Bilancio energetico per campi monocromatici

date le equazioni di Maxwell per campi armonici in mezzi omogenei, stazionari, lineari, non dispersivi nello spazio e dispersivi nel tempo:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_\mathrm{o} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \end{aligned}$$

moltiplicando scalarmente per $\vec{E}$ i due membri della coniugata della prima equazione e sottraendo membro a membro il prodotto scalare di $\vec{H}^*$ con la seconda, si ottiene

$$\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}^* - \vec{H}^*\cdot\nabla\times\vec{E} = -j\omega\epsilon^*\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \vec{E}\cdot\vec{J}_\mathrm{o}^* + j\omega\mu\,\vec{H}\cdot\vec{H}^*$$

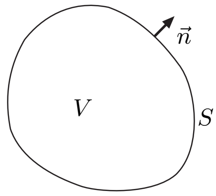
usando l'identità (B26) di [1], questa relazione può essere riscritta nella forma

$$-\tfrac{1}{2}\,\vec{E}\cdot\vec{J}_\mathrm{o}^* = \tfrac{1}{2}\,j\omega\Big(\mu\,|\,\vec{H}\,|^2 - \epsilon^*\,|\,\vec{E}\,|^2\Big) + \nabla\cdot\vec{S}$$

dove

$$\vec{S} = \tfrac{1}{2}\,\vec{E}\times\vec{H}^* \qquad \text{(}\textit{vettore di Poynting complesso}\text{)}$$

integrando in un volume generico V di contorno S, si ha



$$-\tfrac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_\mathrm{o}^*\,dV = \tfrac{1}{2}\,j\omega\int_{V o}\Big(\mu\,|\,\vec{H}\,|^2 - \epsilon^*\,|\,\vec{E}\,|^2\Big)\,dV + \int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,dS$$

(*bilancio delle potenze apparenti*)

dove $\vec{n}$ è la normale alla superficie S, nel verso uscente da V. Separando le parti reali e immaginarie di ϵ e μ: $\epsilon = \epsilon_\mathrm{o}(\epsilon' - j\epsilon'')$, $\mu = \mu_\mathrm{o}(\mu' - j\mu'')$, le parti reali e immaginarie della relazione precedente danno:

$$\underbrace{-\mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_\mathrm{o}^*\,dV\right)}_{P_\mathrm{o}} = \underbrace{\omega\int_V\Big(\tfrac{1}{2}\,\mu_\mathrm{o}\mu''\,|\,\vec{H}\,|^2 + \tfrac{1}{2}\,\epsilon_\mathrm{o}\epsilon''\,|\,\vec{E}\,|^2\Big)\,dV}_{P_\mathrm{diss}} + \underbrace{\mathrm{Re}\left(\int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,dS\right)}_{P_\mathrm{out}}$$

(*bilancio delle potenze attive*)

$$-\mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_\mathrm{o}^*\,dV\right) = 2\,\omega\int_V\Big(\underbrace{\tfrac{1}{4}\,\mu_\mathrm{o}\mu'\,|\,\vec{H}\,|^2}_{U_m} - \underbrace{\tfrac{1}{4}\,\epsilon_\mathrm{o}\epsilon'\,|\,\vec{E}\,|^2}_{U_e}\Big)\,dV + \mathrm{Im}\left(\int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,dS\right)$$

(*bilancio delle potenze reattive*)

il significato dei termini è:

P_o	potenza media ceduta dalle correnti impresse al campo elettromagnetico nel volume V;
P_diss	potenza media dissipata a causa delle perdite magnetiche ed elettriche nei materiali contenuti in V;
P_out	potenza elettromagnetica media che esce dal volume V attraverso il suo contorno S;
U_m, U_e	nei mezzi non dispersivi rappresentano rispettivamente la densità media di energia magnetica ed elettrica; nei mezzi dispersivi invece, U_m e U_e non hanno più il significato di energia, e prendono il nome di densità media di pseudo-energia magnetica ed elettrica;

Per i termini che esprimono la densità di potenza media dissipata nei materiali, risulta anche:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,\omega\,\mu_{\rm o}\,\mu''\,|\,\vec{H}\,|^2 &= 2\,\omega\,U_m\,\tan\theta_m \\ \tfrac{1}{2}\,\omega\,\epsilon_{\rm o}\,\epsilon''\,|\,\vec{E}\,|^2 &= 2\,\omega\,U_e\,\tan\theta_e \end{aligned}$$

dove θ_e e θ_m sono gli angoli di perdita elettrico e magnetico

$$\theta_e = \arctan\,\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \qquad\qquad \theta_m = \arctan\,\frac{\mu''}{\mu'}$$

[1] G. Conciauro, L. Perregrini: *Fondamenti di onde elettromagnetiche*, McGraw-Hill, Milano, 2003.