Interpretazione del campo del modo TE$_{10}$ in guida rettangolare come sovrapposizione di onde piane

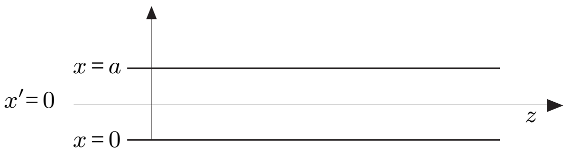
Consideriamo una guida d'onda rettangolare in aria di dimensioni a, b e in essa l'onda relativa al modo TE$_{10}$ che si propaga nella direzione positiva dell'asse z, alla frequenza f, con tensione modale V: implicitamente si è quindi assunto che la lunghezza d'onda in aria λ sia minore della lunghezza d'onda di taglio $\lambda_c = 2\,a$.

I campi nella guida sono dati da:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_{10}^{\,\mathrm{TE}}\, V\, e^{-j\beta z} \\ \vec{H} &= \vec{h}_{10}^{\,\mathrm{TE}}\, \frac{V\, e^{-j\beta z}}{Z_{10}^{\mathrm{TE}}} - j\,\vec{u}_z\, \frac{k_c}{k}\, \Phi_{10}^{\mathrm{TE}}\, \frac{V\, e^{-j\beta z}}{\eta} \end{aligned}$$

dove $Z_{10}^{\mathrm{TE}} = \eta\, k/\beta$ è l'impedenza modale, $k_c = \pi/a$, $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$, inoltre, nell'usuale sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} \Phi_{10}^{\mathrm{TE}} &= \sqrt{\frac{2}{ab}}\, \cos\frac{\pi x}{a} \\ \vec{e}_{10}^{\,\mathrm{TE}} &= -\sqrt{\frac{2}{ab}}\, \vec{u}_y\, \sin\frac{\pi x}{a} \\ \vec{h}_{10}^{\,\mathrm{TE}} &= \sqrt{\frac{2}{ab}}\, \vec{u}_x\, \sin\frac{\pi x}{a} \end{aligned}$$



Assumiamo un sistema di coordinate $\{x', y', z\}$, con origine al centro della sezione della guida:

$$x' = x - a/2 \qquad y' = y - b/2$$

e sia $\vec{r}$ il vettore di posizione in questo sistema:

$$\vec{r} = \vec{u}_x\, x' + \vec{u}_y\, y' + \vec{u}_z\, z \qquad -a/2 \le x' \le a/2 \qquad -b/2 \le y' \le b/2$$

Scrivendo in questo sistema di coordinate i seni e i coseni come somme di esponenziali:

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi\, x}{a} &= \sin\frac{\pi}{a}\left(x' + \frac{a}{2}\right) = \cos k_c\, x' = \frac{e^{jk_c x'} + e^{-jk_c x'}}{2} \\ \cos\frac{\pi\, x}{a} &= -\sin k_c\, x' = \frac{-e^{jk_c x'} + e^{-jk_c x'}}{2\,j} \end{aligned}$$

le espressioni di $\vec{E}$ e $\vec{H}$ possono essere riscritte nella forma [1] :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \underbrace{\vec{u}_y\, F\, e^{-jk\,\vec{u}_1\cdot\vec{r}}}_{\vec{E}_1} + \underbrace{\vec{u}_y\, F\, e^{-jk\,\vec{u}_2\cdot\vec{r}}}_{\vec{E}_2} \\ \vec{H} &= \underbrace{\vec{u}_1 \times \vec{u}_y\, \frac{F}{\eta}\, e^{-jk\,\vec{u}_1\cdot\vec{r}}}_{\vec{H}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{E}_1/\eta} + \underbrace{\vec{u}_2 \times \vec{u}_y\, \frac{F}{\eta}\, e^{-jk\,\vec{u}_2\cdot\vec{r}}}_{\vec{H}_2 = \vec{u}_2 \times \vec{E}_2/\eta} \end{aligned}$$

dove $F = -V/\sqrt{2\,a\,b}$ e $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono i due versori appartenenti al piano xz, definiti da:

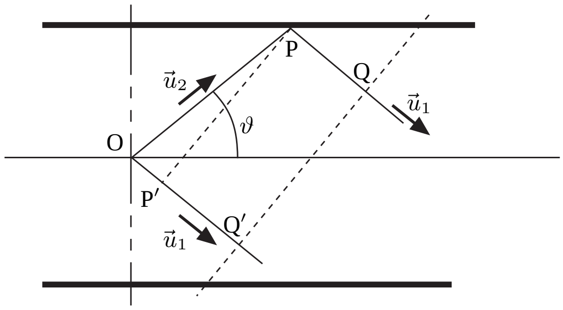
$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{-k_c\,\vec{u}_x + \beta\,\vec{u}_z}{k} \qquad (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1) \\ \vec{u}_2 &= \frac{k_c\,\vec{u}_x + \beta\,\vec{u}_z}{k} \qquad (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1) \end{aligned}$$

[1]

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{V}{2}\sqrt{\frac{2}{ab}}\, \vec{u}_y \left(e^{j(k_c x' - \beta z)} + e^{-j(k_c x' + \beta z)} \right) \\ \vec{H} &= \frac{V}{2\,\eta}\sqrt{\frac{2}{ab}} \left(\vec{u}_x\, \frac{\beta}{k} \left(e^{j(k_c x' - \beta z)} + e^{-j(k_c x' + \beta z)} \right) + \vec{u}_z\, \frac{k_c}{k} \left(e^{j(k_c x' - \beta z)} - e^{-j(k_c x' + \beta z)} \right) \right) \end{aligned}$$

che risultano simmetrici rispetto all'asse z con cui formano lo stesso angolo ϑ [2].

È evidente che i campi $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ e $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ rappresentano, entro la guida, porzioni di due onde piane uniformi, delle stessa ampiezza, polarizzate secondo $\vec{u}_y$ che si propagano rispettivamente nelle direzioni $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ e in fase al centro della guida ($x' = 0$) per qualunque z.



Questa rappresentazione è autoconsistente, dato che ciascuna onda, dopo che è stata riflessa dalla parete laterale, ha superfici equifase coincidenti con le superfici equifase dell'altra onda.
Infatti, valutando ad esempio i ritardi di fase rispetto al punto O, al centro della guida, dei punti Q e Q′, appartenenti allo stesso piano perpendicolare a $\vec{u}_1$, il primo lungo il raggio che passa da O in direzione $\vec{u}_2$, viene riflesso in P e prosegue in direzione $\vec{u}_1$ fino a Q, il secondo lungo il raggio in direzione $\vec{u}_1$ che congiunge direttamente O con Q′, si trova [3] :

$$
\begin{aligned}
-k\,\overline{\mathrm{OP}} + \pi - k\,\overline{\mathrm{PQ}} &= -\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{\lambda_c^2}{4\lambda} + \pi - \frac{2\pi}{\lambda}\,\overline{\mathrm{PQ}} \\
-k\,\overline{\mathrm{OQ'}} \;=\; -k\,\overline{\mathrm{OP'}} - k\,\overline{\mathrm{P'Q'}} &= -\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda_c^2}{4\lambda} - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}\,\overline{\mathrm{PQ}}
\end{aligned}
$$

dove si è tenuto conto che il coefficiente di riflessione sul conduttore perfetto è -1 e ad esso corrisponde uno sfasamento di π.
I due ritardi di fase sono uguali, confermando la coincidenza delle superfici equifase dell'onda riflessa dalla parete laterale con le superfici equifase dell'altra onda. Pertanto l'autoconsistenza di questa questa rappresentazione può essere estesa a tutta la lunghezza della guida, dopo un numero arbitrario di riflessioni.

[2]
$$
\begin{aligned}
\tan\vartheta &= \frac{k_c}{\beta} && = \frac{\lambda_g}{\lambda_c} \\
\sin\vartheta &= \frac{k_c}{\sqrt{\beta^2 + k_c^2}} = \frac{k_c}{k} && = \frac{\lambda}{\lambda_c} \\
\cos\vartheta &= \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + k_c^2}} = \frac{\beta}{k} && = \frac{\lambda}{\lambda_g} \\
\cos 2\vartheta &= \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = 1 - 2\,\frac{k_c^2}{k^2} && = 1 - 2\,\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}
\end{aligned}
$$

[3]
$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{OP}} &= \frac{a/2}{\sin\vartheta} = \frac{\lambda_c^2}{4\lambda} \\
\overline{\mathrm{OP'}} &= \overline{\mathrm{OP}}\,\cos 2\vartheta = \frac{\lambda_c^2}{4\lambda} - \frac{\lambda}{2} \\
\overline{\mathrm{P'Q'}} &= \overline{\mathrm{PQ}}
\end{aligned}
$$