

**propagazione in sistemi dispersivi**

Consideriamo il segnale  $f_o(t)$  ed il suo spettro  $F_o(\omega)$ , collegati tra loro dalla trasformata di Fourier e dalla sua inversa:

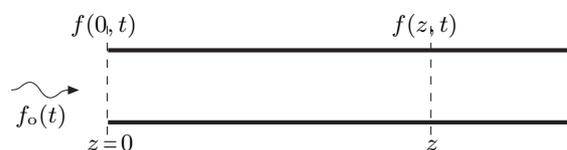
$$f_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_o(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F_o(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t) e^{-j\omega t} dt$$

La funzione  $f_o(t)$ , dato che descrive un fenomeno fisico, deve essere reale. Questo implica che  $F_o(\omega)$  deve essere tale per cui  $F_o(-\omega) = F_o^*(\omega)$ . Per questa proprietà si può anche scrivere <sup>1</sup>

$$f_o(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\infty} F_o(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)$$

Consideriamo un sistema di trasmissione (linea di trasmissione, guida d'onda, fibra ottica, ...) che chiameremo semplicemente linea di trasmissione, e indichiamo con  $z$  la coordinata lungo il suo asse. Supponiamo che  $f_o(t)$  sia il segnale in ingresso alla linea di trasmissione, cioè il segnale nella sezione  $z = 0$ .



Ci chiediamo qual'è l'andamento temporale del segnale nella generica sezione  $z > 0$ , supponendo che sia noto l'andamento  $\gamma = \gamma(\omega)$  della costante di propagazione della linea al variare della frequenza. Indicando con  $f(z, t)$  il segnale nel dominio del tempo nella generica sezione  $z$ , e con  $F(z, \omega)$  il suo spettro, evidentemente risulta <sup>2</sup>

$$f(0, t) = f_o(t)$$

$$f(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\infty} F(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega \right)$$

$$F(z, \omega) = F(0, \omega) e^{-\gamma(\omega)z} = F_o(\omega) e^{-\gamma(\omega)z}$$

Pertanto risulta

$$f(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\infty} F_o(\omega) e^{j\omega t - \gamma(\omega)z} d\omega \right)$$

---

<sup>1</sup>

$$f_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 F_o(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} F_o(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{\infty} F_o(-\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} F_o(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (F_o^*(\omega) e^{-j\omega t} + F_o(\omega) e^{j\omega t}) d\omega$$

---

<sup>2</sup>

anche  $f(z, t)$ , rappresentando un fenomeno fisico, deve essere reale per qualunque  $z$ , per cui deve essere ancora  $F(z, -\omega) = F^*(z, \omega)$ , che è verificato se

$$\gamma(-\omega) = \gamma^*(\omega)$$

## 1. linea non dispersiva

Se la linea è non dispersiva, la costante di propagazione  $\gamma(\omega)$  è puramente immaginaria<sup>3</sup> e proporzionale ad  $\omega$ :

$$\gamma(\omega) = j\omega/v_f$$

dove  $v_f$  è la velocità di fase della linea, dipendente esclusivamente dalle caratteristiche della linea, ma indipendente da  $\omega$ . Risulta:

$$\begin{aligned} f(z, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty F_o(\omega) e^{j\omega(t-z/v_f)} d\omega \right) \\ &= f_o(t - z/v_f) \end{aligned}$$

Il segnale nella generica sezione  $z$  riproduce esattamente l'andamento che aveva nella sezione  $z = 0$ , con un ritardo pari a  $z/v_f$ . Il segnale cioè si propaga senza attenuazione, con velocità pari alla velocità di fase.

## 2. segnale a banda limitata in una linea dispersiva

Se il segnale  $f_o$  è a banda limitata, cioè il suo spettro differisce da zero solo nella banda compresa tra  $\omega_o - \Delta\omega$  e  $\omega_o + \Delta\omega$  con  $\Delta\omega \ll \omega_o$ <sup>4</sup>, nel calcolo della trasformata di Fourier si può limitare l'integrale alla banda del segnale:

$$\begin{aligned} f_o(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( \int_{\omega_o - \Delta\omega}^{\omega_o + \Delta\omega} F_o(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( e^{j\omega_o t} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} F_o(\omega_o + \xi) e^{j\xi t} d\xi \right) \end{aligned}$$

dove si è posto  $\xi = \omega - \omega_o$ .

Mettendo in evidenza il modulo e la fase dell'ultimo integrale:

$$g(t) e^{j\chi(t)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} F_o(\omega_o + \xi) e^{j\xi t} d\xi$$

Si può anche scrivere

$$f_o(t) = g(t) \cos(\omega_o t + \chi(t))$$

dove  $g(t)$ , che ha il significato di *inviluppo del segnale*, e  $\chi(t)$ , che descrive le variazioni della fase del segnale, sono funzioni lentamente variabili nel tempo, le cui variazioni cioè sono sensibili solo su tempi lunghi rispetto al periodo  $T = 2\pi/\omega_o$  relativo alla frequenza centrale della banda.

Per quanto riguarda il segnale nella generica sezione  $z$ , considerando una linea di trasmissione dispersiva, cioè il caso in cui  $\gamma(\omega)$  non è semplicemente immaginario e proporzionale a  $\omega$ , risulta:

$$f(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( \int_{\omega_o - \Delta\omega}^{\omega_o + \Delta\omega} F_o(\omega) e^{j\omega t - \gamma(\omega)z} d\omega \right)$$

<sup>3</sup>

per approssimare il comportamento di sistemi di trasmissione reali, è possibile, in alcuni casi, assumere che la costante di propagazione abbia una parte reale (costante di attenuazione) non nulla, pur continuando a considerare trascurabili gli effetti della dispersione di fase.

<sup>4</sup>

è ben noto che la densità spettrale dei segnali che si ottengono modulando in ampiezza, frequenza o fase una portante con segnali d'informazione a banda limitata è più o meno concentrata attorno alla pulsazione della portante.

Mettendo in evidenza i primi termini dello sviluppo in serie di  $\gamma(\omega)$  attorno a  $\omega_0$

$$\gamma(\omega) = \gamma(\omega_0) + \left. \frac{\partial \gamma(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots$$

si può porre:

$$\gamma(\omega) = \alpha_0 + j \frac{\omega_0}{v_f} + j \frac{\omega - \omega_0}{v_g} + \gamma_r(\omega)$$

dove:

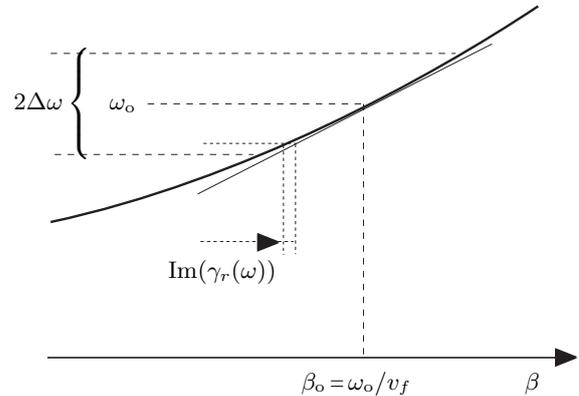
$\alpha_0 = \text{Re}(\gamma(\omega_0))$  è la *costante di attenuazione* della linea alla pulsazione  $\omega_0$

$\frac{\omega_0}{v_f} = \text{Im}(\gamma(\omega_0))$  è la costante di fase alla pulsazione  $\omega_0$  ( $v_f$  è la *velocità di fase* alla stessa pulsazione)

$\frac{1}{v_g} = \text{Im} \left( \left. \frac{\partial \gamma(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \right)$   $v_g$  è, per definizione, la *velocità di gruppo* alla pulsazione  $\omega_0$   
 $\gamma_r(\omega)$  è quello che resta a  $\gamma(\omega)$  dopo l'estrazione dei termini messi in evidenza

La disparità di trattamento tra la parte reale (un solo termine estratto) e la parte immaginaria (due termini estratti) dipende dal fatto che le linee di trasmissione comunemente impiegate sono a basse perdite e quindi la parte reale è generalmente molto più piccola della parte immaginaria.

È chiaro che al centro della banda d'interesse il termine residuo è nullo  $\gamma_r(\omega_0) = 0$ , e che, se la banda è sufficientemente stretta e la dispersione sufficientemente regolare, il modulo di  $\gamma_r$  è molto piccolo rispetto al modulo degli altri termini messi in evidenza entro tutta la banda d'interesse.



Con queste assunzioni, il termine  $j\omega t - \gamma(\omega)z$  viene posto nella forma <sup>5</sup>

$$j\omega t - \gamma(\omega)z = -\alpha_0 z + j\omega_0(t - z/v_f) + j(\omega - \omega_0)(t - z/v_g) - \gamma_r(\omega) z$$

per cui risulta

$$\begin{aligned} f(z, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\alpha_0 z} \text{Re} \left( e^{j\omega_0(t-z/v_f)} \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} (F_0(\omega) e^{-\gamma_r(\omega)z}) e^{j(\omega-\omega_0)(t-z/v_g)} d\omega \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\alpha_0 z} \text{Re} \left( e^{j\omega_0(t-z/v_f)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} (F_0(\omega_0 + \xi) e^{-\gamma_r(\omega_0+\xi)z}) e^{j\xi(t-z/v_g)} d\xi \right) \end{aligned}$$

Per valori non troppo grandi di  $z$ , per cui il valore massimo di  $|\gamma_r(\omega_0 + \xi)| z$ , per  $\xi$  compreso nella banda, è molto piccolo rispetto a 1, risulta

5

$$\begin{aligned} j\omega t - \gamma z &= j\omega t - \alpha_0 z - j\omega_0 z/v_f - j z/v_g (\omega - \omega_0) - \gamma_r(\omega) z \\ &= j(\omega - \omega_0)t + j\omega_0 t - \alpha_0 z - j\omega_0 z/v_f - j z/v_g (\omega - \omega_0) - \gamma_r(\omega) z \\ &= -\alpha_0 z + j\omega_0(t - z/v_f) + j(\omega - \omega_0)(t - z/v_g) - \gamma_r(\omega) z \end{aligned}$$

$$F_o(\omega_o + \xi) e^{-\gamma_r(\omega_o + \xi)z} \approx F_o(\omega_o + \xi)$$

cioè lo spettro del segnale nella sezione  $z$  è praticamente uguale allo spettro nella sezione  $z = 0$ , con questa approssimazione risulta

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} F_o(\omega_o + \xi) \underbrace{e^{-\gamma_r(\omega_o + \xi)z} e^{j\xi(t-z/v_g)}}_{\approx 1} d\xi \approx g(t - z/v_g) e^{j\chi(t-z/v_g)}$$

e

$$\begin{aligned} f(z, t) &\approx e^{-\alpha_o z} \operatorname{Re} \left( g(t - z/v_g) e^{j\omega_o(t-z/v_f)} e^{j\chi(t-z/v_g)} \right) \\ &= e^{-\alpha_o z} g(t - z/v_g) \cos(\omega_o(t - z/v_f) + \chi(t - z/v_g)) \end{aligned}$$

questa espressione mostra che :

- il segnale è attenuato del fattore  $e^{-\alpha_o z}$ ,
- l'involuppo del segnale in  $z$  ha la stessa forma che aveva in  $z = 0$ , e ha un ritardo pari a  $z/v_g$
- la fase del segnale ha un ritardo praticamente uguale a  $z/v_f$  : infatti il termine dipendente da  $\chi$  dà un contributo trascurabile dato che  $\chi$  è una funzione lentamente variabile <sup>6</sup>

Si trova pertanto che l'involuppo del segnale si sposta con la velocità di gruppo  $v_g$ , mentre la fase del segnale si sposta ancora con la velocità di fase  $v_f$ .

È chiaro però che, a meno che  $\gamma_r(\omega)$  non sia esattamente nullo entro la banda, questa rappresentazione non può essere valida per qualunque  $z$ , perché si troveranno sempre valori di  $z$  sufficientemente grandi per cui lo spettro del segnale risulta significativamente diverso da quello in  $z = 0$ :

$$e^{-\gamma_r(\omega_o + \xi)z} \neq 1 \quad - \Delta\omega < \xi < \Delta\omega$$

In queste condizioni le approssimazioni fatte non sono accettabili, e quindi, per propagazione su grandi distanze, ci si deve aspettare sempre una degradazione del segnale.

6

più dettagliatamente si ha che:

$$\begin{aligned} \text{la fase istantanea del segnale in } z = 0 &\text{ è } \varphi(0) = \omega_o t + \chi(t) \\ \text{la fase istantanea nella generica sezione } z &\text{ è } \varphi(z) = \omega_o(t - z/v_f) + \chi(t - z/v_g) \\ &\approx \omega_o t - \omega_o z/v_f + \chi(t) - \chi'(t) z/v_g + \dots \end{aligned}$$

dove si è considerato il primo termine dello sviluppo in serie di  $\chi(t - z/v_g)$  rispetto a  $z$  e si è indicata con  $\chi'(t)$  la derivata di  $\chi(t)$  rispetto all'argomento. Risulta quindi

$$\varphi(z) \approx \varphi(0) - \omega_o \frac{z}{v_f} \left( 1 + \frac{v_f}{2\pi v_g} \chi'(t) T + \dots \right)$$

ma il termine contenente  $\chi'(t) T$  è trascurabile rispetto all'unità, dato che  $\chi'(t) T$  rappresenta la variazione di  $\chi$  in un periodo, e  $\chi$  è lentamente variabile. Risulta pertanto  $\varphi(z) \approx \varphi(0) - \omega_o z/v_f$

**esempio: impulso gaussiano**

Si sa che per  $\text{Re}(a^2) > 0$ , vale la seguente relazione:

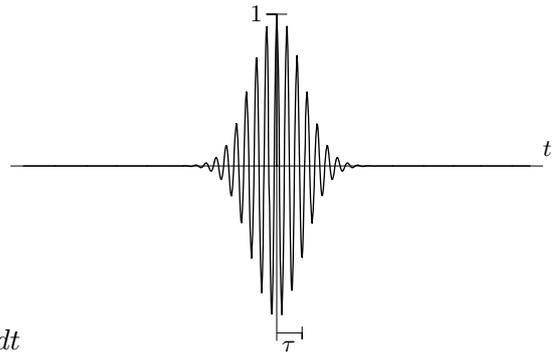
$$G(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} a^2 x^2} e^{j b x} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a^2}} e^{-\frac{1}{2} b^2 a^{-2}} \quad (1)$$

Consideriamo un impulso gaussiano alla pulsazione  $\omega_0$  di ampiezza unitaria e deviazione standard  $\tau$  :

$$f_0(t) = e^{-\frac{1}{2} t^2 \tau^{-2}} \cos \omega_0 t$$

Il periodo della radiofrequenza è  $T = 2\pi/\omega_0$  e, se assumiamo di poter trascurare valori inferiori a un centesimo del valore massimo, dato che  $e^{-x^2/2} \approx 1/100$  per  $x \approx 3$ , possiamo dire che la durata dell'impulso è circa  $6\tau$ .

La trasformata di Fourier di  $f_0$  è:



$$\begin{aligned} F_0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2 \tau^{-2}} \left( e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{-j(\omega_0 + \omega)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( G(\tau^{-1}, \omega_0 - \omega) + G(\tau^{-1}, -\omega_0 - \omega) \right) \\ &= \underbrace{\frac{\tau}{2} e^{-\frac{1}{2} \tau^2 (\omega - \omega_0)^2}}_{F_1(\omega)} + \underbrace{\frac{\tau}{2} e^{-\frac{1}{2} \tau^2 (\omega + \omega_0)^2}}_{F_1(-\omega)} \end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) + F_1(-\omega)) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \end{aligned}$$

formalmente identica all'espressione generale, con l'unica differenza che l'integrale è ancora esteso tra  $-\infty$  e  $\infty$ , anziché tra 0 e  $\infty$  <sup>7</sup>.

Si vede che un impulso gaussiano, a rigore, non è un segnale a banda limitata, ma i valori significativi dello spettro sono concentrati attorno a  $\pm \omega_0$  e l'ampiezza spettrale decade molto rapidamente per  $\omega$  che si discosta da questi valori. Con la stessa approssimazione usata per definire la durata dell'impulso, possiamo dire che la larghezza di banda (in  $\omega$ ) del segnale è circa  $6/\tau$ , così che la larghezza di banda relativa è

$$\frac{6}{\tau \omega_0} = \frac{6 T}{2\pi \tau} \approx \frac{T}{\tau}$$

Ponendo

$$j\omega t - \gamma(\omega)z = -\alpha_0 z + j\omega_0(t - z/v_f) + j(\omega - \omega_0)(t - z/v_g) + \gamma(\omega - \omega_0)$$

<sup>7</sup>

ovviamente per rientrare nella forma generale sarebbe possibile trascurare le "code" delle gaussiane ma, dato che conosciamo l'integrale (1), non faremo nessuna approssimazione né sul segnale, né sul suo spettro.

si ottiene

$$f(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\alpha_0 z} \operatorname{Re} \left( e^{j\omega_0(t-z/v_f)} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F_1(\omega) e^{-\gamma_r(\omega)z} \right) e^{j(\omega-\omega_0)(t-z/v_g)} d\omega \right)$$

Se assumiamo che il primo termine immaginario trascurato nello sviluppo in serie sia significativo per valutare l'effetto del termine residuo, possiamo approssimare  $\gamma_r(\omega)$  con esso e porre:

$$\gamma_r(\omega) \approx \frac{j}{2} \beta_2 (\omega - \omega_0)^2 \quad \beta_2 = \operatorname{Im} \left( \frac{\partial^2 \gamma(\omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \right)$$

otteniamo

$$F_1(\omega) e^{-\gamma_r(\omega)z} \approx \frac{\tau}{2} e^{-\frac{1}{2}(\tau^2 + j\beta_2 z)(\omega - \omega_0)^2} = \frac{\tau}{2} e^{-\frac{1}{2}\tau^2(\omega - \omega_0)^2(1 + j\delta z)}$$

dove  $\delta = \beta_2 / \tau^2$ . Otteniamo inoltre <sup>8</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( F_1(\omega) e^{-\gamma_r(\omega)z} \right) e^{j(\omega-\omega_0)(t-z/v_g)} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2\tau^2(1+\delta^2 z^2)}}}{\sqrt[4]{1+\delta^2 z^2}} e^{j\left(\frac{(t-z/v_g)^2 \delta z}{2\tau^2(1+\delta^2 z^2)} - \frac{1}{2} \arctan(\delta z)\right)}$$

e quindi

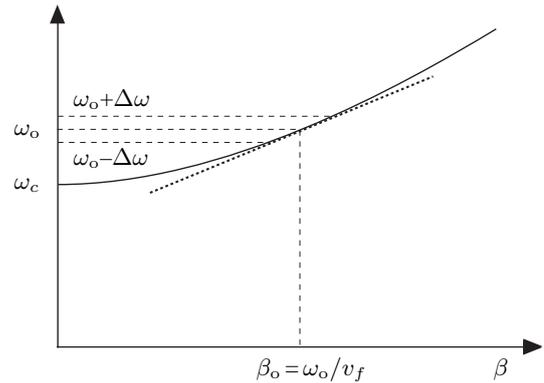
$$f(z, t) = e^{-\alpha_0 z} \frac{e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2\tau^2(1+\delta^2 z^2)}}}{\sqrt[4]{1+\delta^2 z^2}} \cos \left( \omega_0(t-z/v_f) + \frac{(t-z/v_g)^2 \delta z}{2\tau^2(1+\delta^2 z^2)} - \frac{1}{2} \arctan(\delta z) \right)$$

solo finché  $\delta z \ll 1$  l'involuppo del segnale ha praticamente la stessa forma che aveva in  $z = 0$ ; quando  $\delta z$  diventa confrontabile con 1, la gaussiana si allarga ( $\tau^2$  viene sostituito da  $\tau^2(1 + \delta^2 z^2)$ ), subentra l'ulteriore fattore di attenuazione  $(1 + \delta^2 z^2)^{-1/4}$  e anche la velocità con cui si muove la fase differisce significativamente da  $v_f$ .

Ad esempio, se assumiamo che la dispersione sia quella tipica di un modo di una guida in aria di pulsazione di taglio  $\omega_c$ :

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

e assumiamo  $\omega_0 = 1.5 \omega_c$  e  $\tau = 10 T$  in modo che la banda relativa del segnale sia del 10%, troviamo:



8

$$\frac{\tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2(1+j\delta z)\xi^2} e^{j(t-z/v_g)\xi} d\xi = \frac{\tau}{2} G\left(\tau\sqrt{1+j\delta z}, t-z/v_g\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+j\delta z}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2\tau^2(1+j\delta z)}}$$

risulta:

$$\sqrt{1+j\delta z} = \sqrt[4]{1+\delta^2 z^2} e^{j\frac{1}{2} \arctan(\delta z)}$$

$$\frac{1}{1+j\delta z} = \frac{1-j\delta z}{1+\delta^2 z^2}$$

per cui, mettendo in evidenza il modulo e la fase, l'integrale assume la forma riportata.

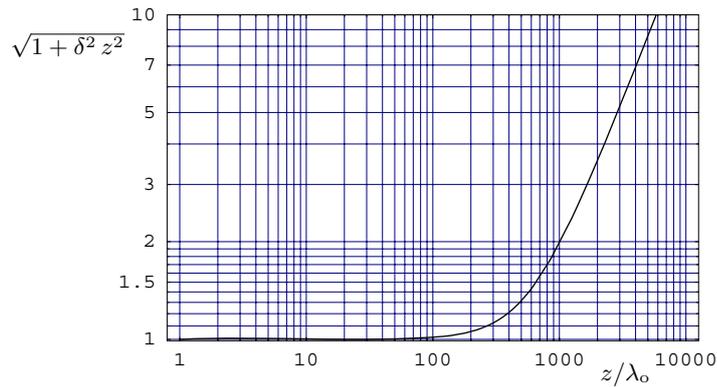
$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega_0^2}} \approx 1.34 c$$

$$v_g = \frac{c^2}{v_f} \approx 0.75 c$$

$$\beta_2 = -\frac{\omega_c^2}{2 c \omega_0^3} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^{-3/2} \approx -0.17 T^2/\lambda_0$$

$$\delta = \frac{\beta_2}{\tau^2} \approx -1.7 \cdot 10^{-3}/\lambda_0$$

dove  $\lambda_0 = 2 \pi c/\omega_0$  è la lunghezza d'onda in aria delle onde piane uniformi a centro banda.



Dal diagramma, che riporta l'andamento di  $\sqrt{1 + \delta^2 z^2}$  in funzione di  $z/\lambda_0$ , si deduce che la deviazione standard dell'impulso è praticamente uguale a  $\tau$ , cioè il valore che ha in  $z = 0$ , fino a  $z \approx 100 \lambda_0$ , per  $z = 10^3 \lambda_0$  vale circa  $2\tau$ , per poi crescere molto rapidamente per valori ancora maggiori di  $z$ . Nelle figure seguenti è riportato l'andamento temporale (qualitativo) dell'impulso che si vede nelle sezioni  $z = 1000\lambda_0$  e  $z = 2000\lambda_0$ , nell'ipotesi di assenza di attenuazione.

