Incidenza normale nel caso generale

Nel caso di incidenza in direzione normale all'interfaccia, lo studio della riflessione e trasmissione si semplifica notevolmente e si può anche rimuovere la restrizione di considerare solo mezzi senza perdite, senza che questa generalizzazione comporti particolari complicazioni.
Avendo assunto che l'onda incidente sia piana e uniforme, l'interfaccia coincide con una superficie equifase ed equiampiezza dell'onda incidente. Questo comporta che essa debba essere una superficie equifase ed equiampiezza anche per l'onda riflessa e trasmessa, cioè che anche l'onda riflessa e trasmessa siano onde piane uniformi che si propagano in direzione perpendicolare all'interfaccia. Nel secondo mezzo, si avrà la sola onda trasmessa che si propaga nel verso positivo di z, nel primo mezzo si avranno due onde che si propagano in verso opposto.
Se l'onda incidente è polarizzata linearmente in una direzione qualsiasi – ovviamente normale all'asse z – tutte le onde saranno polarizzate allo stesso modo e le relazioni di fase e ampiezza saranno indipendenti dalla direzione di polarizzazione. Lo stesso vale anche se il campo incidente ha polarizzazione ellittica o circolare: l'onda riflessa e trasmessa devono necessariamente avere la stessa ellisse di polarizzazione, percorsa nello stesso verso. L'affermazione risulta evidente se si pensa che, nel dominio del tempo, la continuatà delle componenti tangenti del campo elettrico e magnetico deve essere verificata in tutti gli istanti nel corso del periodo [1] . Indicando con $\vec{p}$ ($\vec{p}\cdot\vec{u}_z = 0$, $\vec{p}\cdot\vec{p}^* = 1$) il vettore di polarizzazione del campo incidente, i campi nei due mezzi sono rappresentati dalle seguenti espressioni

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \left(F e^{-\gamma_1 z} + F' e^{\gamma_1 z}\right)\vec{p} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\eta_1}\left(F e^{-\gamma_1 z} - F' e^{\gamma_1 z}\right)\vec{u}_z\times\vec{p} \end{aligned}\right\}\quad \text{nel mezzo 1}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= F'' e^{-\gamma_2 z}\,\vec{p} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\eta_2} F'' e^{-\gamma_2 z}\,\vec{u}_z\times\vec{p} \end{aligned}\right\}\quad \text{nel mezzo 2}$$

Dato che $\vec{p}$ e $\vec{u}_z\times\vec{p}$ sono paralleli al piano dell'interfaccia ($z=0$), la continuità delle componenti tangenti all'interfaccia di $\vec{E}$ e $\vec{H}$ implica

$$F + F' = F'' \qquad\qquad \frac{F - F'}{\eta_1} = \frac{F''}{\eta_2}$$

queste relazioni permettono di ricavare F' e F''. Ponendo

$$F' = F\,\Gamma \qquad\qquad F'' = F\,T$$

si ottiene

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad\qquad T = \frac{2\,\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Nel caso particolare di mezzi senza perdite ($\eta = \eta_o/n$) si ha

$$\Gamma = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad\qquad T = \frac{2\,n_1}{n_1 + n_2}$$

Nel caso in cui il secondo mezzo è un buon conduttore ($\eta_2 = R_s(1+j)$) si ha

$$\Gamma = \frac{R_s(1+j) - \eta_1}{R_s(1+j) + \eta_1} \qquad\qquad T = \frac{2\,R_s(1+j)}{R_s(1+j) + \eta_1}$$

e, nel caso di conduttore perfetto

$$\Gamma = -1 \qquad\qquad T = 0$$

[1] Nel caso di polarizzazione ellittica o circolare, il fatto che la polarizzazione dell'onda incidente e riflessa siano uguali, ci fa comunque dire che, se la polarizzazione dell'onda incidente è destrogira, quella dell'onda riflessa è levogira e viceversa, dato che la denominazione del verso di rotazione della polarizzazione è definito in base alla direzione di propagazione e l'onda incidente e l'onda riflessa hanno versi di propagazione opposti.

La densità di potenza trasportata nella generica sezione nel primo mezzo ($z \leq 0$) è data da

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \vec{u}_z) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(F\,(e^{-\gamma_1 z} + \Gamma e^{\gamma_1 z})\frac{F^*}{\eta^*}(e^{-\gamma_1^* z} - \Gamma^* e^{\gamma_1^* z})\,\vec{p} \times (\vec{u}_z \times \vec{p}^*) \cdot \vec{u}_z) \end{aligned}$$

sviluppando i calcoli si ottiene [2]

$$W_1(z) = \underbrace{\frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Re}(\eta_1)}{2\,|\,\eta_1|^2}\,e^{-2\alpha_1 z}}_{W(z)} - \underbrace{\frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Re}(\eta_1)}{2\,|\,\eta_1|^2}\,|\,\Gamma|^2\,e^{2\alpha_1 z}}_{W\,'(z)} - \underbrace{\frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Im}(\eta_1)}{|\,\eta_1|^2}\,\mathrm{Im}(\,\Gamma\,e^{2j\beta_1 z})}_{W_\mathrm{m}(z)}$$

Il primo e il secondo termine rappresentano le densità di potenza trasportate rispettivamente nel verso positivo e negativo dell'asse z dall'onda incidente e dall'onda riflessa in assenza dell'altra onda, il terzo termine rappresenta il termine mutuo, dovuto alla presenza contemporanea delle due onde. Solo se l'impedenza caratteristica del mezzo è reale, la densità di potenza trasportata dall'insieme dell'onda incidente e dell'onda riflessa è uguale alla somma algebrica delle densità di potenza trasportate singolarmente dalle due onde.
La densità di potenza trasportata nella generica sezione nel secondo mezzo ($z \geq 0$), dovuta alla sola onda trasmessa, è data da

$$W_2(z) = W\,''(z) = \frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Re}(\eta_2)}{2\,|\,\eta_2|^2}\,|\,T|^2\,e^{-2\alpha_2 z}$$

In particolare, per $z = 0$ la conservazione dell'energia impone $W_1(0) = W_2(0)$ cioè

$$\underbrace{\frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Re}(\eta_1)}{2\,|\,\eta_1|^2}}_{W(0)} - \underbrace{\frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Re}(\eta_1)}{2\,|\,\eta_1|^2}\,|\,\Gamma|^2}_{W\,'(0)} - \underbrace{\frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Im}(\eta_1)}{|\,\eta_1|^2}\,\mathrm{Im}(\,\Gamma)}_{W_\mathrm{m}(0)} = \frac{|\,F\,|^2\,\mathrm{Re}(\eta_2)}{2\,|\,\eta_2|^2}\,|\,T|^2$$

Avendo imposto la continuità del campo elettrico e del campo magnetico sull'interfaccia (i campi hanno solo componente tangente all'interfaccia), questa relazione è un'identità: i due membri indicano la stessa potenza, scritta in due modi diversi. La verifica è immediata.

Infatti, dalle espressioni di Γ e T si deduce

$$\begin{aligned} 1 - |\,\Gamma|^2 &= \frac{|\,\eta_2 + \eta_1|^2 - |\,\eta_2 - \eta_1|^2}{|\,\eta_2 - \eta_1|^2} = \frac{|\,\eta_2|^2 + |\,\eta_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\eta_2\,\eta_1^*) - |\eta_2|^2 - |\eta_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\eta_2\,\eta_1^*)}{|\,\eta_2 + \eta_1|^2} = \frac{4\,\mathrm{Re}(\eta_2\,\eta_1^*)}{|\,\eta_2 + \eta_1|^2} \\ \mathrm{Im}(\Gamma) &= \mathrm{Im}\Big(\frac{(\,\eta_2 - \eta_1)(\,\eta_2 + \eta_1)^*}{(\eta_2 + \eta_1)(\,\eta_2 + \eta_1)^*}\Big) = \frac{\mathrm{Im}(|\,\eta_2|^2 + \eta_2\eta_1^* - \eta_1\eta_2^* - |\eta_1|^2)}{|\,\eta_2 + \eta_1|^2} = \frac{2\,\mathrm{Im}(\eta_2\,\eta_1^*)}{|\,\eta_2 + \eta_1|^2} \\ |\,T|^2 &= \frac{4\,|\,\eta_2|^2}{|\,\eta_2 + \eta_1|^2} \end{aligned}$$

per cui il primo membro della relazione diventa

$$\frac{2\,|\,F\,|^2}{|\,\eta_1|^2\,|\,\eta_2 + \eta_1|^2}\Big(\mathrm{Re}(\eta_1)\mathrm{Re}(\eta_2\,\eta_1^*) - \,\mathrm{Im}(\eta_1)\,\mathrm{Im}(\eta_2\,\eta_1^*)\Big) = \frac{2\,|\,F\,|^2}{|\,\eta_1|^2\,|\,\eta_2 + \eta_1|^2}\,\mathrm{Re}(|\,\eta_1|^2\,\eta_2) = \frac{2\,|\,F\,|^2}{|\,\eta_2 + \eta_1|^2}\,\mathrm{Re}(\eta_2)$$

identico al secondo membro.

[2] ponendo, come al solito, $\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$, risulta

$$\begin{aligned} (e^{-\gamma_1 z} + \Gamma\,e^{\gamma_1 z})(e^{-\gamma_1^* z} - \Gamma^* e^{\gamma_1^* z}) &= e^{-2\alpha_1 z} + \Gamma\,e^{2j\beta_1 z} - \Gamma^*\,e^{-2j\beta_1 z} - |\,\Gamma|^2 e^{2\alpha_1 z} \\ &= e^{-2\alpha_1 z} - |\,\Gamma|^2 e^{2\alpha_1 z} + 2j\,\mathrm{Im}(\,\Gamma\,e^{2j\beta_1 z}) \end{aligned}$$

date le proprietà del vettore di polarizzazione, risulta inoltre

$$\vec{p} \times (\vec{u}_z \times \vec{p}^*) \cdot \vec{u}_z = (\vec{u}_z \vec{p} \cdot \vec{p}^* - \vec{p}^* \vec{u}_z \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}_z = 1$$

Solo nel caso particolare, ma molto frequente, in cui l'impedenza caratteristica del primo mezzo può essere assunta reale, è valida la relazione

$$W''(0) = W(0)\,(1 - |\,\Gamma|^2)$$