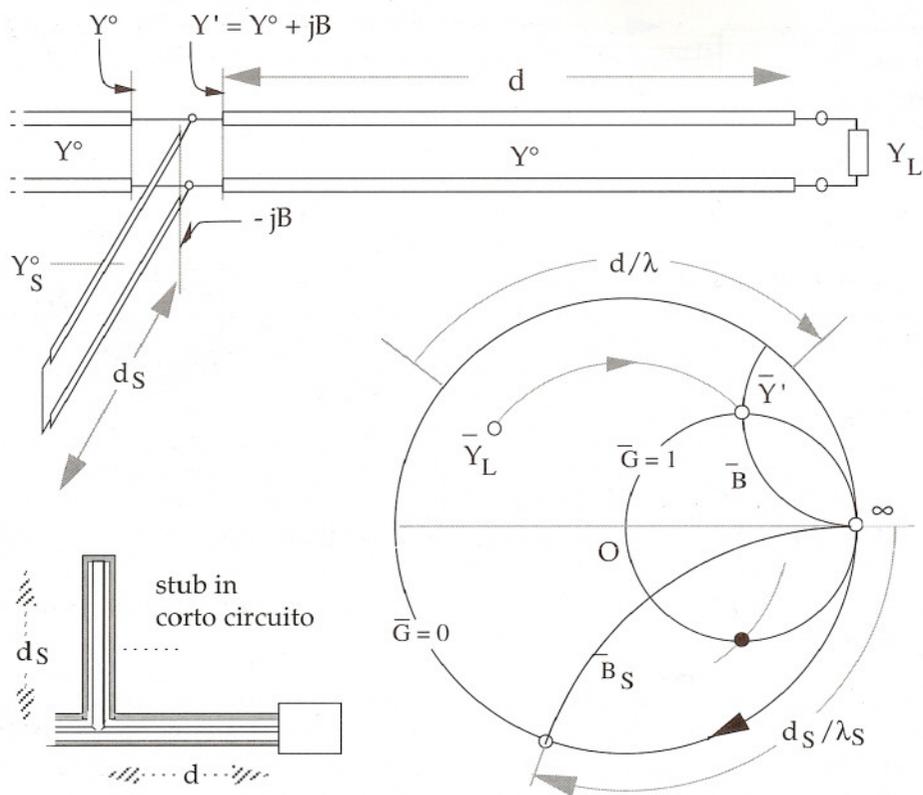


Figura 7.5

Il progetto dell'adattatore è facilitato dalla carta di Smith (vedi figura). Sulla carta viene riportata l'ammettenza di carico normalizzata  $\bar{Y}_L = Y_L/Y^0$ . La linea di lunghezza  $d$  sposta l'ammettenza lungo il cerchio con centro sull'origine passante per  $\bar{Y}_L$ , fino a incontrare il cerchio  $\bar{G} = 1$ . In questo punto si ha  $\bar{Y}' = 1 + j\bar{B}$ , e quindi si ha  $Y' = Y^0 + j\bar{B}Y^0$ . Mediante la carta di Smith si trova il valore di  $d/\lambda$ , da cui si ottiene  $d$ . Si noti che è anche possibile considerare una lunghezza  $d$  maggiore, se il punto  $\bar{Y}'$  viene fatto corrispondere all'altra intersezione fra il cerchio centrato sull'origine e il cerchio  $\bar{G} = 1$  (vedi figura).

Lo stub viene realizzato con una linea di ammettenza caratteristica  $Y_s^0$ , in cui la lunghezza  $d'$  di onda è  $\lambda_s$  (se lo stub è realizzato con una linea uguale a quella principale  $Y_s^0$  e  $\lambda_s$  coincidono con  $Y^0$  e  $\lambda$ ). La lunghezza dello stub ( $d_s$ ) può essere determinata mediante la (3.6), ovvero usando la carta di Smith. A questo scopo si riporta sul cerchio  $\bar{G} = 0$  il punto che rappresenta l'ammettenza d'ingresso che si vuole realizzare; tale punto corrisponde alla suscettanza normalizzata:

$$\bar{B}_s = -B/Y_s^0 = -\bar{B}Y^0/Y_s^0$$

Poiché l'ammettenza del corto circuito terminale è rappresentata dal punto  $\infty$ , la lunghezza

dello stub deve essere tale da spostare tale punto lungo il cerchio  $\bar{G} = 0$  fino a raggiungere il punto corrispondente alla suscettanza  $B_S$ . Dalla carta di Smith si desume il valore di  $d_S/\lambda_S$ .

Se lo stub è costituito da una linea a vuoto il progetto è analogo al precedente. L'unica differenza consiste nella determinazione di  $d_S$  (in questo caso si deve giungere al punto corrispondente a  $\bar{B}_S$  partendo dal punto  $\bar{G} = \bar{B} = 0$ ). L'uso dello stub aperto è più conveniente per la realizzazione degli adattatori nei circuiti a microstriscia (Figura 7.6).

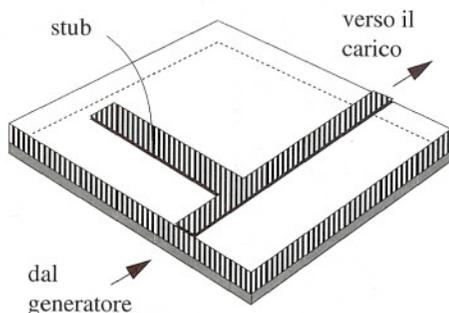


Figura 7.6

### 5.8 Matrice di trasmissione (V-I) di un tronco di linea

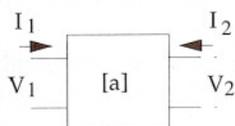
Le tensioni e correnti all'ingresso e all'uscita di un quadripolo lineare qualsiasi (Figura 8.1a) sono legate da relazioni lineari. Pertanto, è lecito scrivere

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

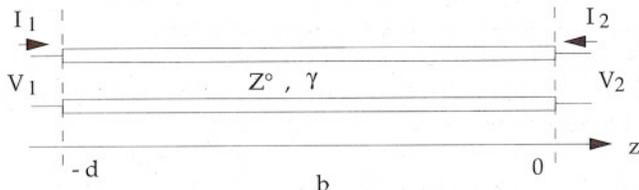
La matrice [a] viene detta matrice di trasmissione (V-I) del quadripolo.<sup>1</sup>

Nel caso di una linea di lunghezza d (Figura 8.1b), ponendo l'origine dell'asse z sulla sezione d'uscita, si ha:

$$V_2 = V(0) = V_0^+ + V_0^- \quad -I_2 = I(0) = \frac{V_0^+}{Z_0} - \frac{V_0^-}{Z_0}$$



a



b

Figura 8.1

<sup>1</sup> La specificazione V-I sta a indicare che la matrice collega tensioni e correnti; essa serve a distinguere la matrice [a] da un altro tipo di matrice di trasmissione usata nello studio dei circuiti a microonde. Secondo la convenzione usata nella teoria dei circuiti i versi positivi delle correnti sono quelli entranti nel quadripolo.

Ricavando  $V_0^+$  e  $V_0^-$  si ottiene:

$$V_0^+ = \frac{V_2 - Z^0 I_2}{2} \quad V_0^- = \frac{V_2 + Z^0 I_2}{2} \quad (8.2)$$

D'altro canto si ha:

$$V_1 = V_0^+ e^{\gamma d} + V_0^- e^{-\gamma d} \quad I_1 = \frac{V_0^+}{Z^0} e^{\gamma d} - \frac{V_0^-}{Z^0} e^{-\gamma d}$$

Sostituendo le (8.2) si ottiene:

$$V_1 = V_2 \cosh \gamma d - I_2 Z^0 \sinh \gamma$$

$$I_1 = V_2 \frac{\sinh \gamma d}{Z^0} - I_2 \cosh \gamma d$$

Dunque la matrice di trasmissione di un tronco di linea è:

$$[a] = \begin{bmatrix} \cosh \gamma d & Z^0 \sinh \gamma d \\ \frac{\sinh \gamma d}{Z^0} & \cosh \gamma d \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Se le perdite della linea sono trascurabili si ha:

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi d}{\lambda} & jZ^0 \sin \frac{2\pi d}{\lambda} \\ j\frac{1}{Z^0} \sin \frac{2\pi d}{\lambda} & \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{linea senza perdite}) \quad (8.4)$$

Si noti che la matrice di trasmissione di una linea è identica a quella introdotta nel Paragrafo 11 del Capitolo 2, per mettere in relazione i campi all'ingresso e all'uscita di uno strato dielettrico attraversato da onde piane uniformi.

Anche nel caso dei quadripoli vale la proprietà secondo la quale la matrice di trasmissione di  $N$  quadripoli in cascata (Figura 8.2) è uguale al prodotto delle matrici di trasmissione dei singoli quadripoli:

$$[a]^{\text{tot}} = [a]^{(1)} [a]^{(2)} \dots [a]^{(N)} \quad (8.5)$$

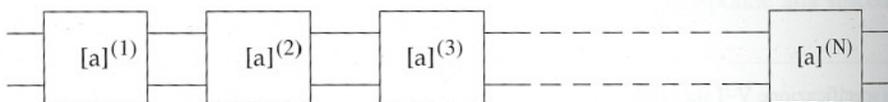


Figura 8.2

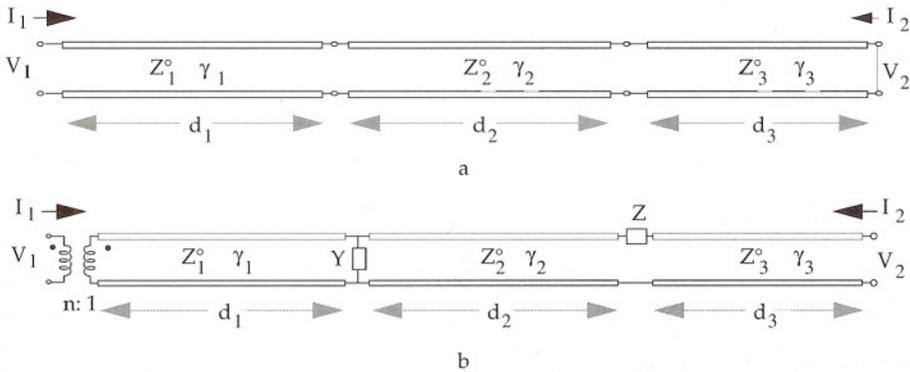


Figura 8.3

Questa proprietà permette di calcolare la matrice di trasmissione di  $N$  tronchi di linea in cascata (Figura 8.3a), o anche la matrice di trasmissione di linee connesse in cascata con quadripoli di altro tipo. Ad esempio è possibile calcolare facilmente la matrice di trasmissione di quadripoli costituiti da linee, da trasformatori ideali e da impedenze (ammettenze) connesse in serie (parallelo) alle linee (Figura 8.3b). A questo scopo bisogna considerare, oltre alle matrici di trasmissione delle linee anche quelle dei suddetti elementi (vedi Tabella 8.1).

È interessante osservare che, per il teorema di reciprocità, la matrice di trasmissione di un quadripolo lineare passivo qualsiasi gode della seguente proprietà:

$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \tag{8.6}$$

■ Infatti, ricavando dalle (8.1) le correnti in funzione delle tensioni, si ottiene

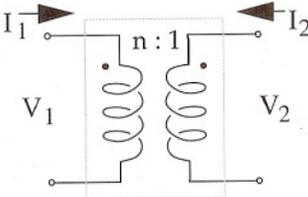
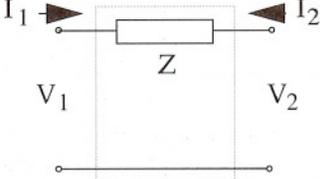
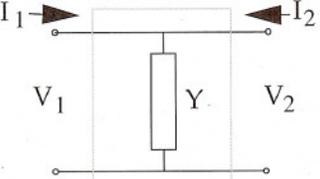
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

dove:

$$y_{11} = \frac{a_{22}}{a_{12}} \quad y_{12} = \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{12}} \quad y_{21} = -\frac{1}{a_{12}} \quad y_{22} = \frac{a_{11}}{a_{12}} \tag{8.7}$$

Le quantità  $y_{ij}$  sono i parametri di ammettenza del quadripolo. Poiché, per il teorema di reciprocità, la matrice d'ammettenza di un quadripolo è simmetrica (vedi Paragrafo 5 del Capitolo 4), confrontando le espressioni di  $y_{12}$  e di  $y_{21}$  si deduce la (8.6). ■

Tabella 8.1 Matrici di trasmissione di quadripoli elementari

	$[a] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$
	$[a] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$

## 5.9 Cenni sulle guide d'onda come componenti circuitali

I procedimenti usati per lo studio del comportamento circuitali delle linee si applicano anche alle guide d'onda, che spesso sostituiscono le linee nei circuiti a microonde. Nel Capitolo 3 si è visto che lo studio della trasmissione attraverso le guide funzionanti in condizioni di propagazione unimodale si riduce a quello delle onde di tensione e di corrente per il modo dominante. Tali onde sono rappresentate da espressioni formalmente identiche a quelle delle onde di tensione e di corrente nelle linee di trasmissione. L'unica differenza consiste nel fatto che  $\lambda$  deve essere sostituita da  $\lambda_g$  e  $Z^0$  deve essere sostituita dall'impedenza caratteristica del modo dominante. Così anche nelle guide è possibile definire il coefficiente di riflessione e l'impedenza lungo la guida, l'impedenza e il coefficiente di riflessione del carico, l'impedenza interna del generatore e così via. Pertanto la maggior dei concetti esposti a proposito delle linee si applicano anche allo studio delle guide.

Un caso particolarmente semplice da trattare è quello di un diaframma dielettrico di spessore  $d$  (Figura 9.1), inserito in una guida. Poiché i vettori modali per il modo dominante