

Analisi modale di guide d'onda

Consideriamo le strutture mostrate in figura: linee aeree in alta tensione, cavi multi-conduttori, cavi coassiali, guide d'onda tubolari¹ di forme diverse, fibre ottiche, . . . , che sono esempi di strutture in grado di guidare onde elettromagnetiche, normalmente impiegate per trasmettere potenza elettromagnetica in bande di frequenza diverse, o al semplice fine di disporre di energia in luoghi lontani dal generatore, oppure per trasmettere segnali che portano un'informazione.

La forma idealizzata di tali strutture consiste in un'insieme di conduttori e/o dielettrici, indefiniti in una dimensione, la direzione assiale, con la caratteristica di essere uguale a sé stessa per una qualunque traslazione nella direzione dell'asse. Le strutture proposte sono molto diverse tra loro, alcune, come le guide d'onda tubolari e i cavi coassiali, sono completamente schermate verso l'esterno da conduttori metallici, altre, come le linee elettriche ad alta tensione e le fibre ottiche, non sono affatto schermate; alcune, come le guide d'onda, sono costituite da un solo conduttore, altre, come le linee bifilari, il cavo coassiale e le linee ad alta tensione, sono costituite da due o più conduttori isolati tra loro; altre ancora, come le fibre ottiche e le guide dielettriche, non hanno nessun elemento metallico al loro interno.



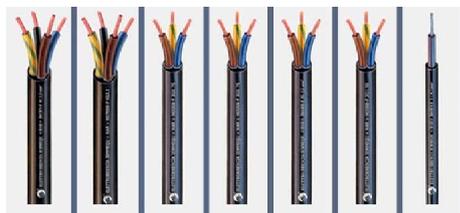
linee ad alta tensione



fibre ottiche



guida rettangolare



cavi unipolari e multi-polari



guida circolare



cavo coassiale

Il nostro proposito non è di calcolare i campi elettromagnetici dovuti ad un particolare sistema di sorgenti in presenza di tali strutture, ma semplicemente di trovare delle soluzioni delle equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza che rispettino le condizioni imposte dalla presenza di tali strutture e di studiarne le caratteristiche. Tra tutte le soluzioni possibili, ci proponiamo di trovare quelle che rispettano la simmetria della struttura idealizzata, cioè che non cambiano forma per una qualunque traslazione nella direzione dell'asse ma che, al massimo, vengono moltiplicate per un fattore che ne cambia globalmente l'ampiezza e/o la fase.

Le soluzioni che godono di tale proprietà vengono chiamate *modi* della struttura. Come si vedrà, l'analisi modale è uno strumento molto potente, ma alquanto complicato, in certi casi.

Senza avere la pretesa di sviluppare tale analisi in tutti i suoi dettagli, ci limiteremo a studiare nei casi più semplici le principali caratteristiche dei diversi tipi di modi sopportati dalle varie strutture.

¹

il termine guida d'onda è molto generico e indica qualunque struttura, come quelle elencate, in grado di guidare un'onda elettromagnetica. Lo stesso termine, senza ulteriore specificazione, è comunemente usato anche per indicare una guida d'onda tubolare, costituita cioè da un unico conduttore cavo.

Potenziali di Hertz-Debye

È possibile dimostrare che qualunque campo elettromagnetico monocromatico di pulsazione ω , in un mezzo omogeneo, stazionario, lineare, isotropo, non dispersivo e senza perdite ², caratterizzato dalla permittività elettrica ϵ e dalla permeabilità magnetica μ , in una zona priva di correnti impresse, può essere sempre rappresentato nella forma:

$$\vec{E} = \frac{\nabla \times \nabla \times \vec{u} \Psi'}{j\omega\epsilon} - \nabla \times \vec{u} \Psi'' \quad (1)$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{u} \Psi' + \frac{\nabla \times \nabla \times \vec{u} \Psi''}{j\omega\mu} \quad (2)$$

dove \vec{u} è un versore costante e le funzioni scalari Ψ , che prendono il nome di potenziali di Hertz-Debye, soddisfano l'equazione omogenea di Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (3)$$

in cui, come al solito, $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$.

È immediato verificare che le espressioni di \vec{E} e \vec{H} soddisfano le equazioni di Maxwell ³. Quanto alla generalità dell'espressione, non c'è dubbio che qualunque vettore solenoidale, come devono essere \vec{E} e \vec{H} in una zona priva di correnti impresse, può essere rappresentato dal rotore di un opportuno vettore. Tuttavia potrebbe sorgere il dubbio che l'assunzione che questo vettore sia ovunque diretto secondo \vec{u} possa essere troppo restrittiva. A questo riguardo ci si limita a ricordare che i potenziali non sono definiti in maniera univoca e che è possibile sfruttare questa indeterminazione per semplificare l'espressione ⁴. Come è stato detto, vogliamo trovare soluzioni delle equazioni di Maxwell che rispettino la simmetria per traslazione della guida d'onda, cioè soluzioni che per una traslazione rispetto all'asse rimangano uguali a sé stesse, a meno di un fattore di fase e/o ampiezza. A questo scopo, assumiamo un sistema di coordinate cilindriche con asse z coincidente con l'asse della struttura e indichiamo con $\vec{\rho}$ il vettore di posizione nella generica sezione trasversale. Avendo constatato inoltre dalle (1) e (2) che Ψ' ha le dimensioni di una corrente e Ψ'' di una tensione, poniamo

$$\Psi' = \Phi'(\vec{\rho}) I(z) \quad \Psi'' = \Phi''(\vec{\rho}) V(z)$$

In questo modo i potenziali trasversali Φ' e Φ'' risultano adimensionali.

Con questa assunzione, e identificando il versore \vec{u} con il versore \vec{u}_z nella direzione dell'asse, possiamo

² _____

alcune di queste ipotesi, non strettamente necessarie, sono fatte per semplicità di trattazione.

³ _____

infatti, usando le identità (B31) e (B32) di [1] e tenendo conto della (3), si ha:

$$\vec{E} = \frac{\nabla \nabla \cdot \vec{u} \Psi'}{j\omega\epsilon} - \frac{\vec{u} \nabla^2 \Psi'}{j\omega\epsilon} - \nabla \times \vec{u} \Psi'' = \frac{\nabla \nabla \cdot \vec{u} \Psi'}{j\omega\epsilon} - j\omega\mu \vec{u} \Psi' - \nabla \times \vec{u} \Psi''$$

dividendo il rotore dell'ultima espressione per $-j\omega\mu$, si ottiene

$$\frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu} = \nabla \times \frac{\nabla \nabla \cdot \vec{u} \Psi'}{k^2} + \nabla \times \vec{u} \Psi' + \frac{\nabla \times \nabla \times \vec{u} \Psi''}{j\omega\mu}$$

che coincide con l'espressione di \vec{H} , dato che il primo termine è nullo, essendo il rotore di un gradiente.

In modo analogo si verifica che $\nabla \times \vec{H}$ diviso per $j\omega\epsilon$ coincide con \vec{E} .

⁴ _____

ad esempio, se $\vec{A} = \nabla \times \vec{B}$, risulta anche $\vec{A} = \nabla \times \vec{B}'$ con $\vec{B}' = \vec{B} - \nabla \chi$, qualunque sia χ , dato che il rotore di un gradiente è sempre nullo. Se, inoltre, \vec{A} è un vettore trasversale rispetto a $\vec{u} \equiv \vec{u}_z$ ($A_z = \partial B_x / \partial y - \partial B_y / \partial x = 0$) è sempre possibile scegliere χ in modo da annullare le componenti di \vec{B}' secondo x e y

$$\vec{A} = \nabla \times \left(\vec{u}_x \left(B_x - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \vec{u}_y \left(B_y - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \vec{u}_z \left(B_z - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \right)$$

infatti le condizioni $\partial \chi / \partial x = B_x$ e $\partial \chi / \partial y = B_y$ sono compatibili con la condizione di trasversalità di \vec{A} rispetto a \vec{u}_z

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

Si conclude che l'espressione $\nabla \times \vec{u} \Psi$ può rappresentare qualunque campo solenoidale trasversale a \vec{u} .

riscrivere le relazioni (1) e (2) separando negli operatori differenziali laplaciano e gradiente la parte *trasversale* che opera sulle coordinate trasversali ($\vec{\rho}$) e quella *assiale* che opera sulla coordinata z :

$$\nabla^2 = \nabla_{\text{T}}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \nabla = \nabla_{\text{T}} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

separando le parti trasversali e assiali del campo elettrico $\vec{E} = \vec{E}_{\text{T}} + E_z \vec{u}_z$ e magnetico $\vec{H} = \vec{H}_{\text{T}} + H_z \vec{u}_z$, otteniamo ⁵

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{T}} &= \frac{\eta}{jk} \nabla_{\text{T}} \Phi'(\vec{\rho}) \frac{\partial I(z)}{\partial z} + \vec{u}_z \times \nabla_{\text{T}} \Phi''(\vec{\rho}) V(z) \\ \vec{H}_{\text{T}} &= -\vec{u}_z \times \nabla_{\text{T}} \Phi'(\vec{\rho}) I(z) + \frac{1}{jk\eta} \nabla_{\text{T}} \Phi''(\vec{\rho}) \frac{\partial V(z)}{\partial z} \\ E_z &= -\frac{\eta}{jk} \nabla_{\text{T}}^2 \Phi'(\vec{\rho}) I(z) \\ H_z &= -\frac{1}{jk\eta} \nabla_{\text{T}}^2 \Phi''(\vec{\rho}) V(z) \end{aligned}$$

dove $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ è l'impedenza intrinseca del mezzo.

Assumiamo infine che i parametri di tensione e corrente $V(z)$ e $I(z)$, introdotti per descrivere l'andamento assiale di Ψ' e Ψ'' , soddisfino l'equazione dei telegrafisti:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -\gamma Z I(z) \quad \frac{\partial I(z)}{\partial z} = -\gamma \frac{V(z)}{Z}$$

dove γ e Z sono opportune costanti da determinare, di dimensioni uguali rispettivamente all'inverso di una lunghezza e ad un'impedenza.

La giustificazione rigorosa di tale assunzione (che qui viene tralasciata) dovrebbe contemplare tutti i casi particolari, ma è evidente che nel caso generale \vec{E}_{T} e \vec{H}_{T} al variare della sezione cambiano solo per un fattore di fase e/o ampiezza solo se $\partial I(z)/\partial z$ è proporzionale a $V(z)$ e $\partial V(z)/\partial z$ è proporzionale a $I(z)$. Con quest'ultima assunzione, troviamo che le condizioni (3) sono verificate se sia Φ' che Φ'' soddisfano l'equazione ⁶

$$\nabla_{\text{T}}^2 \Phi(\vec{\rho}) + \kappa^2 \Phi(\vec{\rho}) = 0 \quad (4)$$

dove

$$\kappa^2 = \gamma^2 + k^2$$

e che le espressioni dei campi derivanti dalle (1) e (2) diventano:

$$\vec{E}_{\text{T}} = \left(-\frac{\eta\gamma}{jkZ} \nabla_{\text{T}} \Phi'(\vec{\rho}) + \vec{u}_z \times \nabla_{\text{T}} \Phi''(\vec{\rho}) \right) V(z) \quad (5)$$

$$\vec{H}_{\text{T}} = \left(-\frac{\gamma Z}{jk\eta} \nabla_{\text{T}} \Phi''(\vec{\rho}) - \vec{u}_z \times \nabla_{\text{T}} \Phi'(\vec{\rho}) \right) I(z) \quad (6)$$

$$E_z = \frac{\eta\kappa^2}{jk} \Phi'(\vec{\rho}) I(z) \quad (7)$$

$$H_z = \frac{\kappa^2}{jk\eta} \Phi''(\vec{\rho}) V(z) \quad (8)$$

⁵

$$\nabla \times \nabla \times \vec{u}_z \Psi = \nabla \nabla \cdot \vec{u}_z \Psi - \nabla^2 \vec{u}_z \Psi = \left(\nabla_{\text{T}} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \Psi - \vec{u}_z \left(\nabla_{\text{T}}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = \nabla_{\text{T}} \frac{\partial}{\partial z} \Psi - \vec{u}_z \nabla_{\text{T}}^2 \Psi$$

$$\nabla \times \vec{u}_z \Psi = -\vec{u}_z \times \left(\nabla_{\text{T}} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi = -\vec{u}_z \times \nabla_{\text{T}} \Psi$$

⁶

infatti, separando le parti assiali e trasversali dell'equazione (3) per Ψ' si trova

$$\nabla_{\text{T}}^2 \Phi'(\vec{\rho}) I(z) + \Phi'(\vec{\rho}) \frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} + k^2 \Phi'(\vec{\rho}) I(z) = 0$$

dall'equazione dei telegrafisti si trova $\partial^2 I(z)/\partial z^2 = \gamma^2 I(z)$ da cui l'espressione (4) per Φ' . In modo del tutto analogo si ritrova la stessa espressione anche per Φ'' .

Per determinare i campi di un modo è necessario quindi risolvere caso per caso l'equazione (4) per Φ' e Φ'' in ciascuna parte omogenea della sezione della guida d'onda, tenendo conto delle condizioni imposte dalla sua forma e struttura, cioè:

- la condizione di parete elettrica sui conduttori metallici (per semplicità approssimiamo qualsiasi buon conduttore con il conduttore perfetto)
- la continuità delle componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico sulle interfacce con altri dielettrici
- opportune condizioni all'infinito, nel caso di guide d'onda non schermate.

La soluzione di questo problema definisce completamente la conformazione delle componenti trasversali e assiali dei campi elettrico e magnetico relativi al *modo* considerato, la sua *costante di propagazione* γ e la relativa *impedenza modale* Z .

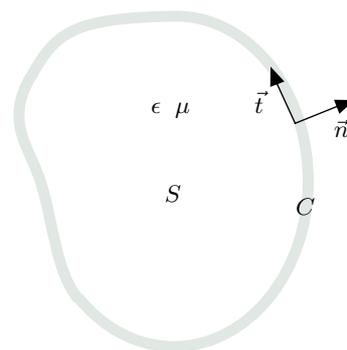
La *tensione modale* $V(z)$ e la *corrente modale* $I(z)$, essendo soluzione dell'equazione dei telegrafisti, in generale sono date da

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \qquad I(z) = \frac{V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}}{Z}$$

dove V^+ e V^- rappresentano le tensioni modali in $z = 0$ relative alle onde che si propagano (o si attenuano) rispettivamente nel verso positivo e negativo dell'asse z e sono completamente definite se sono definite condizioni sufficienti all'inizio e/o alla fine del tratto di guida d'onda in esame.

Guide d'onda

Consideriamo il caso di strutture costituite da un semplice tubo perfettamente conduttore e contenente un unico dielettrico. In questo caso, dato che la struttura è completamente schermata e c'è un solo dielettrico, l'unica condizione che dobbiamo considerare nel risolvere le equazioni (4) è la condizione di parete elettrica sul contorno C della sezione S (semplicemente connessa) della guida. Tale condizione impone:



$$E_z = 0 \qquad \vec{n} \times \vec{E}_T = 0$$

Dall'equazione (7) si vede che se $\kappa \neq 0$, condizione che come si vedrà è sempre verificata in questo caso, l'annullamento di E_z impone:

$$\Phi'(\vec{\rho}) = 0 \qquad \vec{\rho} \in C \qquad \text{condizione di Dirichlet} \qquad (9)$$

Dall'equazione (5) si deduce invece che la condizione $\vec{n} \times \vec{E}_T = 0$ non impone nessun'altra condizione su Φ' , dato che, essendo costante sul contorno, il suo gradiente è sicuramente perpendicolare ad esso; essa impone invece su Φ'' la condizione ⁷

$$\frac{\partial \Phi''(\vec{\rho})}{\partial n} = 0 \qquad \vec{\rho} \in C \qquad \text{condizione di Neumann} \qquad (10)$$

Nel caso considerato, si trova quindi che sia le equazioni che le condizioni al contorno che Φ' e Φ'' devono soddisfare sono completamente indipendenti. Dalle equazioni (5)-(8), si vede che le soluzioni derivanti dal potenziale Φ' danno campi elettromagnetici privi della componente H_z , cioè campi *trasversali magnetici* (TM), mentre le soluzioni derivanti dal potenziale Φ'' danno campi privi della componente E_z , cioè campi *trasversali elettrici* (TE).

⁷
$$\vec{n} \times (\vec{u}_z \times \nabla_T \Phi''(\vec{\rho})) = \vec{u}_z (\vec{n} \cdot \nabla_T \Phi''(\vec{\rho})) - \nabla_T \Phi''(\vec{\rho}) \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{u}_z}_{\text{zero}} = \vec{u}_z \frac{\partial \Phi''(\vec{\rho})}{\partial n}$$

È noto che l'equazione (4) sia con la condizione al contorno (9) che con la condizione al contorno (10) è un'equazione agli autovalori che ammette un'infinità numerabile di autosoluzioni $\{\Phi'_i, \kappa_i'^2\}$ e $\{\Phi''_i, \kappa_i''^2\}$ ($i = 1, 2, \dots$) dipendenti esclusivamente dalla forma e dimensioni della sezione S .

Le autofunzioni Φ'_i e Φ''_i possono sempre essere assunte reali, sono ortogonali⁸ e normalizzabili e gli autovalori $\kappa_i'^2$ e $\kappa_i''^2$ sono reali positivi⁹.

Ciascuna soluzione derivante da ogni autosoluzione viene detta *modo*, ed i vettori di campo ad essa associati *vettori modali*. I risultati relativi a ciascun modo sono riassunti nella seguente tabella.

modi TM		modi TE		
$\nabla_{\Gamma}^2 \Phi'_i + \kappa_i'^2 \Phi'_i = 0$		$\nabla_{\Gamma}^2 \Phi''_i + \kappa_i''^2 \Phi''_i = 0$		equazione
$\Phi'_i(\vec{\rho}) = 0$	$\vec{\rho} \in C$	$\frac{\partial \Phi''_i(\vec{\rho})}{\partial n} = 0$	$\vec{\rho} \in C$	condizione al contorno
$\int_S \Phi_i'^2 ds = 1$		$\int_S \Phi_i''^2 ds = 1$		condizione di normalizzazione
$\int_S \Phi'_i \Phi'_j ds = 0$	$(i \neq j)$	$\int_S \Phi''_i \Phi''_j ds = 0$	$(i \neq j)$	ortogonalità
$\gamma_i' = \sqrt{\kappa_i'^2 - k^2}$		$\gamma_i'' = \sqrt{\kappa_i''^2 - k^2}$		costante di propagazione
$\vec{e}'_i = -\frac{\nabla_{\Gamma} \Phi'_i}{\kappa_i'}$		$\vec{h}''_i = -\frac{\nabla_{\Gamma} \Phi''_i}{\kappa_i''}$		} vettori modali
$\vec{h}'_i = \vec{u}_z \times \vec{e}'_i$		$\vec{e}''_i = -\vec{u}_z \times \vec{h}''_i$		
$Z_i' = \eta \frac{\gamma_i'}{jk}$		$Z_i'' = \eta \frac{jk}{\gamma_i''}$		impedenza modale
$\vec{E}'_i = \vec{e}'_i V_i' - j \vec{u}_z \frac{\kappa_i'}{k} \Phi'_i \eta I_i'$		$\vec{E}''_i = \vec{e}''_i V_i''$		} campi modali
$\vec{H}'_i = \vec{h}'_i I_i'$		$\vec{H}''_i = \vec{h}''_i I_i'' - j \vec{u}_z \frac{\kappa_i''}{k} \Phi''_i \frac{V_i''}{\eta}$		

Si nota che la condizione di normalizzazione implica che i potenziali Φ_i , sia TE che TM, siano dimensionalmente uguali all'inverso di una lunghezza, così che risulta adimensionale il rapporto Φ_i/κ_i .

In generale, considerando come soluzione del problema elettromagnetico una combinazione lineare delle soluzioni modali trovate, si ha

8

l'ortogonalità implica

$$\int_S \Phi_i \Phi_j ds = 0 \quad i \neq j$$

e può essere verifi cata scrivendo l'identità (B.92) [1], relativa a due qualunque funzioni Φ_i, Φ_j , entrambe TE o TM

$$\int_S (\Phi_i \nabla_{\Gamma}^2 \Phi_j - \Phi_j \nabla_{\Gamma}^2 \Phi_i) ds = \int_C \left(\Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - \Phi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right) dc$$

per le condizioni al contorno, il secondo membro è comunque nullo, da cui, tenendo conto della (4), risulta:

$$(\kappa_i^2 - \kappa_j^2) \int_S \Phi_i \Phi_j ds = 0$$

questa relazione implica direttamente l'ortogonalità se $\kappa_i \neq \kappa_j$, se invece $\kappa_i = \kappa_j$ (autosoluzioni degeneri) allora anche le combinazioni $\underline{\Phi}_i = a \Phi_i - b \Phi_j$ e $\underline{\Phi}_j = b \Phi_i + a \Phi_j$, qualsiasi siano le costanti a e b , sono autofunzioni dell'equazione (4) con lo stesso autovalore, ed è sempre possibile determinare a e b in modo che $\int_S \underline{\Phi}_i \underline{\Phi}_j ds = 0$ e assumere $\underline{\Phi}_i (\int_S \underline{\Phi}_i^2 ds)^{-1/2}$ e $\underline{\Phi}_j (\int_S \underline{\Phi}_j^2 ds)^{-1/2}$ come nuove defnizioni per Φ_i e Φ_j .

9

in realtà l'equazione (4) con la condizione al contorno (10), indipendentemente dalla forma della sezione, ammette sempre la soluzione $\{\Phi_0'' = \text{cost}, \kappa_0'' = 0\}$. Questa soluzione però non ha interesse dato che i campi ad essa associati sono nulli.

$$\vec{E}(\vec{\rho}, z) = \sum_i \left(\vec{e}'_i(\vec{\rho}) V'_i(z) - j \vec{u}_z \frac{\kappa'_i}{k} \Phi'_i(\vec{\rho}) \eta I'_i(z) \right) + \sum_i \vec{e}''_i(\vec{\rho}) V''_i(z) \quad (11)$$

$$\vec{H}(\vec{\rho}, z) = \sum_i \vec{h}'_i(\vec{\rho}) I'_i(z) + \sum_i \left(\vec{h}''_i(\vec{\rho}) I''_i(z) - j \vec{u}_z \frac{\kappa''_i}{k} \Phi''_i(\vec{\rho}) \frac{V''_i(z)}{\eta} \right) \quad (12)$$

È stato dimostrato che la rappresentazione (11)-(12) è del tutto generale e può rappresentare qualunque campo elettromagnetico entro una guida d'onda, in assenza di correnti impresse.

Considerazioni sulla propagazione dei modi

Dalla tabella delle soluzioni, si vede che per ciascun modo, sia TE che TM, se $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega/v$ è minore di κ_i , γ_i è reale ed il campo modale rappresenta un'onda stazionaria evanescente, mentre se k è maggiore di κ_i , γ_i è immaginaria ed il campo modale rappresenta un'onda piana che si propaga nel verso positivo o negativo dell'asse z . Per ogni modo si definisce *pulsazione di taglio* o di *cutoff* quella pulsazione ω_c per cui $k = \kappa_i$:

$$\omega_c = \kappa_i v$$

analogamente, si definiscono *frequenza di taglio* e *lunghezza d'onda di taglio* la frequenza e la lunghezza d'onda corrispondenti a ω_c :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \quad \lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{\kappa_i}$$

per cui risulta sempre $k/\kappa_i = \omega/\omega_c = f/f_c = \lambda_c/\lambda$, dove $\lambda = v/f$ rappresenta la lunghezza d'onda di un'onda piana uniforme alla frequenza f nel dielettrico considerato.

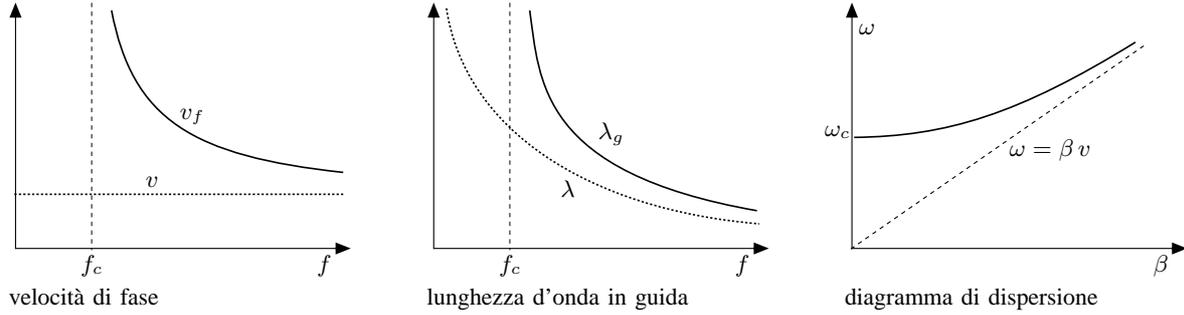
I risultati di queste considerazioni, con le definizioni assunte, sono riassunti nella seguente tabella:

$\omega < \omega_c \equiv \lambda > \lambda_c$	$\omega > \omega_c \equiv \lambda < \lambda_c$
$\alpha = \text{Re}(\gamma) = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}} = \frac{\omega_c}{v} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$	$\alpha = \text{Re}(\gamma) = 0$
$\beta = \text{Im}(\gamma) = 0$	$\beta = \text{Im}(\gamma) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$
$Z' = -j\eta \frac{\alpha}{k} = -j\eta \sqrt{\omega_c^2/\omega^2 - 1}$	$Z' = \eta \frac{\beta}{k} = \eta \frac{\lambda}{\lambda_g} = \eta \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2} < \eta$
$Z'' = j\eta \frac{k}{\alpha} = j \frac{\eta}{\sqrt{\omega_c^2/\omega^2 - 1}}$	$Z'' = \eta \frac{k}{\beta} = \eta \frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} > \eta$
Z immaginarie	Z reali

Quando si ha propagazione, la velocità di fase v_f con cui si propaga il campo elettromagnetico in guida e la corrispondente lunghezza d'onda λ_g sono date da

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} > v \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2/\lambda_c^2}} > \lambda$$

La velocità di fase dipende dalla frequenza, ma risulta comunque maggiore della velocità con cui le onde piane uniformi si propagano nel mezzo considerato; per questo motivo queste onde vengono dette *veloci*. Anche la lunghezza d'onda in guida è sempre maggiore della lunghezza d'onda relativa alle onde piane



uniformi che si propagano alla stessa frequenza nel dielettrico che riempie la guida.

La relazione di dispersione $\omega = \omega(\beta)$, immediatamente deducibile dalle espressioni precedenti, è data da

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \beta^2 v^2}$$

In figura sono riportati gli andamenti tipici con la frequenza della velocità di fase e della lunghezza d'onda in guida, assieme all'andamento del diagramma di dispersione.

La potenza trasportata in una sezione della guida da ogni campo modale è

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_S \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* \cdot \vec{u}_z ds \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_i I_i^*) \int_S \vec{e}_i \times \vec{h}_i \cdot \vec{u}_z ds$$

dove si è tenuto conto che \vec{e}_i e \vec{h}_i sono reali e che la componente assiale del campo elettrico (nei modi TM) o del campo magnetico (nei modi TE) non può dare alcun contributo.

Con le definizioni assunte, sia per i modi TM che per i modi TE risulta ¹⁰

$$\int_S \vec{e}_i \times \vec{h}_i \cdot \vec{u}_z ds = 1$$

Pertanto, nel caso ci sia una sola onda che si propaga o si attenua in uno dei due versi dell'asse z ($V_i = V_i^\pm e^{\mp\gamma_i z}$ e $I_i = \pm V_i/Z_i$), si trova che si ha trasporto di potenza solo se l'impedenza caratteristica è reale, cioè se la frequenza è superiore alla frequenza di taglio, γ_i è immaginario e il campo modale è un'onda che si propaga. In questo caso risulta:

$$P_i = \pm \frac{|V_i^\pm|^2}{2Z_i} = \pm \frac{Z_i |I_i^\pm|^2}{2}$$

Nel caso ci siano onde nei due versi dell'asse z , ($V_i = V_i^+ e^{-\gamma_i z} + V_i^- e^{\gamma_i z}$ e $Z_i I_i = V_i^+ e^{-\gamma_i z} - V_i^- e^{\gamma_i z}$) si trova

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{|V_i^+|^2 e^{-2\operatorname{Re}(\gamma_i)z} - 2j \operatorname{Im}(V_i^+ V_i^{-*}) e^{-2j \operatorname{Im}(\gamma_i)z} - |V_i^-|^2 e^{2\operatorname{Re}(\gamma_i)z}}{2Z_i^*} \right)$$

pertanto, se il modo si propaga (γ_i immaginario e Z_i reale) la potenza che attraversa la generica sezione z è data dalle differenze tra la potenza trasportata singolarmente dalle due onde (il termine mutuo, essendo immaginario, non dà contributo)

$$P_i = \frac{|V_i^+|^2}{2Z_i} - \frac{|V_i^-|^2}{2Z_i}$$

mentre se il modo non si propaga (γ_i reale e Z_i immaginario, $Z_i = j \operatorname{Im}(Z_i)$) l'unico contributo al

¹⁰

essendo sia per i modi TE che TM $\vec{h}_i = \vec{u}_z \times \vec{e}_i$ e $\vec{e}_i = -\vec{u}_z \times \vec{h}_i$, in ogni caso si ha

$$\int_S \vec{e}_i \times \vec{h}_i \cdot \vec{u}_z ds = \int_S \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i ds = \int_S \vec{h}_i \cdot \vec{h}_i ds = \frac{1}{\kappa_i^2} \int_S \nabla_T \Phi_i \cdot \nabla_T \Phi_i ds$$

applicando l'identità (B91) [1] e tenendo conto della (4), si trova:

$$\int_S \vec{e}_i \times \vec{h}_i \cdot \vec{u}_z ds = -\frac{1}{\kappa_i^2} \int_S \Phi_i \nabla_T^2 \Phi_i ds + \frac{1}{\kappa_i^2} \int_C \underbrace{\Phi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}}_{\text{zero}} dc = \int_S \Phi_i^2 ds = 1$$

trasporto di potenza può essere dato dal termine mutuo se V_i^+ e V_i^- non sono in fase

$$P_i = \frac{\text{Im}(V_i^+ V_i^{-*})}{\text{Im}(Z_i)}$$

Nel caso generale (11)-(12), quando il campo elettromagnetico è dato dalla sovrapposizione di più modi, si trova che la potenza totale trasportata è uguale alla somma delle potenze trasportate dai singoli modi:

$$\frac{1}{2} \int_S \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z ds = \frac{1}{2} \sum_i \text{Re}(V_i' I_i'^*) + \frac{1}{2} \sum_i \text{Re}(V_i'' I_i''^*)$$

infatti, sia nel caso si considerino due diversi modi, entrambe TE o TM ¹¹, sia nel caso si consideri un modo TE e uno TM ¹², risulta sempre

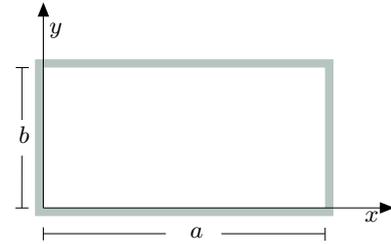
$$\int_S \vec{e}_i \times \vec{h}_j \cdot \vec{u}_z ds = 0 \quad (i \neq j)$$

Il modo con la frequenza di taglio più bassa viene detto *modo dominante*. La banda di utilizzo normale di una guida d'onda si estende da poco sopra la frequenza di taglio del modo dominante fino a poco sotto la frequenza di taglio del primo modo superiore. Operando in questa banda di frequenze (condizione di *unimodalità*) il campo elettromagnetico nella guida, a distanza sufficientemente grande da qualunque discontinuità, è dato sostanzialmente dal campo del modo dominante.

Guida rettangolare

La guida d'onda di uso più comune è la guida rettangolare. Normalmente essa viene riferita ad un sistema cartesiano con l'asse x secondo il lato maggiore ($a \geq b$).

Le espressioni dei potenziali Φ' e Φ'' , dei rispettivi *numeri d'onda di taglio* e dei relativi vettori modali sono riportati nella tabella seguente. Essi dipendono da due indici m e n che danno il numero di variazioni del campo nella direzione x e y rispettivamente.



¹¹

con passaggi analoghi a quelli di svolti per calcolare la potenza trasportata da un modo, si trova

$$\begin{aligned} \int_S \vec{e}_i \times \vec{h}_j \cdot \vec{u}_z ds &= \int_S \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j ds = \int_S \vec{h}_i \cdot \vec{h}_j ds = \frac{1}{\kappa_i \kappa_j} \int_S \nabla_T \Phi_i \cdot \nabla_T \Phi_j ds \\ &= \frac{\kappa_j}{\kappa_i} \int_S \Phi_i \Phi_j ds = \frac{\kappa_i}{\kappa_j} \int_S \Phi_i \Phi_j ds = 0 \end{aligned}$$

¹²

in questo caso risulta

$$\begin{aligned} \int_S \vec{e}_i' \times \vec{h}_j'' \cdot \vec{u}_z ds &= \int_S \vec{e}_i'' \times \vec{h}_j' \cdot \vec{u}_z ds = \frac{1}{\kappa_i \kappa_j} \int_S \nabla_T \Phi_i' \times \nabla_T \Phi_j'' \cdot \vec{u}_z ds = -\frac{1}{\kappa_i \kappa_j} \int_S \nabla_T \Phi_i' \cdot \nabla_T \times \vec{u}_z \Phi_j'' ds \\ &= \frac{1}{\kappa_i \kappa_j} \int_C \Phi_i' \vec{n} \cdot \nabla_T \times \vec{u}_z \Phi_j'' dc = 0 \end{aligned}$$

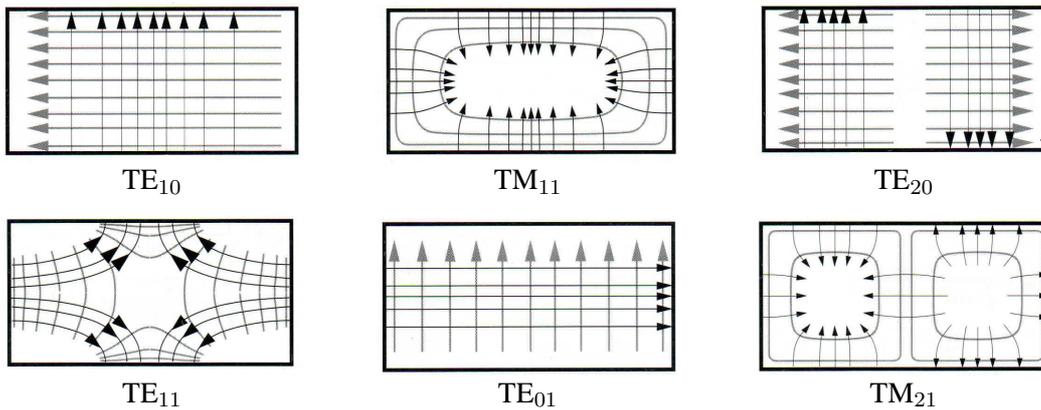
dove è stata usata l'identità

$$\int_S \nabla_T a \cdot \nabla_T \times \vec{A} ds = \int_S \nabla_T \cdot (a \nabla_T \times \vec{A}) ds = \int_C a \vec{n} \cdot \nabla_T \times \vec{A} dc$$

e si è tenuto conto che sul contorno $\Phi' = 0$.

modi TM_{mn} ($m, n = 1, 2, \dots$)	modi TE_{mn} ($m, n = 0, 1, 2, \dots$ escluso $m = n = 0$)
$\kappa_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$	
$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\kappa_{mn}} = 2 / \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$	
$\Phi'_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}} S_x S_y$	$\Phi''_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\chi_{mn} ab}} C_x C_y$
$\vec{e}'_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{ab}} (-\vec{u}_x \frac{m}{a} C_x S_y - \vec{u}_y \frac{n}{b} S_x C_y)$	$\vec{e}''_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{\chi_{mn} ab}} (\vec{u}_x \frac{n}{b} C_x S_y - \vec{u}_y \frac{m}{a} S_x C_y)$
$\vec{h}'_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{ab}} (\vec{u}_x \frac{n}{b} S_x C_y - \vec{u}_y \frac{m}{a} C_x S_y)$	$\vec{h}''_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{\sqrt{\chi_{mn} ab}} (\vec{u}_x \frac{m}{a} S_x C_y + \vec{u}_y \frac{n}{b} C_x S_y)$
$S_x = \sin \frac{m\pi x}{a} \quad S_y = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad C_x = \cos \frac{m\pi x}{a} \quad C_y = \cos \frac{n\pi y}{b}$	
$\chi_{mn} = \begin{cases} 2 & \text{se } m = 0 \text{ o } n = 0 \\ 1 & \text{se } m \neq 0 \text{ e } n \neq 0 \end{cases}$	

Nella figura seguente è riportato l'andamento del campo elettrico trasversale (tratto scuro) e del campo magnetico trasversale (tratto più chiaro) relativo ai primi modi di una guida d'onda rettangolare [2].



Il modo dominante è il TE_{10} . Per esso il numero d'onda di taglio è $\kappa''_{10} = \pi/a$, la lunghezza d'onda di taglio è il doppio del lato maggiore $\lambda''_{10} = 2a$ e la frequenza di taglio è $f''_{10} = v/(2a)$ per cui, ad esempio, una guida rettangolare con lato maggiore $a = 5$ cm in aria ($v = c$) permette la propagazione solo a frequenze superiori a 3 GHz. Il potenziale e i vettori modali assumono le semplici espressioni:

$$\Phi''_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x}{a} \quad \vec{e}''_{10} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \vec{u}_y \sin \frac{\pi x}{a} \quad \vec{h}''_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \vec{u}_x \sin \frac{\pi x}{a}$$

da cui si vede che il campo elettrico è ovunque diretto secondo y e il campo magnetico trasversale secondo x . I campi modali sono

$$\begin{aligned} \vec{E}''_{10} &= V''_{10} \vec{e}''_{10} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \vec{u}_y \sin \frac{\pi x}{a} V''_{10}(z) \\ \vec{H}''_{10} &= I''_{10} \vec{h}''_{10} - j \vec{u}_z \frac{V''_{10}}{\eta} \frac{\lambda}{2a} \Phi''_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \left(\vec{u}_x \sin \frac{\pi x}{a} I''_{10}(z) - j \vec{u}_z \cos \frac{\pi x}{a} \frac{\lambda}{2a} \frac{V''_{10}(z)}{\eta} \right) \end{aligned}$$

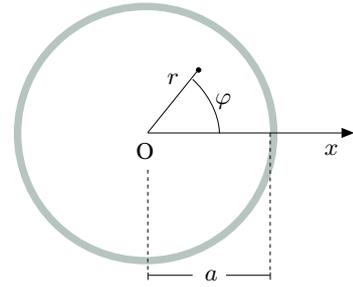
Se il modo si propaga, l'impedenza, la velocità di fase e la lunghezza d'onda in guida del modo TE_{10} sono:

$$Z''_{10} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \quad v''_{f10} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \quad \lambda''_{g10} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

Il primo modo superiore può essere il TE_{01} ($\lambda''_{01} = 2b$) o il TE_{20} ($\lambda''_{20} = a$), secondo se $2b$ è maggiore o minore di a .

Guida circolare

Un'altra guida d'onda di uso comune e di cui è possibile determinare i modi in forma analitica è la guida circolare. Naturalmente essa viene riferita ad un sistema polare r, φ che permette di risolvere l'equazione (4) con il metodo della separazione delle variabili. Si trova che le autofunzioni dipendono da φ come $\cos m\varphi$ con m intero, oppure, data la simmetria della guida, come $\sin m\varphi$ (modi degeneri per $m > 0$). La variazione in senso radiale è descritta da funzioni di Bessel di primo tipo.

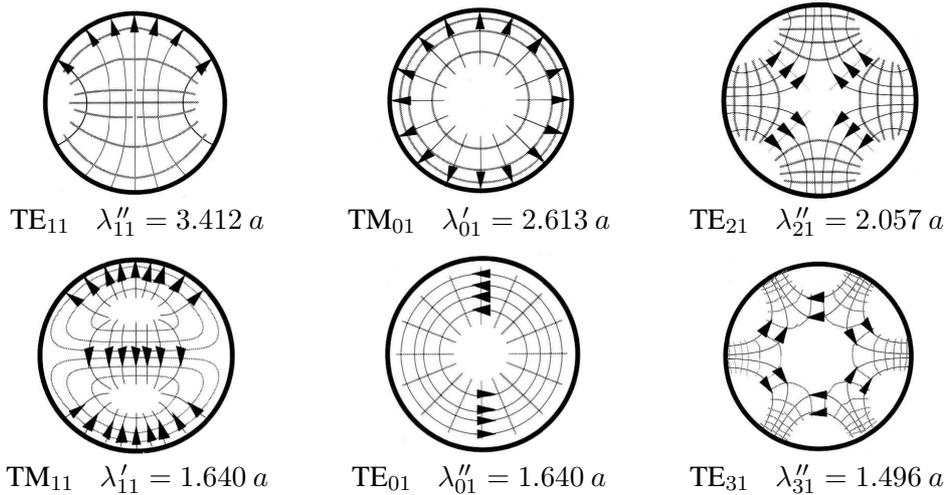


I modi sono ancora identificati da due indici: m che dà il numero di variazioni in senso azimutale e n che dà il numero di variazioni in senso radiale, per i modi degeneri è necessaria anche l'indicazione se la dipendenza azimutale è tipo coseno ($e = \text{even}$) o seno ($o = \text{odd}$).

Le espressioni dei potenziali Φ' e Φ'' , dei rispettivi numeri d'onda di taglio κ' e κ'' e dei relativi vettori modali sono riportati in tabella.

modi $\text{TM}_{mn}^{(e)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$)		
$\kappa'_{mn} = \frac{x_{mn}}{a}$	x_{mn} è la n -esima radice dell'equazione $J_m(x) = 0$ (zero escluso)	$\lambda'_{mn} = \frac{2\pi a}{x_{mn}}$
$\Phi'_{mn} = F'_{mn} J_m(\kappa'_{mn} r) \cos m\varphi$		
$\vec{e}'_{mn} = -F'_{mn} \left(\vec{u}_r J'_m(\kappa'_{mn} r) \cos m\varphi - \vec{u}_\varphi \frac{m J_m(\kappa'_{mn} r)}{\kappa'_{mn} r} \sin m\varphi \right)$		
$\vec{h}'_{mn} = -F'_{mn} \left(\vec{u}_r \frac{m J_m(\kappa'_{mn} r)}{\kappa'_{mn} r} \sin m\varphi + \vec{u}_\varphi J'_m(\kappa'_{mn} r) \cos m\varphi \right)$		
$F'_{mn} = \frac{\chi_m}{a \sqrt{\pi} J_{m+1}(x_{mn})}$	$J'_m(\kappa r) = \left. \frac{dJ_m(x)}{dx} \right _{x=\kappa r}$	$\chi_m = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ \sqrt{2} & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$
modi $\text{TE}_{mn}^{(e)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$)		
$\kappa''_{mn} = \frac{x'_{mn}}{a}$	x'_{mn} è la n -esima radice dell'equazione $J'_m(x) = 0$ (zero escluso)	$\lambda''_{mn} = \frac{2\pi a}{x'_{mn}}$
$\Phi''_{mn} = F''_{mn} J_m(\kappa''_{mn} r) \cos m\varphi$		
$\vec{e}''_{mn} = F''_{mn} \left(\vec{u}_r \frac{m J_m(\kappa''_{mn} r)}{\kappa''_{mn} r} \sin m\varphi + \vec{u}_\varphi J'_m(\kappa''_{mn} r) \cos m\varphi \right)$		
$\vec{h}''_{mn} = F''_{mn} \left(-\vec{u}_r J'_m(\kappa''_{mn} r) \cos m\varphi + \vec{u}_\varphi \frac{m J_m(\kappa''_{mn} r)}{\kappa''_{mn} r} \sin m\varphi \right)$		
$F''_{mn} = \frac{\chi_m \kappa''_{mn}}{J_m(x'_{mn}) \sqrt{\pi (x'^2_{mn} - m^2)}}$		
modi $\text{TM}_{mn}^{(o)}$ e $\text{TE}_{mn}^{(o)}$ ($m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$)		
le espressioni dei potenziali e dei vettori modali relativi ai modi dispari si deducono dalle corrispondenti espressioni relative ai modi pari cambiando $\cos \rightarrow \sin$ e $\sin \rightarrow -\cos$.		

In figura, è riportato l'andamento di campi trasversali elettrico (tratto scuro) e magnetico (tratto più chiaro) relativi ai primi modi di una guida d'onda circolare [2] assieme ai valori delle lunghezze d'onda di taglio.



Il modo dominante è il TE_{11} la cui lunghezza d'onda di taglio è $\lambda''_{11} = x'_{11} a \approx 3.412 a$. Dato che questo modo è degenere, in generale i campi modali sono dati dalla sovrapposizione del modo pari e del modo dispari:

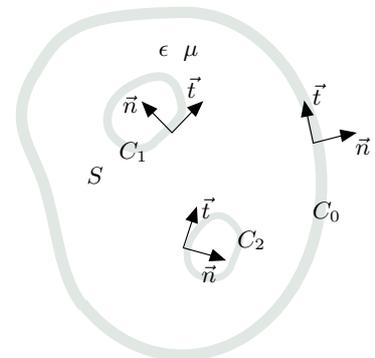
$$\vec{E}''_{11} = \vec{e}''_{11}^{(e)} V''_{11}{}^{(e)}(z) + \vec{e}''_{11}^{(o)} V''_{11}{}^{(o)}(z)$$

$$\vec{H}''_{11} = \vec{h}''_{11}^{(e)} I''_{11}{}^{(e)}(z) + \vec{h}''_{11}^{(o)} I''_{11}{}^{(o)}(z) - j \vec{u}_z \frac{\lambda}{\lambda''_{11}} \left(\Phi''_{11}{}^{(e)} \frac{V''_{11}{}^{(e)}(z)}{\eta} + \Phi''_{11}{}^{(o)} \frac{V''_{11}{}^{(o)}(z)}{\eta} \right)$$

Il primo modo superiore è il TM_{01} che ha lunghezza d'onda di taglio pari a $\lambda'_{11} = x_{01} a \approx 2.613 a$.

Linee di trasmissione schermate

Nel caso in cui all'interno del conduttore tubolare che delimita la guida d'onda siano presenti uno o più conduttori, in generale un numero N di conduttori, allora la sezione della guida (che risulta moltiplicemente connessa) è definita da elementi separati di contorno C_0, C_1, \dots, C_N (nella figura accanto $N = 2$). In questo caso oltre alle autosoluzioni già viste che costituiscono i modi TE e TM, esistono anche soluzioni dell'equazione (4) in Φ' con $\kappa'_i = 0$ e condizioni al contorno per cui Φ' è nullo sul conduttore esterno C_0 e assume valori costanti, ma non tutti nulli, sul contorno di ciascun conduttore interno $C_n, (n = 1, \dots, N)$.



Queste soluzioni sono compatibili con la condizione di parete elettrica sui conduttori, infatti, dato che Φ' è costante su ciascun conduttore, \vec{E}_T è perpendicolare a ciascuno essi, l'annullamento di E_z sui conduttori è assicurato invece dall'annullamento dell'autovalore κ'_i : dall'equazione (7) si vede che E_z è nullo ovunque.

I modi che derivano da queste autosoluzioni, essendo privi della componente assiale sia del campo magnetico che del campo elettrico, sono *trasversali elettrici e magnetici* (TEM). L'annullamento del numero d'onda di taglio implica che γ'_i è uguale a jk e quindi che questi modi si propagano a qualunque frequenza con la stessa velocità di fase e lunghezza d'onda con cui le onde piane uniformi si propagano nel mezzo che riempie la guida d'onda.

Per questi modi è naturale assumere che l'impedenza modale coincida con l'impedenza caratteristica del dielettrico.

Nella tabella vengono riportati le espressioni dei vettori modali dei modi TEM, contraddistinti dall'apice $^{\circ}$, che sono necessariamente diverse da quelle dei modi TM, dato che la divisione per il numero d'onda di taglio non è più possibile. La forma dei modi TEM dipende unicamente dai valori costanti imposti a Φ° sui conduttori, si vede però che il numero di modi indipendenti è uguale al numero N di conduttori interni. In ciascuna sezione il campo elettrico ha la stessa struttura di un campo statico, cioè è solenoidale ed è esprimibile come il gradiente di un potenziale. Per quanto detto, considerando su una qualunque sezione z , una qualunque coppia di punti $\vec{\rho}_0$ e $\vec{\rho}_n$ appartenenti rispettivamente al conduttore esterno e al conduttore n -esimo, qualunque sia il percorso d'integrazione tra essi, risulta:

modi TEM		
$\nabla_{\text{T}}^2 \Phi_i^{\circ} = 0$		equazione
$\Phi_i^{\circ}(\vec{\rho}) = 0$	$\vec{\rho} \in C_0$	} condizione al contorno
$\Phi_i^{\circ}(\vec{\rho}) = \text{cost}_i^{(n)}$	$\vec{\rho} \in C_n$	
$\gamma_i^{\circ} = jk$		costante di propagazione
$\vec{e}_i^{\circ} = -\nabla_{\text{T}} \Phi_i^{\circ}$		} vettori modali
$\vec{h}_i^{\circ} = \vec{u}_z \times \vec{e}_i^{\circ}$		
$Z_i^{\circ} = \eta$		impedenza modale
$\vec{E}_i^{\circ} = \vec{e}_i^{\circ} V_i^{\circ}$		} campi modali
$\vec{H}_i^{\circ} = \vec{h}_i^{\circ} I_i^{\circ}$		

$$V_i^{(n)} = \int_{\vec{\rho}_0}^{\vec{\rho}_n} \vec{E}_i^{\circ} \cdot d\vec{\ell} = -V_i^{\circ} \int_{\vec{\rho}_0}^{\vec{\rho}_n} \nabla_{\text{T}} \Phi_i^{\circ}(\vec{\rho}) \cdot d\vec{\ell} = V_i^{\circ} (\Phi_i^{\circ}(\vec{\rho}_n) - \Phi_i^{\circ}(\vec{\rho}_0)) = V_i^{\circ} \text{cost}_i^{(n)} \quad (13)$$

Nella sezione z , $V_i^{(n)}$ ha quindi il significato di tensione del conduttore n -esimo rispetto allo schermo, secondo la definizione adottata nella teoria dei circuiti, con l'unica differenza che il percorso d'integrazione non è del tutto arbitrario ma è vincolato a rimanere nella sezione considerata.

Allo stesso modo, sempre nella generica sezione z , la densità superficiale di corrente sui conduttori è data da:

$$\vec{J}_s = -\vec{n} \times \vec{H}_i^{\circ} = I_i^{\circ} \vec{n} \times (\vec{u}_z \times \nabla_{\text{T}} \Phi_i^{\circ}) = \vec{u}_z I_i^{\circ} \frac{\partial \Phi_i^{\circ}}{\partial n}$$

e la corrente che fluisce nella sezione z del conduttore n -esimo è

$$I_i^{(n)} = I_i^{\circ} \int_{C_n} \frac{\partial \Phi_i^{\circ}}{\partial n} dc \quad (14)$$

La potenza trasportata dal i -esimo modo TEM è data da

$$P_i^{\circ} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_S \vec{E}_i^{\circ} \times \vec{H}_i^{\circ*} \cdot \vec{u}_z ds \right) = \frac{1}{2} \text{Re} (V_i^{\circ} I_i^{\circ*}) \int_S \vec{e}_i^{\circ} \times \vec{h}_i^{\circ} \cdot \vec{u}_z ds$$

calcolando l'integrale ¹³ si ottiene

$$P_i^{\circ} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_{n=1}^N (V_i^{\circ} \text{cost}_i^{(n)}) (I_i^{\circ} \int_{C_n} \frac{\partial \Phi_i^{\circ}}{\partial n} dc)^* \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \text{Re} (V_i^{(n)} I_i^{(n)*})$$

questo risultato coincide con la nota espressione della teoria dei circuiti per esprimere la potenza in un sistema multi-conduttore.

¹³

considerando in generale il modo i -esimo e j -esimo di una linea multi-conduttore, risulta

$$\begin{aligned} \int_S \vec{e}_i^{\circ} \times \vec{h}_j^{\circ} \cdot \vec{u}_z ds &= \int_S \nabla_{\text{T}} \Phi_i^{\circ} \times (\vec{u}_z \times \nabla_{\text{T}} \Phi_j^{\circ}) \cdot \vec{u}_z ds = \int_S \nabla_{\text{T}} \Phi_i^{\circ} \cdot \nabla_{\text{T}} \Phi_j^{\circ} ds \\ &= - \int_S \underbrace{\Phi_i^{\circ} \nabla_{\text{T}}^2 \Phi_j^{\circ}}_{\text{zero}} ds + \int_{\cup C_n} \Phi_i^{\circ} \frac{\partial \Phi_j^{\circ}}{\partial n} dc = \sum_{n=1}^N \text{cost}_i^{(n)} \int_{C_n} \frac{\partial \Phi_j^{\circ}}{\partial n} dc \end{aligned}$$

Dalle espressioni (13), (14) si vede che, nel caso ci sia una sola onda che si propaga nel verso positivo o negativo dell'asse z , cioè nei casi in cui $V_i^o = Z_i^o I_i^o$, il rapporto tra la tensione del conduttore n -esimo e la corrente che su esso fluisce, cioè l'impedenza $Z_i^{(n)} = V_i^{(n)} / I_i^{(n)}$ è indipendente dalla sezione ed è quindi *caratteristica* del modo TEM e del conduttore considerati:

$$Z_i^{(n)} = \eta \operatorname{cost}_i^{(n)} \left(\int_{C_n} \frac{\partial \Phi_i^o}{\partial n} dc \right)^{-1}$$

Dall'annullamento del laplaciano di Φ_i^o ¹⁴, si ritrova anche che, in ciascuna sezione e per ciascun modo TEM, la somma delle correnti su tutti i conduttori (schermo compreso) è nulla

$$\sum_{n=0}^N I_i^{(n)} = 0$$

in accordo con una delle leggi fondamentali della teoria dei circuiti che dice che la corrente totale uscente da un nodo è sempre nulla.

Nel caso di un solo conduttore interno, risulta immediato ridefinire il campo elettrico e il campo magnetico, anziché in funzione della tensione, corrente e impedenza modale, in termini della tensione V del conduttore interno, della corrente I che su esso fluisce e dell'impedenza caratteristica Z_c (in questo caso sono omessi sia l'indice che indica il conduttore sia il pedice che indica il modo, dato che c'è un solo modo TEM e un solo conduttore interno). Infatti, ponendo uguale a uno l'unica costante che definisce Φ^o , si ottiene la rappresentazione riportata nella tabella a fianco.

È semplice verificare che, con queste definizioni, risulta:

modo TEM (un solo conduttore interno)	
$\nabla_{\text{T}}^2 \Phi^o = 0$	equazione
$\Phi^o(\vec{\rho}) = 0$	} condizione al contorno
$\Phi^o(\vec{\rho}) = 1$	
$\gamma^o = jk$	costante di propagazione
$\vec{e}^o = -\nabla_{\text{T}} \Phi^o$	} vettori modali
$\vec{h}^o = \frac{Z_c}{\eta} \vec{u}_z \times \vec{e}^o$	
$Z_c = \eta \left(\int_{C_1} \frac{\partial \Phi^o}{\partial n} dc \right)^{-1}$	impedenza caratteristica
$\vec{E}^o = \vec{e}^o V$	} campi modali
$\vec{H}^o = \vec{h}^o I$	

$$\int_S \vec{e}^o \cdot \vec{e}^o ds = \frac{\eta}{Z_c} \quad \int_S \vec{h}^o \cdot \vec{h}^o ds = \frac{Z_c}{\eta} \quad \int_S \vec{e}^o \times \vec{h}^o \cdot \vec{u}_z ds = 1$$

Anche nel caso di più conduttori interni è possibile ridefinire i vettori modali in modo da mettere in evidenza i parametri circuitali (tensioni, correnti impedenze caratteristiche) della linea multiconduttore, in questo caso però la ridefinizione è più complicata e non univoca. In ogni caso, come era stato detto in generale per i modi degeneri, anche per i modi TEM di una linea multi-conduttore è sempre possibile scegliere i potenziali in modo tale che i diversi modi TEM di una stessa linea siano ortogonali tra loro. Analogamente, è sempre possibile normalizzare ciascun modo. Nel caso specifico, dato che i potenziali Φ_i^o sono univocamente definiti dai valori $\operatorname{cost}_i^{(n)}$ che essi assumono sui conduttori, è sempre possibile scegliere queste costanti in modo tale che l'espressione

$$\int_S \vec{e}_i^o \times \vec{h}_j^o \cdot \vec{u}_z ds = \sum_{n=1}^N \operatorname{cost}_i^{(n)} \int_{C_n} \frac{\partial \Phi_j^o}{\partial n} dc$$

sia nulla per $i \neq j$ e unitaria per $i = j$.

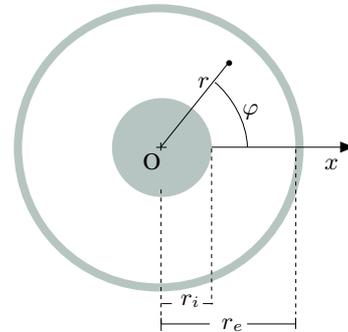
14

$$\nabla^2 \Phi_i^o = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_S \nabla \cdot \nabla \Phi_i^o ds = \int_{\cup C_n} \vec{n} \cdot \nabla \Phi_i^o dc = \sum_{n=0}^N \int_{C_n} \frac{\partial \Phi_i^o}{\partial n} dc = 0$$

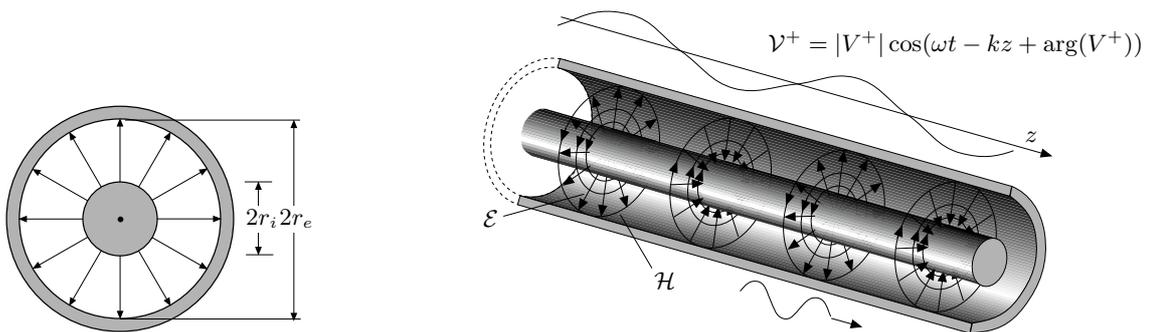
Cavo coassiale

Il cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico a sezione circolare coassiale ad un conduttore esterno a sezione pure circolare. I raggi dei conduttori interno ed esterno sono indicati rispettivamente con r_i e r_e . Il potenziale e i vettori modali relativi all'unico modo TEM sono

$$\begin{aligned} \Phi^o &= \frac{\ln(r_e/r)}{\ln(r_e/r_i)} \\ \vec{e}^o &= \frac{1}{r \ln(r_e/r_i)} \vec{u}_r \\ \vec{h}^o &= \frac{Z_c}{\eta} \vec{u}_z \times \vec{e}^o = \frac{1}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \\ Z_c &= \frac{\eta}{2\pi} \ln(r_e/r_i) \\ \vec{E}^o(r, \varphi, z) &= \vec{e}^o(r, \varphi) V(z) \\ \vec{H}^o(r, \varphi, z) &= \vec{h}^o(r, \varphi) I(z) \end{aligned}$$



dove $V(z)$, $I(z)$ e Z_c hanno il solito significato usato nella teoria dei circuiti. Nelle figure seguenti sono riportate le linee di forza del campo elettrostatico in un cavo coassiale e l'andamento delle linee di forza di un'onda TEM.

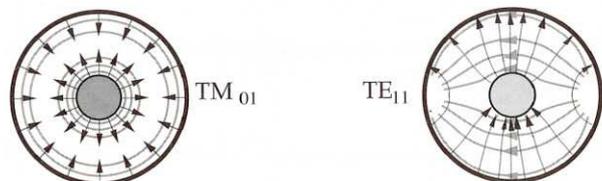


Campo elettrostatico nel cavo coassiale

Onda TEM nel cavo coassiale e onda di tensione ad essa associata [2].

Nella figura accanto, è indicato l'andamento del campo elettrico e del campo magnetico del modo TM_{01} e del modo TE_{11} del cavo coassiale [2]. Quest'ultimo è il primo modo superiore del cavo coassiale e la sua lunghezza d'onda di taglio, per valori di $r_e/r_i \leq 5$ può essere stimata con sufficiente accuratezza con la semplice espressione

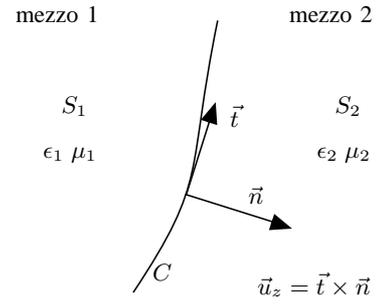
$$\lambda''_{11} \approx \pi (r_i + r_e)$$



Guide d'onda con dielettrico non omogeneo

Nel caso all'interno della guida ci siano più dielettrici, che comunque rispettano la simmetria per traslazione della struttura, allora la rappresentazione dei campi elettromagnetici attraverso i potenziali di Hertz-Debye è valida in ciascuno dei diversi mezzi. I valori che i potenziali assumono da una parte e dall'altra di ciascuna interfaccia devono essere tali da assicurare la continuità delle componenti tangenti del campo elettrico e magnetico.

Considerando una qualunque interfaccia tra i mezzi 1 e 2, e contrassegnando con i pedici 1 e 2 le quantità relative a ciascun mezzo, dalle equazioni (4) e (5)-(8) si ottiene ¹⁵ :



$$\begin{aligned} \nabla_T^2 \Phi_1(\vec{\rho}) + \kappa_1^2 \Phi_1(\vec{\rho}) &= 0 & \vec{\rho} \in S_1 & & \nabla_T^2 \Phi_2(\vec{\rho}) + \kappa_2^2 \Phi_2(\vec{\rho}) &= 0 & \vec{\rho} \in S_2 \\ \kappa_1^2 &= k_1^2 + \gamma^2 & & & \kappa_2^2 &= k_2^2 + \gamma^2 & \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta_1 \gamma}{j k_1 Z} \frac{\partial \Phi_1'(\vec{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1''(\vec{\rho})}{\partial n} &= \frac{\eta_2 \gamma}{j k_2 Z} \frac{\partial \Phi_2'(\vec{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2''(\vec{\rho})}{\partial n} \\ \frac{\gamma Z}{j k_1 \eta_1} \frac{\partial \Phi_1''(\vec{\rho})}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1'(\vec{\rho})}{\partial n} &= \frac{\gamma Z}{j k_2 \eta_2} \frac{\partial \Phi_2''(\vec{\rho})}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2'(\vec{\rho})}{\partial n} \\ \frac{\eta_1 \kappa_1^2}{k_1} \Phi_1'(\vec{\rho}) &= \frac{\eta_2 \kappa_2^2}{k_2} \Phi_2'(\vec{\rho}) \\ \frac{\kappa_1^2}{k_1 \eta_1} \Phi_1''(\vec{\rho}) &= \frac{\kappa_2^2}{k_2 \eta_2} \Phi_2''(\vec{\rho}) \end{aligned} \right\} \vec{\rho} \in C$$

continuità di

\vec{E}_T

\vec{H}_T

E_z

H_z

Queste relazioni mostrano chiaramente che le condizioni di continuità delle componenti tangenziali dei campi implicano che tra Φ' e Φ'' da una parte e dall'altra dell'interfaccia, ci sia una ben precisa relazione, dipendente dalla frequenza. Salvo casi particolari, non sono quindi possibili soluzioni dipendenti da uno solo dei potenziali e i campi modali, derivando da entrambi, non sono né TE né TM, ma hanno sia la componente assiale del campo elettrico che quella del campo magnetico (*modi ibridi*).

In questo caso, al contrario di quanto avviene per i modi TE, TM e TEM quando il dielettrico è omogeneo, i vettori modali variano al variare della frequenza.

Se all'interno del conduttore che costituisce lo schermo ci sono altri conduttori, si trova ancora che c'è un numero di modi uguale al numero di conduttori interni che, come i modi TEM nel caso omogeneo, si propagano a qualunque frequenza.

Al contrario di quanto avviene per i modi TEM, le componenti assiali dei campi elettrico e/o magnetico relativi a questi modi differiscono da zero e diventano trascurabili rispetto alle componenti trasversali in misura tanto maggiore quanto più bassa è la frequenza. La forma dei vettori modali dipende dalla frequenza, così come la velocità di fase con cui questi modi si propagano. Per questi motivi i modi di questo tipo vengono detti *quasi TEM*.

¹⁵

sulla superficie dei conduttori

$$\nabla_T = \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} + \vec{t} \frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{u}_z \times \nabla_T = -\vec{t} \frac{\partial}{\partial n} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial t}$$

Guide d'onda schermate e non schermate

Dall'analisi fatta finora, relativa a strutture ideali contenenti mezzi omogenei, e a quanto dedotto relativamente alle guide d'onda contenenti dielettrici diversi, si può concludere che:

- Tutte le guide schermate permettono la propagazione di un'infinità numerabile di modi. Ciascun modo è caratterizzato da una frequenza di taglio dipendente dalla forma e dalle dimensioni della sezione trasversale, oltre che dalle caratteristiche del mezzo. A seconda della frequenza di lavoro, i modi rappresentano onde che si propagano oppure onde stazionarie evanescenti. Fra di essi, i soli che si propagano e trasmettono energia sono quelli che hanno frequenza di taglio inferiore alla frequenza di lavoro. Se il mezzo all'interno della guida è omogeneo, i modi sono di tipo TE o TM, altrimenti, salvo casi particolari, sono ibridi.
- Se oltre al conduttore tubolare esterno si hanno N conduttori interni (cioè se la guida è una linea di trasmissione schermata composta da $N + 1$ conduttori), in aggiunta ai modi suddetti esistono anche N modi che si propagano e trasmettono energia a qualsiasi frequenza, al limite anche in regime stazionario. Se il mezzo è omogeneo, questi modi sono TEM, altrimenti sono quasi TEM.
- La velocità di fase dei modi che si propagano dipende dalla frequenza, con l'unica eccezione dei modi TEM per i quali la velocità di fase coincide con quella delle onde piane uniformi nell'unico mezzo all'interno della struttura.
- Nel caso dei modi TEM i campi hanno, nell'ambito di ciascuna sezione trasversale, struttura identica a quella dei campi in regime stazionario. Ciò permette di definire, in ogni sezione, la tensione e la corrente, con lo stesso significato attribuito dalla teoria dei circuiti.
Le stesse considerazioni valgono in prima approssimazione anche per i modi quasi TEM, e l'approssimazione è tanto migliore quanto più grande è la lunghezza d'onda rispetto alle dimensioni della sezione della guida d'onda.
- Qualunque campo possa esistere in un tratto di guida, o linea di trasmissione multi-conduttore, in cui non siano presenti correnti impresse, può sempre essere rappresentato come combinazione di modi.

L'analisi di strutture non schermate è molto più complessa di quella delle strutture schermate perché in questo caso oltre al trasporto di potenza nella direzione dell'asse della struttura, è possibile avere trasporto di potenza anche in tutte le altre direzioni.

Assumendo che da una certa distanza in poi dall'asse della struttura il mezzo sia il vuoto, affinché all'infinito la densità di potenza trasportata in direzione radiale (perpendicolare all'asse) resti finita è necessario che la componente radiale del vettore di Poynting vada a zero come $1/\rho$

$$dP = \operatorname{Re}(\vec{S} \cdot \vec{u}_\rho) \underbrace{\rho d\varphi dz}_{ds}$$

Se oltre alle condizioni al contorno al finito, imposte dalla forma e costituzione della guida d'onda si impone che all'infinito i potenziali di Hertz-Debye vadano a zero in maniera tale che la densità di potenza trasportata in direzione radiale sia finita all'infinito, si trova che esiste un'infinità non numerabile di soluzioni che rappresentano onde che trasportano potenza anche in direzione trasversale rispetto all'asse della struttura. Per questo motivo, i modi derivanti da queste soluzioni vengono chiamati *modi irraggianti*. Essi, rispetto alla direzione dell'asse della struttura, possono rappresentare sia onde che si propagano con velocità di fase maggiore di quella delle onde piane nel vuoto (*onde veloci*), sia onde che si attenuano senza variazione di fase (*onde evanescenti*).

L'importanza di questi modi è più teorica che pratica, perché solo poche semplici strutture permettono la loro determinazione in forma analitica; la loro determinazione per via numerica è praticamente impedita dal fatto che essi costituiscono uno spettro continuo di soluzioni.

Oltre ai modi irraggianti, esiste anche un'altra classe di soluzioni che si ottiene imponendo che all'infinito i potenziali di Hertz Debye tendano a zero in modo che la densità di potenza trasportata in direzione radiale all'infinito sia nulla. Ma se la densità di potenza trasportata in direzione radiale è nulla all'infinito e da una certa distanza dall'asse della struttura in poi il mezzo è il vuoto che non dissipa né rifrange, questo implica che almeno in tutta la zona occupata dal vuoto la densità di potenza trasportata in direzione radiale

è identicamente nulla. Con l'imposizione di questa condizione si ottiene un numero finito di soluzioni distinte che rappresentano onde che si propagano e trasportano potenza solo nella direzione dell'asse della struttura. La velocità di fase relativa a questi modi è inferiore (al limite uguale nel caso di modi TEM) a quella delle onde piane uniformi nel vuoto (*onde lente*). Dato che i campi elettromagnetici che da essi derivano hanno valori significativi solo in prossimità dell'asse della struttura, questi modi vengono detti *modi confinati* oppure *modi guidati* per mettere in evidenza che il trasporto di potenza è solo in direzione assiale.

Il numero (finito) di questi modi dipende dalla struttura considerata e dalla frequenza e in genere aumenta all'aumentare della frequenza. Anche per questi modi è definita la frequenza di taglio (che può anche essere nulla per i modi TEM o quasi TEM). Quando la frequenza di taglio del modo confinato è inferiore alla frequenza di lavoro, i campi elettromagnetici associati al modo costituiscono un'onda che si propaga e trasporta potenza. A differenza da quanto avviene per i modi TE, TM e ibridi nelle guida d'onda schermate, quando invece la frequenza di taglio del modo confinato è superiore alla frequenza di lavoro, il modo considerato semplicemente non esiste. Se si calcolassero i campi modali a frequenze inferiori alla frequenza di taglio si troverebbe che non sarebbero più soddisfatte tutte le condizioni cui devono sottostare i campi modali, condizione all'infinito compresa, e per questo motivo la soluzione non è più accettabile.

Anche per strutture non schermate, vale la proprietà che qualunque modo, irraggiante o confinato, è ortogonale a qualunque altro modo, irraggiante o confinato e che qualunque campo elettromagnetico in una zona priva di sorgenti è esprimibile come combinazione di modi.

Linea bifilare

Un esempio di modo confinato in una struttura non schermata è il modo TEM di una linea bifilare.

Nella forma più semplice, la linea bifilare è costituita da due conduttori uguali, di sezione circolare ed il dielettrico è ovunque il vuoto (l'aria nei casi reali).

Nella seguente tabella sono riportati le espressioni del potenziale, dei vettori modali e dell'impedenza caratteristica di una linea bifilare.

$$\Phi^o = \frac{1}{F} \ln \frac{(x - x_0)^2 + y^2}{(x + x_0)^2 + y^2} \quad x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - D^2} \quad F = 2 \ln \frac{d - 2x_0}{d + 2x_0}$$

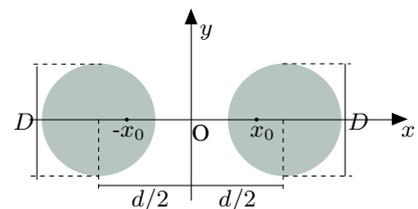
$$\vec{e}^o = -\frac{4x_0}{F} \frac{(x^2 - x_0^2 - y^2) \vec{u}_x + 2xy \vec{u}_y}{((x - x_0)^2 + y^2)((x + x_0)^2 + y^2)}$$

$$\vec{h}^o = \frac{Z_c}{\eta} \frac{4x_0}{F} \frac{2xy \vec{u}_x - (x^2 - x_0^2 - y^2) \vec{u}_y}{((x - x_0)^2 + y^2)((x + x_0)^2 + y^2)}$$

$$Z_c = \frac{\eta}{\pi} \operatorname{arccosh} \frac{d}{D}$$

$$\vec{E}^o(x, y, z) = \vec{e}^o(x, y) V^o(z)$$

$$\vec{H}^o(x, y, z) = \vec{h}^o(x, y) I^o(z)$$

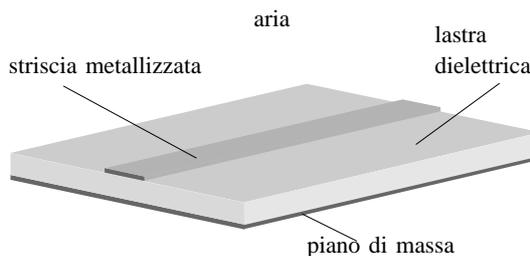


dove $V^o(z)$ e $I^o(z)$ hanno ancora, sezione per sezione, il significato usuale che hanno la tensione e la corrente nella teoria dei circuiti.

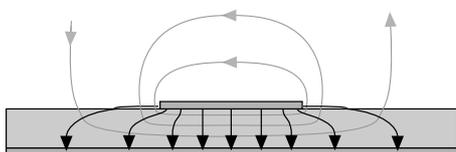
Se la frequenza è sufficientemente bassa, in due sezioni sufficientemente vicine, le variazioni dei campi elettromagnetici sono trascurabili, così che i campi presentano anche in direzione assiale le caratteristiche dei campi statici. Nelle linee per la trasmissione dell'energia elettrica ($f = 50$ Hz) la lunghezza d'onda è di 6000 km e per poter apprezzare gli effetti della propagazione è necessario verificare l'andamento della tensione e corrente su distanze di almeno alcune centinaia di km.

Linea in microstriscia

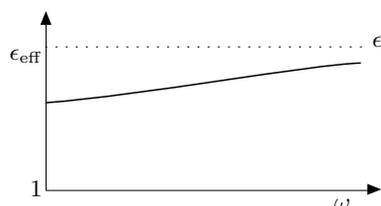
Un altro esempio di modo confinato supportato da una struttura non schermata realizzata su un supporto dielettrico è il modo quasi TEM di una linea in microstriscia. Queste linee, molto utilizzate nell'elettronica ad alta frequenza, vengono realizzate metallizzando completamente una faccia di una lastra dielettrica piana (piano di massa) e una sottile striscia sull'altra faccia.



Per questa linea a due conduttori, non sono disponibili espressioni analitiche dei vettori modali: i parametri principali della linea, come l'impedenza caratteristica e la velocità di fase con cui il modo si propaga vengono normalmente determinate per via numerica o sperimentale. L'andamento dei campi è indicato in modo qualitativo nella figura seguente. L'andamento delle caratteristiche di propagazione del modo al variare della frequenza sono normalmente riportate fornendo l'andamento della *costante dielettrica efficace* definita come il rapporto tra i quadrati della costante di fase del modo e di quella delle onde piane nel vuoto: $\epsilon_{\text{eff}} = \beta^2 / k_0^2$ dove $k_0 = \omega / c$.



andamento dei campi elettrico (linee scure) e magnetico (linee più chiare) relativi al modo quasi TEM di una microstriscia



andamento tipico della costante dielettrica efficace in una microstriscia

Il valore di ϵ_{eff} è sempre maggiore di uno (il modo quasi TEM è un'onda lenta) e sempre inferiore al valore della costante dielettrica relativa del materiale di cui è costituito il supporto dielettrico.

Fibra ottica, guida dielettrica

La presenza dei conduttori non è necessaria per ottenere una guida d'onda l'esempio più conosciuto a questo riguardo è sicuramente la fibra ottica.

Della fibra ottica a "salto d'indice", o della "guida dielettrica" (usata per realizzare antenne nella banda delle microonde), che sono strutture costituite da un semplice cilindro dielettrico omogeneo in aria, è possibile determinare i modi in forma analitica. La trattazione, basata sui concetti esposti, richiede la conoscenza delle caratteristiche delle funzioni di Bessel e delle funzioni di Bessel modificate di primo e secondo tipo, chi fosse interessato può trovare la trattazione anche in [3].

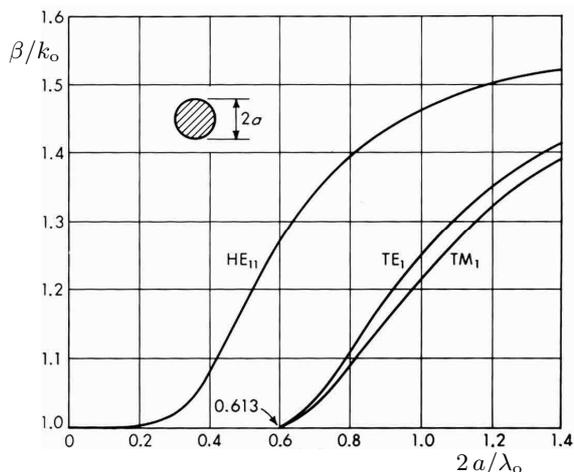
In questi appunti ci si limita a riportare i diagrammi di dispersione dei primi tre modi confinati di una particolare guida dielettrica. La determinazione di alcuni modi confinati su una struttura dielettrica verrà illustrata con riferimento ad una lastra dielettrica, per cui è sufficiente conoscere le caratteristiche delle funzioni seno, coseno ed esponenziale.

Il primo modo non ha frequenza di taglio, è indicato con HE_{11} perchè, com'era da aspettarsi, è un modo ibrido che ha componente assiale sia del campo magnetico (dominante), sia del campo elettrico, da cui l'indicazione HE ¹⁶. Il primo indice dà le variazioni in senso azimutale, il secondo in senso radiale. Le linee di forza del campo elettrico di questo modo, all'interno del dielettrico, assomigliano molto a quelle del modo TE_{11} in una guida circolare, al contrario di queste che terminano sul conduttore esterno, le linee di forza del campo elettrico del modo HE_{11} si chiudono su sé stesse nella parte in aria.

¹⁶

i modi ibridi in cui predomina la componente assiale del campo elettrico, vengono indicati come modi EH.

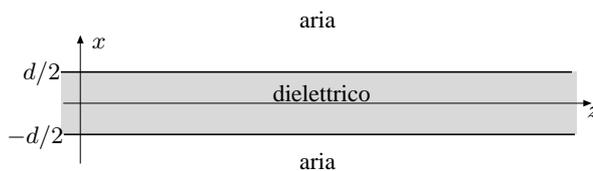
I modi TE_1 e TM_1 sono modi a simmetria assiale e il primo indice, sottinteso, è lo zero. In questi modi il campo elettrico e magnetico trasversali sono o radiali o azimutali e quindi sono o perpendicolari o paralleli all'interfaccia dielettrico aria. Dato che i campi perpendicolari all'interfaccia, automaticamente soddisfano la condizione di continuità, le soluzioni a simmetria assiale, dipendono da uno solo dei potenziali di Hertz-Debye trasversi e sono o TE o TM. Dal diagramma che mostra la costante di propagazione β del modo, normalizzata a $k_0 = \omega/c$, in funzione della frequenza normalizzata $2a/\lambda_0 = (2a/c) f$, si nota che risulta sempre $\beta > k_0$, cioè la velocità di fase di questi modi è sempre inferiore a c , in accordo con quanto detto in generale, che i modi confinati rappresentano sempre onde lente.



diagrammi di dispersione dei primi 3 modi confinati di una guida dielettrica di costante dielettrica relativa $\epsilon' = 2.56$.

Lastra dielettrica

Consideriamo una lastra piana, indefinita, di spessore d di un dielettrico ideale di indice di rifrazione n ($n > 1$) circondata da aria (indice di rifrazione unitario). Per la particolarità della struttura, se consideriamo che la propagazione avvenga secondo l'asse z e assumiamo che i campi elettromagnetici non varino rispetto ad y , anche se sono presenti due mezzi diversi, possiamo trovare dei modi di tipo TE e TM. Infatti se il campo elettrico (oppure il campo magnetico) è ovunque diretto secondo l'asse x su esso non dobbiamo imporre nessuna condizione sulle interfacce dielettrico-aria, semplicemente perché non ha componente tangente. Questo semplifica di molto i calcoli e permette di trovare soluzioni dipendenti da uno solo dei due potenziali.



I modi della lastra dielettrica di questo tipo sono interessanti perché ammettono anche una semplice interpretazione in termini di onde piane. Essi infatti possono essere visti come il risultato di una coppia di onde piane (localmente) uniformi che incidono, con lo stesso angolo d'incidenza, al di sopra dell'angolo limite ($\vartheta_L = \arcsin 1/n$), su ciascuna interfaccia dielettrico-aria. Dato che l'incidenza è oltre l'angolo limite, in aria, sia da una parte che dall'altra, c'è un'onda evanescente che non trasporta energia in direzione perpendicolare all'interfaccia (asse $\pm x$), ma solo in direzione parallela ad essa (asse z). Per lo stesso motivo, all'interno del dielettrico, le onde sono totalmente riflesse, e la direzione di propagazione di ciascuna onda riflessa coincide con la direzione di propagazione dell'altra onda, prima della riflessione. Per quei particolari valori di frequenza ed angolo d'incidenza, per cui i fronti d'onda di ciascuna onda riflessa coincidono con i fronti d'onda di uguale fase dell'altra onda prima della riflessione, la descrizione dei campi risulta autoconsistente e può essere estesa a tutta la lastra, dopo un numero arbitrario di riflessioni. Troveremo dei modi TE se la polarizzazione delle due onde piane è perpendicolare al piano d'incidenza (piano xz), dei modi TM se invece la polarizzazione è parallela ad esso.

Procedendo con l'analisi modale, consideriamo ad esempio i modi confinati TE simmetrici, derivanti quindi dal potenziale $\Phi''(x)$. Per la simmetria scelta, assumiamo $\Phi''(-x) = -\Phi''(x)$ ¹⁷ e ci limitiamo a determinare $\Phi''(x)$ solo per $x \geq 0$. Per quanto visto, se poniamo $k_0 = \omega/c$ e $\gamma = j\beta$, le equazioni da

17

dato che campi modali sono collegati alle derivate dei potenziali, affinché i campi modali siano simmetrici è necessario che i potenziali siano antisimmetrici e viceversa.

risolvere sono ¹⁸ :

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq x < d/2 \text{ (nel dielettrico)} & d/2 < x \text{ (in aria)} \\
 \frac{d^2 \Phi''(x)}{dx^2} + (\underbrace{k_o^2 n^2 - \beta^2}_{k_x^2}) \Phi''(x) = 0 & \frac{d^2 \Phi''(x)}{dx^2} + (\underbrace{k_o^2 - \beta^2}_{-\alpha_x^2}) \Phi''(x) = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi''(x) = 0 & \text{condizione all'infinito per i modi confinati} \\
 \lim_{x \rightarrow d/2^-} \frac{d\Phi''(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow d/2^+} \frac{d\Phi''(x)}{dx} & \text{continuità di } \vec{E}_T \\
 \lim_{x \rightarrow d/2^-} k_x^2 \Phi''(x) = \lim_{x \rightarrow d/2^+} -\alpha_x^2 \Phi''(x) & \text{continuità di } H_z
 \end{array}$$

Le soluzioni sono:

$$\Phi''(x) = A \sin(k_x x) \quad (0 \leq x < d/2) \quad \Phi''(x) = B e^{-\alpha_x (x-d/2)} \quad (d/2 < x)$$

con le condizioni

$$\text{Re}(\alpha_x) > 0$$

$$A k_x \cos(k_x d/2) = -\alpha_x B$$

$$A k_x^2 \sin(k_x d/2) = -\alpha_x^2 B$$

queste condizioni sono compatibili se ¹⁹

$$k_x \tan(k_x d/2) = \alpha_x = \sqrt{k_o^2 (n^2 - 1) - k_x^2} \tag{15}$$

Si può verificare che l'equazione (15), per ogni valore assegnato di k_o , ammette soluzioni solo con k_x reale, in modulo inferiore a $k_o \sqrt{n^2 - 1}$, per cui α_x risulta reale positivo.

Dal diagramma si può verificare che le soluzioni sono in numero finito: il numero di soluzioni è uguale al numero di rami della funzione $k_x \tan(k_x d/2)$ che intersecano l'asse k_x in punti di ascissa compresa tra zero e $k_o \sqrt{n^2 - 1}$. Il primo ramo interseca l'asse k_x nell'origine per cui per qualunque valore di k_o si ha sempre almeno una soluzione.

Ogni volta che, all'aumentare di k_o , il valore di $k_o \sqrt{n^2 - 1}$ supera un multiplo di $k_1 = 2\pi/d$, una nuova soluzione si aggiunge per cui il numero di soluzioni è:

$$P = 1 + \text{int} \left(k_o \sqrt{n^2 - 1} / k_1 \right)$$

Per $k_x = p k_1$, si trova $\alpha_x = 0$ (non accettabile perché Φ'' non va a zero all'infinito) e $\beta = k_o$. La pulsazione di taglio del p -esimo modo ($0 \leq p \leq P$) è pertanto:

$$\omega_p = p \omega_1 \quad \omega_1 = \frac{2\pi c}{d \sqrt{n^2 - 1}}$$

Per $\omega > \omega_p$, α_x è positivo $p k_1 < k_x < k_o \sqrt{n^2 - 1}$ e dalle relazioni di definizione di α_x e k_x si trova

$$\beta = \sqrt{k_o^2 + \alpha_x^2} > k_o = \frac{\omega}{c} \quad \beta = \sqrt{k_o^2 n^2 - k_x^2} < k_o n = \frac{\omega}{c} n$$

¹⁸

nel caso in cui la sezione della struttura non è limitata e il problema della determinazione dei potenziali è monodimensionale, le condizioni all'infinito sono:

- che i potenziali all'infinito siano limitati, per i modi irraggianti
- che i potenziali all'infinito tendano a zero, per i modi confinati

¹⁹

l'espressione di α_x in funzione di k_o e k_x si trova eliminando β^2 dalle definizioni $k_x^2 = k_o^2 n^2 - \beta^2$ e $\alpha_x^2 = \beta^2 - k_o^2$.

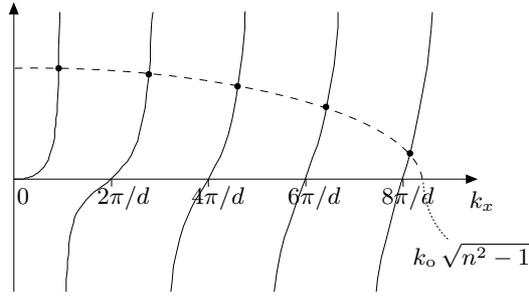


diagramma qualitativo dei primi rami della funzione $k_x \tan(k_x d/2)$ (linea continua) e della funzione $\sqrt{k_o^2(n^2-1) - k_x^2}$ (linea tratteggiata).

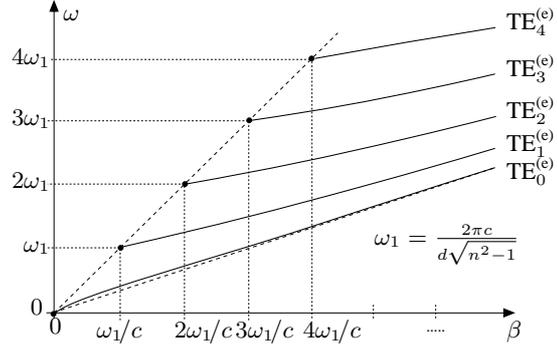


diagramma di dispersione dei primi modi TE simmetrici di una lastra dielettrica.

La velocità di fase con cui il modo si propaga $v_f = \omega/\beta$ risulta sempre compresa tra c/n e c , cioè tra le velocità di fase con cui si propagano le onde piane uniformi nei due mezzi che costituiscono la struttura. Il fatto che β risulti sempre maggiore di ω/c verifica il fatto che i modi confinati sono onde lente. L'interpretazione che coinvolge le due onde piane uniformi all'interno del dielettrico deriva semplicemente dalla riscrittura di $\sin k_x x$ nell'espressione di $\Phi''(x)$ come somma di due esponenziali. Calcolando i campi \vec{E} e \vec{H} mediante le espressioni (5)-(8) assumendo $Z I(z) = V(z) = e^{-j\beta z}$ e tenendo conto delle relazioni tra i vari parametri, si trova:

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{u}_y \frac{A k_x}{2} e^{-jk_o n \vec{u}' \cdot \vec{r}}}_{\vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}_y \frac{A k_x}{2} e^{-jk_o n \vec{u}'' \cdot \vec{r}}}_{\vec{E}''}$$

$$\vec{H} = \underbrace{\frac{n}{\eta_o} \vec{u}' \times \vec{E}'}_{\vec{H}'} + \underbrace{\frac{n}{\eta_o} \vec{u}'' \times \vec{E}''}_{\vec{H}''}$$

dove η_o è l'impedenza intrinseca del vuoto e $\vec{r} = \vec{u}_x x + \vec{u}_y y + \vec{u}_z z$ è il vettore di posizione del generico punto nel dielettrico. È evidente che $\vec{E}' \vec{H}'$ e $\vec{E}'' \vec{H}''$ sono i campi di due onde piane uniformi che si propagano dentro il dielettrico nelle direzioni definite dai versori

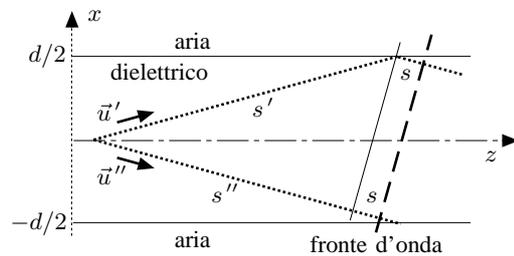
$$\vec{u}' = \frac{k_x \vec{u}_x + \beta \vec{u}_z}{k_o n} \quad \vec{u}'' = \frac{-k_x \vec{u}_x + \beta \vec{u}_z}{k_o n}$$

La tangente dell'angolo d'incidenza sulle interfacce è ²⁰

$$\tan \vartheta_i = \frac{\beta}{k_x} = \frac{\sqrt{1 + n^2 \tan^2(k_x d/2)}}{\sqrt{n^2 - 1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = \tan \vartheta_L$$

si ritrova quindi che l'angolo d'incidenza sulle interfacce dielettrico-aria supera sempre l'angolo limite ($\vartheta_i > \vartheta_L$). Allo stesso modo si verifica anche che i fronti d'onda dell'onda riflessa coincidono con i fronti d'onda di uguale fase dell'altra onda prima della riflessione. Visto infatti che, per simmetria, i campi delle due onde sono in fase in qualunque punto dell'asse z , si verifica che le variazioni di fase nei due cammini, indicati nella figura accanto sono uguali

$$-k_o n s' + \arg(\Gamma_{\perp}) - k_o n s = -k_o n (s'' + s)$$



20

dalle defnizioni di k_x, α_x e dalla condizione (15) si trova anche $\beta \sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{k_x^2 + n^2 \alpha_x^2} = k_x \sqrt{1 + n^2 \tan^2 k_x d/2}$

Infatti, tenendo conto della condizione (15), risulta ²¹ $\arg(\Gamma_{\perp}) = k_0 n (s' - s'') = k_x d$

Attenuazione nelle guide d'onda reali

I risultati ottenuti con l'approssimazione di dielettrici e conduttori ideali descrivono l'andamento dei campi elettromagnetici attraverso i vettori modali (reali) e prevedono che se la frequenza di taglio del modo considerato è inferiore alla frequenza di lavoro, il modo si propaga senza attenuazione, l'impedenza modale è reale e le componenti assiali dei campi sono in quadratura rispetto a quelle trasversali. Tali risultati normalmente approssimano in modo più che soddisfacente l'andamento dei campi modali a frequenze non troppo vicine alla frequenza di taglio, se ci si limita a verificare la consistenza dei campi su distanze di poche lunghezze d'onda.

Se invece si vuole verificare la congruenza dei campi reali con quelli previsti dalla teoria su distanze molto maggiori della lunghezza d'onda, allora si trova che i campi a grande distanza, pur continuando ad avere la conformazione prevista, possono avere sia la fase che l'ampiezza significativamente diverse da quelle previste dalla teoria sviluppata nel caso ideale.

Questo fatto è del tutto normale, dato che, per quanto piccola sia la costante di attenuazione nel caso reale (nel caso ideale è zero) e per quanto piccolo sia l'errore $\Delta\beta = \beta_{reale} - \beta_{ideale}$, sulla costante di fase, purché tali quantità non siano identicamente nulle, è sempre possibile trovare una distanza d sufficientemente grande per cui $e^{-\alpha d}$ e $e^{-j\Delta\beta d}$ differiscono da 1 in modo significativo.

Avere una stima più accurata della fase di un segnale su una lunga distanza è un problema molto complicato. Fortunatamente, sia nel caso siamo interessati semplicemente a trasportare potenza a radiofrequenza su grandi distanze, sia nel caso siamo interessati alla trasmissione di segnali contenenti un'informazione, la fase assoluta del segnale, quasi sempre è priva di alcun interesse, per cui non ce occupiamo.

Più semplice, invece, e più importante è avere una stima dell'attenuazione nel caso reale del campo elettromagnetico su grande distanza. Infatti, se assumiamo che nel caso reale i campi modali si propagano con una costante di attenuazione α e consideriamo una sola onda che si propaga nella direzione positiva di z , otteniamo che la potenza trasportata nella generica sezione z è data da:

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$$

dove P_0 è la potenza trasportata nella sezione $z = 0$. Derivando rispetto a z otteniamo:

$$-\frac{dP(z)}{dz} = 2\alpha P(z)$$

questa relazione dice che il decremento di potenza $-dP(z)$ in un tratto di guida di lunghezza dz uguaglia la potenza trasportata nella stessa sezione $P(z)$ moltiplicata per $2\alpha dz$, qualunque sia la sezione di riferimento. Facendo il bilancio energetico su un tratto di guida compreso tra z e $z + dz$, si trova che tale decremento deve necessariamente essere uguale alla potenza totale dissipata all'interno del tratto di guida a causa sia della non perfetta conducibilità dei conduttori, sia della non idealità dei dielettrici. Per ogni valore di z deve quindi essere

$$2\alpha P dz = dP_c + dP_d$$

²¹

dall'espressione del coefficiente di riflessione, risulta: $\arg(\Gamma_{\perp}) = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \vartheta_i - \sin^2 \vartheta_L}}{\cos \vartheta_i} \right)$,

essendo: $\sin \vartheta_i = \beta / (k_0 n)$, $\cos \vartheta_i = k_x / (k_0 n)$, $\sin \vartheta_L = 1/n$, si trova

$$\frac{\sqrt{\sin^2 \vartheta_i - \sin^2 \vartheta_L}}{\cos \vartheta_i} = \frac{k_0 n \sqrt{\beta^2 - k_0^2}}{k_x k_0 n} = \frac{\alpha_x}{k_x} = \tan(k_x d/2) \quad \Rightarrow \quad \arg(\Gamma_{\perp}) = k_x d$$

analogamente si trova

$$s' = d/2 \sqrt{1 + \tan^2 \vartheta_i} = \frac{k_0 n d}{2 k_x} \quad s'' = s' \cos(2(\pi/2 - \vartheta_i)) = -s' \cos(2\vartheta_i) = s'(1 - 2 \cos^2 \vartheta_i)$$

da cui: $k_0 n (s' - s'') = k_0 n s' 2 \cos^2 \vartheta_i = k_x d$.

dove dP_c e dP_d rappresentano le potenze dissipate rispettivamente nei conduttori e nei dielettrici interni al tratto di guida compreso tra z e $z + dz$. Assumendo che siano verificate le condizioni relative all'effetto pelle, e indicando con R_s la resistenza superficiale dei conduttori, risulta

$$dP_c = \frac{1}{2} dz \int_c R_s |\vec{J}_s|^2 dc$$

dove $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}$ è la densità superficiale di corrente. Allo stesso modo, assumendo che il dielettrico (non necessariamente omogeneo) all'interno della struttura sia a bassa perdita, e ponendo $\epsilon_o \epsilon'' \approx \epsilon \tan \theta_e$, $\mu_o \mu'' \approx \mu \tan \theta_m$ dove ϵ e μ sono i moduli della permittività dielettrica e permeabilità magnetica (praticamente coincidenti con le rispettive parti reali) e θ_e e θ_m sono gli angoli di perdita elettrico e magnetico, risulta:

$$dP_d = \frac{1}{2} \omega dz \int_S (\epsilon \tan \theta_e |E|^2 + \mu \tan \theta_m |H|^2) ds$$

Pertanto, assumendo che all'interno del tratto infinitesimo di guida considerato, i campi reali differiscano in maniera del tutto trascurabile da quelli previsti dall'analisi sviluppata per il caso ideale, è possibile valutare queste quantità in modo *perturbativo*, identificando \vec{E} e \vec{H} con le espressioni relative al caso ideale e ricavare

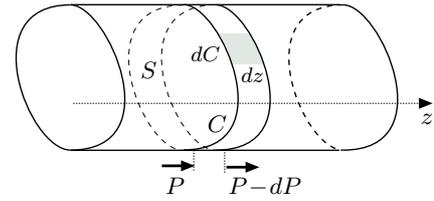
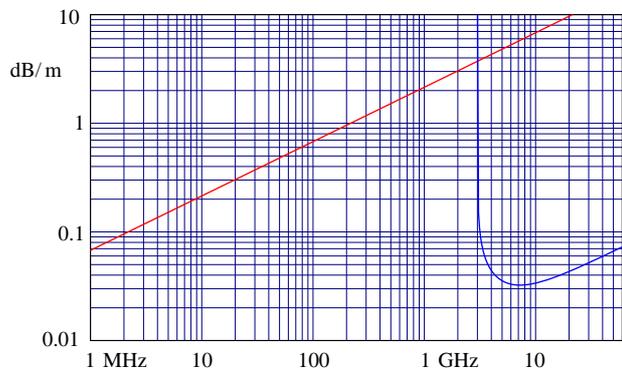
$$\alpha = \frac{1}{2P} \left(\frac{dP_c}{dz} + \frac{dP_d}{dz} \right) = \frac{\int_C R_s |\vec{H}|^2 dc + \omega \int_S (\epsilon \tan \theta_e |E|^2 + \mu \tan \theta_m |H|^2) ds}{2 \int_S \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z ds}$$

Dall'espressione, è evidente che α , essendo il rapporto tra due forme quadratiche dei campi nella stessa sezione, non dipende dalla tensione o corrente modale, ma solo dalla "forma" dei campi e dalle caratteristiche dei materiali che costituiscono la struttura.

Nel diagramma a fianco è riportato l'andamento con la frequenza dell'attenuazione del modo TEM in un tipico cavo coassiale e del modo TE₁₀ in una guida rettangolare in aria.

Dal diagramma si vede che l'attenuazione del modo TEM in scala logaritmica è praticamente lineare con la frequenza e rispecchia l'andamento della resistenza superficiale: nella banda di frequenze considerata nel diagramma, l'attenuazione è dovuta principalmente alle perdite ohmiche sui conduttori. L'attenuazione del modo TE₁₀ (che è definita solo al di sopra della frequenza di taglio) è dovuta unicamente alle perdite ohmiche sui conduttori, dato che il dielettrico della guida è l'aria. Dal diagramma si vede che l'attenuazione è molto elevata per frequenze molto prossime alla frequenza di taglio (3 GHz), decresce molto rapidamente all'aumentare della frequenza fino a raggiungere un minimo ad una frequenza circa doppia della frequenza di taglio, per poi risalire quasi linearmente all'aumentare della frequenza.

Da questo diagramma si capisce perché nella banda delle microonde è più conveniente l'impiego delle guide d'onda rispetto a quello dei cavi coassiali; si capisce anche perché la banda di utilizzo di una guida d'onda ha come limite inferiore una frequenza leggermente maggiore della frequenza di taglio.



[1] G. Conciauro, L. Perreggini: *Fondamenti di onde elettromagnetiche*, McGraw-Hill, Milano, 2003.

[2] G. Conciauro: *Introduzione alle onde elettromagnetiche*, McGraw-Hill, Milano, 1993.

[3] G. Conciauro: *Appunti sulle guide dielettriche e Appunti sulle fibre ottiche*, disponibili tra gli appunti del corso (disattivato) di "Complementi di campi elettromagnetici" su <http://microwave.unipv.it/>.