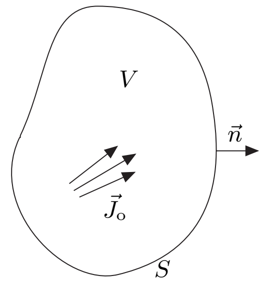
Teorema di unicità per campi monocromatici e condizioni al contorno

Nell'analisi dei fenomeni fisici macroscopici è naturale ragionare in termini causali, cioè associare in maniera univoca alcuni fenomeni (*cause*) con altri (*effetti*) attribuendo al verificarsi degli uni, il sicuro avvenimento anche degli altri. Questo deriva dal fatto che un ben determinato fenomeno che consideriamo causa, a parità delle condizioni ambientali in cui si verifica, ha sempre lo stesso effetto.
In termini di approccio analitico, questo implica che un determinato problema, una volta assegnate le sorgenti (cause) e imposte delle condizioni che tengono conto dell'ambiente in cui esse agiscono, deve avere un'unica soluzione.
È importante avere dei teoremi che attestano l'unicità della soluzione perchè ci dicono quali informazioni sono necessarie per ottenere la soluzione stessa. La relazione di causalità permette non solo di calcolare in modo univoco l'effetto una volta che siano date le sorgenti, ma anche di dedurre le sorgenti, se è noto l'effetto.

In ambito elettromagnetico, consideriamo una regione V, delimitata dalla superficie S, supponiamo che il mezzo all'interno di V, non necessariamente omogeneo [1], sia lineare, stazionario, isotropo e assumiamo che all'interno di V ci sia una distribuzione nota di densità di corrente impressa $\vec{J}_\mathrm{o}$ di pulsazione ω.

Ovviamente il campo all'interno di V non dipende solo dalle sorgenti interne a V, ma anche da eventuali sorgenti alla stessa frequenza che stanno all'esterno del volume considerato, così come dipende dalla forma e composizione di tutti i materiali che stanno in regioni esterne a V ma non completamente schermate da essa.



Ci chiediamo quali condizioni dobbiamo imporre ai campi affinché la soluzione delle equazioni di Maxwell con quelle sorgenti sia unica.

Siano $\vec{E}^a$, $\vec{H}^a$ e $\vec{E}^b$, $\vec{H}^b$ due possibili soluzioni delle equazioni di Maxwell in V con le sorgenti date:

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{E}^a &= -j\omega\mu\,\vec{H}^a & \qquad \nabla\times\vec{E}^b &= -j\omega\mu\,\vec{H}^b \\ \nabla\times\vec{H}^a &= j\omega\epsilon\,\vec{E}^a+\vec{J}_\mathrm{o} & \qquad \nabla\times\vec{H}^b &= j\omega\epsilon\,\vec{E}^b+\vec{J}_\mathrm{o} \end{aligned}$$

i campi differenza:

$$\delta\vec{E}=\vec{E}^a-\vec{E}^b \qquad\qquad \delta\vec{H}=\vec{H}^a-\vec{H}^b$$

evidentemente soddisfano le equazioni di Maxwell omogenee

$$\begin{aligned} \nabla\times\,\delta\vec{E} &= -j\omega\mu\,\delta\vec{H} \\ \nabla\times\,\delta\vec{H} &= j\omega\epsilon\,\delta\vec{E} \end{aligned}$$

Le condizioni per l'unicità sono quelle per cui $\delta\vec{E}$ e $\delta\vec{H}$ sono ovunque nulli, per cui $\vec{E}^a=\vec{E}^b$ e $\vec{H}^a=\vec{H}^b$ in ogni punto interno a V.
Scrivendo il bilancio delle potenze attive nel volume V, relativo al campo differenza, otteniamo

$$0=\underbrace{\tfrac{1}{2}\,\omega\int_\mathrm{V}\Big(\mu_\mathrm{o}\mu''\,|\,\delta\vec{H}\,|^2+\epsilon_\mathrm{o}\epsilon''\,|\,\delta\vec{E}\,|^2\Big)\,dV}_{\delta P_\mathrm{diss}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_\mathrm{S}\delta\vec{E}\times\delta\vec{H}^*\cdot\vec{n}\,dS\right)}_{\delta P_\mathrm{out}} \qquad (1)$$

[1] per semplicità assumiamo che nel caso il mezzo non sia omogeneo, $\epsilon=\epsilon(\vec{r})$ e $\mu=\mu(\vec{r})$ varino con continuità, in modo tale che in tutti i punti di V siano definibili le derivate spaziali dei campi e siano quindi valide le equazioni di Maxwell. Tenere esplicitamente conto di eventuali discontinuità del mezzo complicherebbe solo formalmente la presente argomentazione senza aggiungere niente di sostanziale: i casi in cui sono presenti discontinuotà possono sempre essere considerati come casi limite della presente trattazione.

se il mezzo interno a V è dissipativo, dato che ϵ'' e μ'' sono positivi, qualunque siano $\delta\vec{E}$ e $\delta\vec{H}$, risulta:

$$\delta P_{\rm diss} \geq 0$$

e l'uguaglianza $\delta P_{\rm diss} = 0$ implica che $\delta\vec{E}$ e $\delta\vec{H}$ sono nulli in ogni punto di V, se ϵ'' e μ'' differiscono da zero ovunque. L'equazione (1) ci fa vedere che le condizioni per l'unicità sono quelle condizioni sul contorno che assicurano che, qualunque siano $\delta\vec{E}$ e $\delta\vec{H}$, anche $\delta P_{\rm out} \geq 0$ in modo tale che l'unica soluzione dell'equazione (1) sia

$$\delta P_{\rm diss} = \delta P_{\rm out} = 0$$

Una classe sufficientemente generale, almeno per gli scopi di questo corso, di condizioni al contorno che assicurano l'unicità della soluzione può essere scritta nella forma

$$\vec{n} \times \vec{E} - \mathcal{Z}\,\vec{H}_{\rm T} = \vec{V}_{\rm T} \qquad \text{in } S_1 \tag{2}$$

$$\vec{H} \times \vec{n} - \mathcal{Y}\,\vec{E}_{\rm T} = \vec{W}_{\rm T} \qquad \text{in } S_2 \tag{3}$$

dove S_1 è una parte di S e S_2 la parte complementare [2], $\vec{E}_{\rm T}$ e $\vec{H}_{\rm T}$ sono la parte di $\vec{E}$ e di $\vec{H}$ tangente al contorno $\vec{E}_{\rm T} = \vec{E} - \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{E})$, $\vec{H}_{\rm T} = \vec{H} - \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{H})$, $\vec{V}_{\rm T}$ e $\vec{W}_{\rm T}$ sono dei vettori assegnati tangenti al contorno e $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y}$ sono delle costanti assegnate, in generale complesse, ma con parte reale positiva

$$\mathrm{Re}(\mathcal{Z}) > 0 \qquad\qquad \mathrm{Re}(\mathcal{Y}) > 0$$

Infatti con queste condizioni, qualunque siano i vettori assegnati $\vec{V}_{\rm T}$ e $\vec{W}_{\rm T}$, risulta

$$\vec{n} \times \delta\vec{E} = \mathcal{Z}\,\delta\vec{H}_{\rm T} \qquad \text{in } S_1$$

$$\delta\vec{H} \times \vec{n} = \mathcal{Y}\,\delta\vec{E}_{\rm T} \qquad \text{in } S_2$$

e [3]

$$\delta P_{\rm out} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Z}) \int_{S_1} |\,\delta\vec{H}_{\rm T}\,|^2\, dS + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}) \int_{S_2} |\,\delta\vec{E}_{\rm T}\,|^2\, dS \;\geq\; 0$$

Le condizioni (2) e (3) comprendono come casi casi particolari

- *l'assegnazione del campo elettrico tangenziale*
  $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{V}_{\rm T}$
- *l'assegnazione del campo magnetico tangenziale*
  $\vec{H} \times \vec{n} = \vec{W}_{\rm T}$
- *la condizione di parete elettrica*
  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$
- *la condizione di parete magnetica*
  $\vec{n} \times \vec{H} = 0$

[2] S_1 o S_2 possono anche coincidere con S, così che su tutto S possiamo avere l'una o l'altra delle condizioni.

[3]

$$\begin{aligned}
\delta P_{\rm out} &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{S_1} \vec{n} \times \delta\vec{E} \cdot \delta\vec{H}^*\, dS\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{S_2} \delta\vec{E} \cdot \delta\vec{H}^* \times \vec{n}\, dS\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{Z}\int_{S_1} \delta\vec{H}_{\rm T} \cdot \delta\vec{H}^*\, dS\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{Y}^*\int_{S_2} \delta\vec{E} \cdot \delta\vec{E}_{\rm T}^*\, dS\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Z}) \int_{S_1} |\,\delta\vec{H}_{\rm T}\,|^2\, dS + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}^*) \int_{S_2} |\,\delta\vec{E}_{\rm T}\,|^2\, dS
\end{aligned}$$

- *la condizione d'impedenza*
  $\vec{n} \times \vec{E} = \mathcal{Z}\, \vec{H}_{\mathrm{T}}$
- *la condizione di ammettenza*
  $\vec{H} \times \vec{n} = \mathcal{Y}\, \vec{E}_{\mathrm{T}}$

Come si è visto, le condizioni per l'unicità della soluzione assumono che il mezzo contenuto in V sia ovunque dissipativo. Se il mezzo interno a V fosse senza perdite anche solo su una parte di V, allora non potremo dire nulla sull'unicità della soluzione perché $\delta\vec{E}$ potrebbe essere non nullo dove $\epsilon'' = 0$ e $\delta\vec{H}$ dove $\mu'' = 0$.
Come si è visto, però, non ha importanza quanto i mezzi siano dissipativi, l'unità della soluzione è assicurata dalle condizioni al contorno per quanto piccoli siano ϵ'' e μ''.
Nel caso in cui all'interno di V il mezzo sia parzialmente o totalmente senza perdite, pur avendo assegnato le condizioni al contorno sulle componenti tangenziali, può accadere di avere più di una soluzione. Per identificare la soluzione collegata causalmente con le sorgenti ed eliminare le soluzioni spurie basta identificare la soluzione che sussiste quando il mezzo viene considerato ovunque dissipativo con ϵ'' e μ'' non nulli ma piccoli a piacere.

Il teorema di unicità finora è stato discusso pensando ad un volume V finito. In realtà il teorema vale anche per regioni illimitate pur di imporre ai campi opportune condizioni sulla superficie di una sfera di raggio r arbitrariamente grande. Queste condizioni, chiamate *condizioni di radiazione*, possono essere considerate una particolare forma di condizioni di impedenza o ammettenza. Ipotizzando che da una certa distanza dall'origine in poi il mezzo sia omogeneo con impedenza caratteristica η_∞, le condizioni di radiazione impongono:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} r^\nu \vec{E} &= 0 \\ \lim_{r\to\infty} r^\nu \vec{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall\, \nu < 1$$
$$\lim_{r\to\infty} r\left(\vec{u}_r \times \vec{E} - \eta_\infty\, \vec{H}\right) = 0$$
$$\lim_{r\to\infty} r\left(\vec{H} \times \vec{u}_r - \vec{E}\,/\,\eta_\infty\right) = 0$$

dove $\vec{u}_r$ è il versore radiale. Le condizioni di radiazione impongono quindi che i campi elettrico e magnetico all'infinito tendano a zero almeno come $1/r$ e che il campo elettromagnetico tenda ad avere localmente le stesse caratteristiche del campo relativo ad un'onda piana uniforme che si propaga radialmente verso l'infinito.