Incidenza oltre l'angolo limite

Abbiamo visto che nel caso d'incidenza oltre l'angolo limite l'onda trasmessa non può essere un'onda piana uniforme. Cerchiamo la soluzione nell'ambito delle onde piane non uniformi e, da quanto visto a proposito delle onde evanescenti, poniamo

$$\vec{E}'' = \left(F''_\perp\,\vec{p}_\perp + F''_\parallel\,\vec{p}_\parallel\right) e^{-\vec{\gamma}\cdot\vec{r}} \tag{1}$$

$$\vec{H}'' = \frac{1}{\eta_0}\left(\frac{|\,\vec{\gamma}\,|\,c}{j\,\omega}\,F''_\perp\,\vec{p}_\parallel - \frac{j\,\omega\,n_2^2}{c\,|\,\vec{\gamma}\,|}\,F''_\parallel\,\vec{p}_\perp\right) e^{-\vec{\gamma}\cdot\vec{r}} \tag{2}$$

dove:

- il vettore $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + j\vec{\beta}$ ha componenti reale e immaginaria non parallele;
- i vettori di polarizzazione $\vec{p}_\perp$ e $\vec{p}_\parallel$ rappresentano polarizzazioni ortogonali a $\vec{\gamma}$, in particolare $\vec{p}_\perp$ rappresenta la polarizzazione lineare nella direzione perpendicolare ad $\vec{\alpha}$ e a $\vec{\beta}$, $\vec{p}_\parallel$ una polarizzazione ellittica sul piano definito da $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$;
- le costanti $F''_\perp$ e $F''_\parallel$ definiscono l'ampiezza e la fase delle componenti perpendicolare e parallela dell'onda piana in $\vec{r} = 0$.

Nelle onde piane evanescenti, diversamente da quanto avviene per le onde piane uniformi, i vettori $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ non sono definiti univocamente dalla pulsazione e dalle caratteristiche del mezzo, ma devono essere determinati in modo che siano verificate le relazioni imposte dalle equazioni di Maxwell

$$|\,\vec{\beta}\,|^2 - |\,\vec{\alpha}\,|^2 = \mathrm{Re}(k^2) \qquad 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\,\mathrm{Im}(k^2) \tag{3}$$

e, nel caso che stiamo considerando, dalla condizione che le variazioni di fase e ampiezza dei campi sull'interfaccia siano uguali alle variazioni di fase e ampiezza che sull'interfaccia hanno l'onda incidente e l'onda riflessa.
Dato che l'ampiezza del campo incidente, sull'interfaccia, non varia né rispetto a x né rispetto ad y, $\vec{\alpha}$ non può avere che componente secondo z, inoltre l'uguaglianza delle variazioni di fase dei campi sull'interfaccia impone che la proiezione di $\vec{\beta}$ sul piano dell'interfaccia sia uguale alla proiezione sullo stesso piano del vettore di propagazione dell'onda incidente. La seconda delle relazioni imposte dalle equazioni di Maxwell, esclude che $\vec{\beta}$ possa avere componente non nulla lungo z (avendo assunto che i mezzi siano senza perdite, Im(k^2) = 0 per cui $\vec{\beta}$ e $\vec{\alpha}$ devono essere perpendicolari.)
Pertanto possiamo porre

$$\vec{\beta} = \frac{\omega}{c}\,n_1\,\sin\vartheta_1\,\vec{u}_x$$
$$\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{u}_z$$

Dalla prima delle equazioni (3) otteniamo

$$\alpha = \sqrt{|\,\vec{\beta}\,|^2 - \mathrm{Re}(k^2)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\,\sin^2\vartheta_1 - n_2^2}$$

dato che abbiamo supposto $n_1 > n_2$ e $\sin\vartheta_1 > \sin\vartheta_L = n_2/n_1$, il termine sotto radice risulta positivo e α può essere anche scritto nella forma

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\,n_1\,\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}$$

Si trova pertanto

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma} &= \frac{\omega}{c}\,n_1\left(\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}\;\vec{u}_z + j\,\sin\vartheta_1\,\vec{u}_x\right)\\
\vec{p}_\perp &= \vec{u}_y\\
\vec{p}_\parallel = \frac{\vec{\gamma}\times\vec{u}_y}{|\,\vec{\gamma}\,|} &= \frac{-\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}\;\vec{u}_x + j\,\sin\vartheta_1\,\vec{u}_z}{\sqrt{2\,\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}
\end{aligned}$$

Avendo definito $\vec{\gamma}$, $\vec{p}_\perp$ e $\vec{p}_\parallel$, siamo in grado di calcolare le componenti secondo x e y del campo elettrico e magnetico. In $\vec{r} = 0$ risulta:

$$\vec{E}'' \cdot \vec{u}_x = -F''_\parallel \frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}{\sqrt{2\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}} \qquad \vec{E}'' \cdot \vec{u}_y = F''_\perp$$

$$\vec{H}'' \cdot \vec{u}_x = j\,\frac{1}{\eta_1}\,F''_\perp \sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L} \qquad \vec{H}'' \cdot \vec{u}_y = -j\,\frac{1}{\eta_1}\,F''_\parallel \frac{\sin^2\vartheta_L}{\sqrt{2\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}$$

Definendo ancora i coefficienti di riflessione e trasmissione, ponendo cioè sia per le componenti perpendicolari che parallele $F' = F\,\Gamma$, $F'' = F\,T$, dalle equazioni di continuità si ottiene:

$$\begin{cases} 1 + \Gamma_\perp = T_\perp \\ (-1 + \Gamma_\perp)\cos\vartheta_1 = j\,T_\perp \sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \Gamma_\parallel)\cos\vartheta_1 = T_\parallel \dfrac{\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}{\sqrt{2\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}} \\ (1 + \Gamma_\parallel) = j\,T_\parallel \dfrac{\sin^2\vartheta_L}{\sqrt{2\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}} \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\vartheta_1 + j\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}{\cos\vartheta_1 - j\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}$$

$$T_\perp = \frac{2\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 - j\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}$$

$$\Gamma_\parallel = \frac{\sin^2\vartheta_L\cos\vartheta_1 + j\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}{\sin^2\vartheta_L\cos\vartheta_1 - j\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}$$

$$T_\parallel = \frac{2j\cos\vartheta_1\sqrt{2\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}{\sin^2\vartheta_L\cos\vartheta_1 - j\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_L}}$$