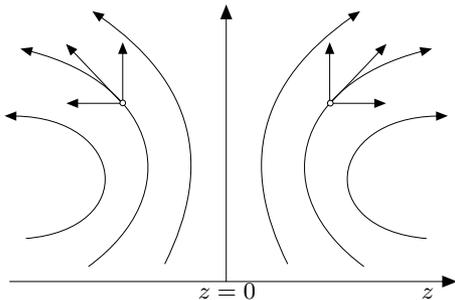


**Simmetria rispetto ad un piano**

Un campo vettoriale  $\vec{V}$  rispetto ad un piano (per esempio il piano  $z = 0$ ) può presentare i due seguenti tipi di simmetria:

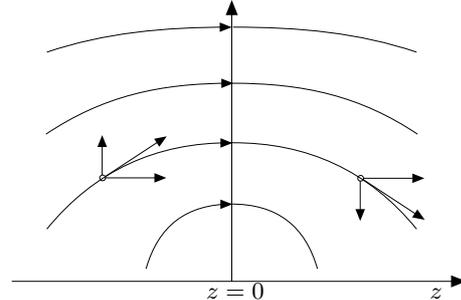
*simmetria pari*

$$\begin{aligned} V_x(x, y, -z) &= V_x(x, y, z) \\ V_y(x, y, -z) &= V_y(x, y, z) \\ V_z(x, y, -z) &= -V_z(x, y, z) \end{aligned}$$



*simmetria dispari*

$$\begin{aligned} V_x(x, y, -z) &= -V_x(x, y, z) \\ V_y(x, y, -z) &= -V_y(x, y, z) \\ V_z(x, y, -z) &= V_z(x, y, z) \end{aligned}$$

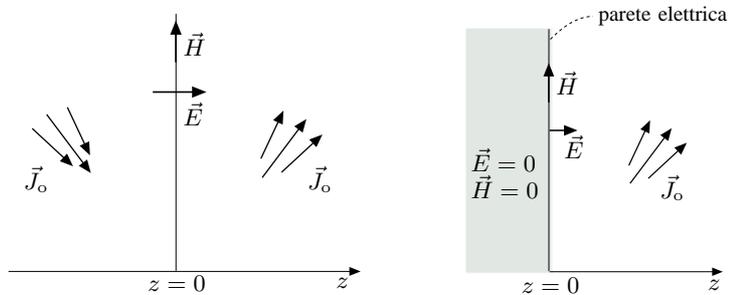


I campi a simmetria pari sono tangenti al piano di simmetria, mentre quelli a simmetria dispari, sul piano di simmetria hanno la sola componente normale.

Si verifica facilmente che se il campo  $\vec{V}$  ha un tipo di simmetria, il suo rotore ha la simmetria opposta <sup>1</sup>. Dalle equazioni di Maxwell si deduce quindi che, in caso di simmetria rispetto ad un piano, il campo elettrico e la densità di corrente hanno lo stesso tipo di simmetria, mentre il campo magnetico ha la simmetria opposta.

Se consideriamo i due casi:

- un sistema di correnti impresse a simmetria dispari rispetto al piano  $z = 0$ ,
- le stesse correnti impresse nel semispazio  $z > 0$  e nel semispazio  $z < 0$  un conduttore perfetto,



constatiamo che il campo elettrico ha solo la componente normale sul piano

<sup>1</sup>

infatti

$$\begin{aligned} V_x(x, y, -z) &= \pm V_x(x, y, z) & \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{x,y,-z} &= \mp \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{x,y,z} \\ V_y(x, y, -z) &= \pm V_y(x, y, z) & \frac{\partial V_y}{\partial z} \Big|_{x,y,-z} &= \mp \frac{\partial V_y}{\partial z} \Big|_{x,y,z} \\ V_z(x, y, -z) &= \mp V_z(x, y, z) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \Big|_{x,y,-z} &= \pm \frac{\partial V_z}{\partial z} \Big|_{x,y,z} \end{aligned} \Rightarrow$$

e pertanto risulta

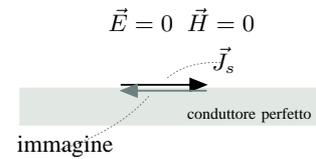
$$\begin{aligned} \vec{u}_x \cdot \nabla \times \vec{V} \Big|_{x,y,-z} &= \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)_{x,y,-z} = \mp \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)_{x,y,z} = \mp \vec{u}_x \cdot \nabla \times \vec{V} \Big|_{x,y,z} \\ \vec{u}_y \cdot \nabla \times \vec{V} \Big|_{x,y,-z} &= \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x,y,-z} = \mp \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x,y,z} = \mp \vec{u}_y \cdot \nabla \times \vec{V} \Big|_{x,y,z} \\ \vec{u}_z \cdot \nabla \times \vec{V} \Big|_{x,y,-z} &= \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{x,y,-z} = \pm \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{x,y,z} = \pm \vec{u}_z \cdot \nabla \times \vec{V} \Big|_{x,y,z} \end{aligned}$$

$z = 0$ , nel primo caso per la simmetria, nel secondo per la condizione di *parete elettrica* ( $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ ) imposta dal conduttore perfetto. Pertanto, se consideriamo solo il semispazio  $z > 0$ , possiamo affermare che il campo elettromagnetico nei due casi ha sorgenti uguali e uguali condizioni al contorno sul piano  $z = 0$ . Se assumiamo che le parti immaginarie della permittività elettrica e della permeabilità magnetica del mezzo presente nel semispazio siano arbitrariamente piccole, purché diverse da zero, e assumiamo che in entrambi i casi i campi soddisfino le condizioni di radiazione, possiamo concludere, per il teorema di unicità, che i campi sono uguali in ogni punto del semispazio.

Vale pertanto la seguente *regola delle immagini*:

il campo elettromagnetico generato da un sistema di sorgenti in presenza di un'interfaccia piana con un conduttore perfetto è uguale al campo che viene generato nello spazio libero dalle sorgenti date assieme alle rispettive *immagini*, cioè assieme alle sorgenti che si ottengono per simmetria dispari rispetto al piano dell'interfaccia.

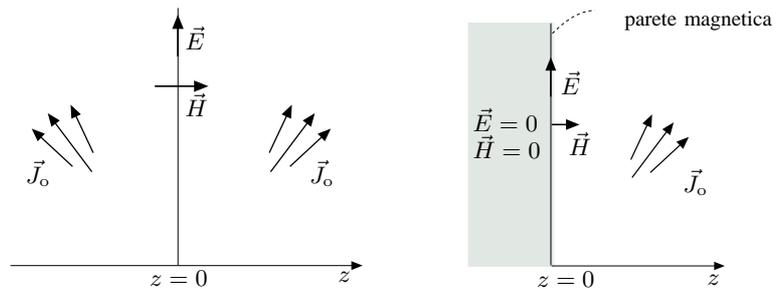
Questo risultato fa anche capire perché una corrente superficiale che fluisce immediatamente sopra la superficie di un conduttore perfetto, non dà nessun effetto: infatti la sua immagine coincide con essa ma è di segno opposto.



Analogamente a quanto visto, la condizione di parete magnetica

$$\vec{n} \times \vec{H} = 0$$

sul piano  $z = 0$  determina nel semispazio  $z > 0$  lo stesso campo che viene sostenuto nello spazio libero dalle sorgenti date assieme alle sorgenti *immagine* che si ottengono per simmetria pari rispetto al piano.



### Dualità e equivalenza

Le argomentazioni sulla simmetria mostrano che, anche se è unico il campo elettromagnetico all'interno del volume  $V$  una volta definite le sorgenti al suo interno e le condizioni sulla superficie che lo delimita, possono esistere diverse condizioni al contorno associate a diverse distribuzioni di sorgenti esterne a  $V$  che danno in  $V$  lo stesso campo.

Situazioni di questo tipo si dicono *equivalenti*, ed è interessante riconoscere l'equivalenza di diverse situazioni per mettersi nella condizione di calcolare il campo elettromagnetico nel caso più semplice.

Per aumentare le possibilità di equivalenza di sistemi di condizioni al contorno - sorgenti esterne, è uso introdurre un altro campo vettoriale  $\vec{M}_o$ , analogo alla densità di corrente, ma privo di significato fisico, che prende il nome di *densità di corrente magnetica*. Con l'introduzione della densità di corrente magnetica, in tutti i punti di regolarità del campo valgono le equazioni di Maxwell *generalizzate*:

$$\begin{aligned} -\nabla \times \vec{E} &= j\omega\mu\vec{H} + \vec{M}_o & \nabla \cdot \mu\vec{H} &= -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \vec{M}_o \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_o & \nabla \cdot \epsilon\vec{E} &= -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \vec{J}_o = \rho \end{aligned}$$

dove la densità di corrente magnetica ha dimensioni di  $[V/m^2]$ . Sulle superfici di discontinuità valgono invece le relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) &= \vec{J}_s & \vec{n} \cdot (\mu^+\vec{H}^+ - \mu^-\vec{H}^-) &= -\frac{1}{j\omega} \nabla_s \cdot \vec{M}_s \\ (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \times \vec{n} &= \vec{M}_s & \vec{n} \cdot (\epsilon^+\vec{E}^+ - \epsilon^-\vec{E}^-) &= -\frac{1}{j\omega} \nabla_s \cdot \vec{J}_s = \rho_s \end{aligned}$$

dove  $\vec{M}_s$  è la densità superficiale di corrente magnetica [V / m], analoga alla densità superficiale di corrente elettrica.

Con l'introduzione delle correnti magnetiche, le equazioni di Maxwell diventano simmetriche, nel senso che non cambiano se si operano le seguenti sostituzioni

$$\begin{aligned} \vec{E} &\Rightarrow \vec{H} \\ \vec{H} &\Rightarrow -\vec{E} \\ \vec{J}_o \quad \vec{J}_s &\Rightarrow \vec{M}_o \quad \vec{M}_s \\ \vec{M}_o \quad \vec{M}_s &\Rightarrow -\vec{J}_o \quad -\vec{J}_s \\ \epsilon &\Leftrightarrow \mu \end{aligned}$$

Il campo elettromagnetico ottenuto operando queste sostituzioni si dice *duale* del campo elettromagnetico originario. Anche la dualità è uno strumento molto utile alla risoluzione di problemi di elettromagnetismo perché se è noto il campo elettromagnetico  $\vec{E}, \vec{H}$  in un volume  $V$  sostenuto dalle sorgenti  $\{\vec{J}_o, \vec{J}_s, \vec{M}_o, \vec{M}_s\}$  con date condizioni al contorno, ad esempio  $\vec{n} \times \vec{E} = Z \vec{H}$ , è immediatamente deducibile il campo elettromagnetico  $\vec{E}^d, \vec{H}^d$  nello stesso volume, sostenuto dalle sorgenti  $\{\vec{J}_o^d = -\vec{M}_o/\eta, \vec{J}_s^d = -\vec{M}_s/\eta, \vec{M}_o^d = \eta \vec{J}_o, \vec{M}_s^d = \eta \vec{J}_s\}$  con le condizioni al contorno  $\vec{H} \times \vec{n} = Z/\eta^2 \vec{E}$ , duali di quelle del problema originario<sup>2</sup>. In questo caso risulta:

$$\vec{E}^d = -\eta \vec{H} \qquad \vec{H}^d = \vec{E}/\eta \tag{1}$$

Consideriamo ad esempio il caso schematizzato nella figura a fianco, in cui nel volume  $V$  agisce la sorgente  $\vec{J}_o$  e sul contorno  $S$  di  $V$  è posta la condizione di tipo non omogeneo

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{W}_T$$

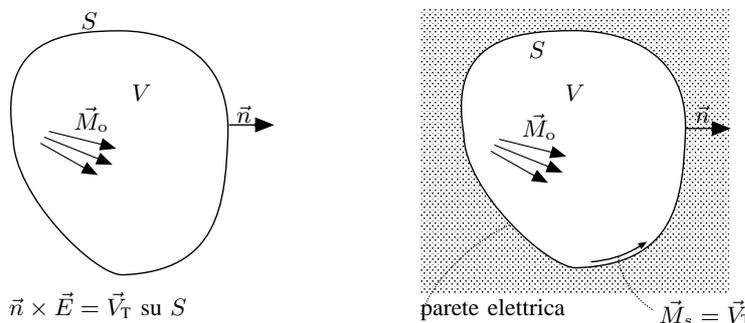
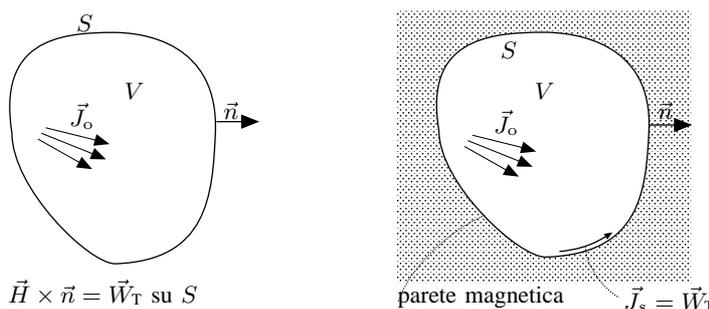
questa condizione è equivalente ad imporre la condizione (omogenea) di parete magnetica su  $S$

$$\vec{H} \times \vec{n} = 0$$

e considerare all'interno di  $V$ , immediatamente sopra  $S$ , anche la densità superficiale di corrente  $\vec{J}_s = \vec{W}_T$ . Infatti la presenza della corrente superficiale impone una discontinuità nella componente tangente del campo magnetico che passa dal valore nullo imposto dalla parete magnetica al valore  $\vec{W}_T$ .

Nella figura a fianco viene presentato l'esempio di equivalenza duale del precedente.

Questo significa non solo che possiamo cambiare ancora la condizione al contorno da inomogenea a omogenea considerando la densità superficiale di corrente magnetica su  $S$ , ma anche che se siamo in grado di calcolare il campo elettromagnetico in uno dei due primi casi e sappiamo che  $\vec{M}_o = \eta \vec{J}_o$  e  $\vec{V}_T = \eta \vec{W}_T$ , possiamo dedurre i campi del secondo caso da quelli del primo mediante le relazioni (1).



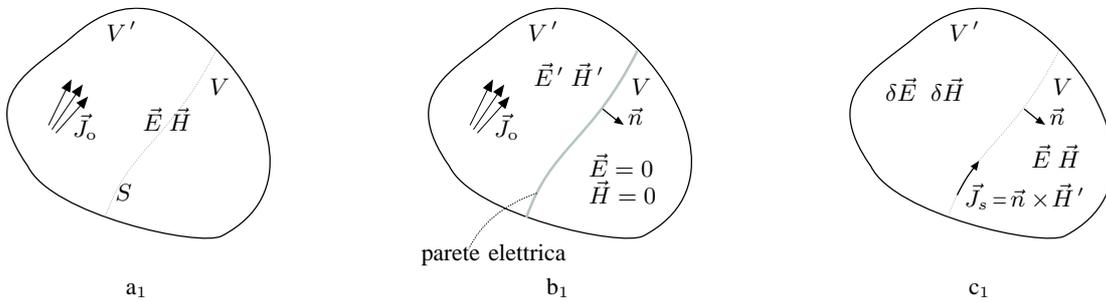
2

nel parametro  $Z$ , che ha le dimensioni di un'impedenza, non compaiono esplicitamente  $\epsilon$  e  $\mu$ , possiamo esplicitare la sua natura scrivendo  $Z = \eta (Z/\eta)$ , in cui il fattore  $Z/\eta$  è adimensionale e in quanto tale indipendente da  $\epsilon$  e  $\mu$ , lo scambio mutuo tra  $\epsilon$  e  $\mu$  porta a cambiare  $\eta$  in  $1/\eta$ , pertanto il duale di  $Z$  è  $Z/\eta^2$ .

Un esempio di applicazione del teorema di equivalenza che permette di cambiare le sorgenti esterne al volume d'interesse è illustrato nella figura seguente.

Supponiamo di essere interessati a calcolare il campo nel volume  $V$  quando nel volume  $V'$ , esterno a  $V$  ma in comunicazione con esso attraverso la superficie  $S$ , agiscono le sorgenti  $\vec{J}_o$  e la condizione al contorno sulla superficie che racchiude  $V$  e  $V'$  è omogenea (figura a<sub>1</sub>).

Se separiamo i volumi  $V$  e  $V'$  con una parete elettrica, avremo in  $V'$  i campi  $\vec{E}' \vec{H}'$  e campo nullo in  $V$  (figura b<sub>1</sub>). Pertanto possiamo affermare che i campi differenza  $\delta\vec{E} = \vec{E} - \vec{E}'$ ,  $\delta\vec{H} = \vec{H} - \vec{H}'$  sono sostenuti dalla corrente superficiale  $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}'$  definita su  $S$  (figura c<sub>1</sub>). Infatti i campi differenza soddisfano le equazioni di Maxwell omogenee in  $V$  e  $V'$ , hanno la stessa condizione al contorno omogenea sulla superficie che racchiude  $V$  e  $V'$  inoltre il campo elettrico  $\delta\vec{E}$  ha componenti tangenti continue su  $S$  ( $\vec{n} \times \vec{E}' = 0$  per la condizione di parete elettrica ed  $\vec{E}$  è continuo) e il campo magnetico  $\delta\vec{H}$  su  $S$  ha la discontinuità congruente con la presenza di  $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}'$ . Pertanto, per il teorema di unicità, il campo descritto è l'unica soluzione per il campo elettromagnetico in queste condizioni.



Un altro interessante esempio di applicazione del teorema di equivalenza che considera tutto lo spazio, è illustrato nelle figure a fianco.

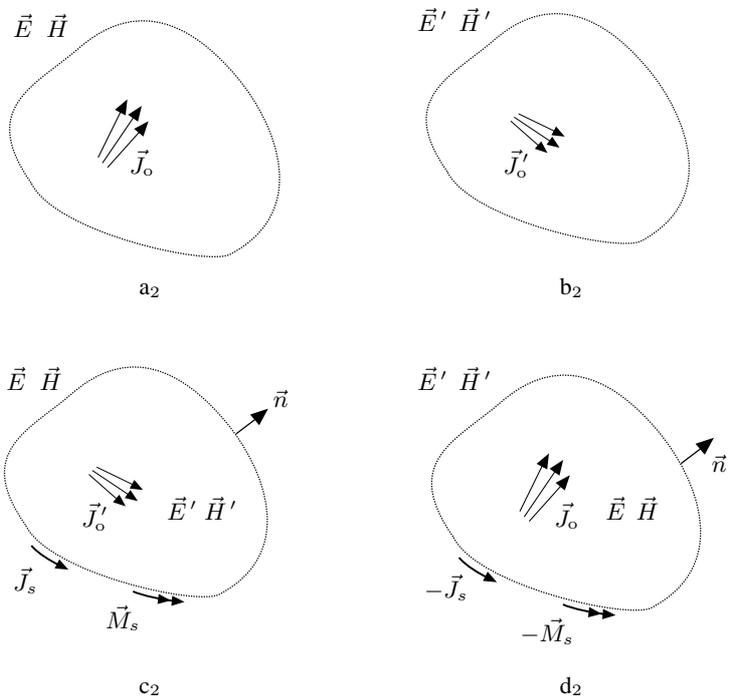
Nella figura a<sub>2</sub> è indicato il campo elettromagnetico  $\vec{E} \vec{H}$ , definito in tutto lo spazio, sostenuto dalla sorgente  $\vec{J}_o$  interna al volume  $V$ .

Nella figura b<sub>2</sub> è indicato il campo  $\vec{E}' \vec{H}'$  sostenuto dalla diversa sorgente  $\vec{J}'_o$  nelle stesse condizioni.

Nella figura c<sub>2</sub> viene illustrata la situazione in cui il campo al di fuori di  $V$  è ancora  $\vec{E} \vec{H}$ , mentre all'interno di  $V$  è presente il campo  $\vec{E}' \vec{H}'$  con la relativa sorgente  $\vec{J}'_o$  e sul contorno di  $V$  sono presenti le correnti superficiali

$$\vec{J}_s = \vec{n} \times (\vec{H} - \vec{H}')$$

$$\vec{M}_s = (\vec{E} - \vec{E}') \times \vec{n}$$



che giustificano le discontinuità del campo elettrico e magnetico. Dato che sono soddisfatte tutte le condizioni, il teorema di unicità ci assicura che questa è l'unica soluzione possibile in queste condizioni.

Infine nella figura d<sub>2</sub> viene illustrata la situazione inversa, in cui all'interno di  $V$  è presente il campo  $\vec{E} \vec{H}$  assieme alla relativa sorgente  $\vec{J}_o$ , all'esterno di  $V$  c'è il campo  $\vec{E}' \vec{H}'$  e sul contorno di  $V$  sono presenti le correnti superficiali opposte alle correnti superficiali prima definite per giustificare le opposte discontinuità del campo elettrico e magnetico.

Un caso particolare, ma interessante, del precedente esempio si trova annullando le sorgenti  $\vec{J}'_o$  e quindi anche i campi  $\vec{E}'$  e  $\vec{H}'$  (se sono verificate le condizioni di unicità della soluzione, in assenza di sorgenti il campo è necessariamente nullo).

Si ottiene che il campo  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  all'esterno di  $V$  può essere sostenuto o dalla sorgente originaria  $\vec{J}_o$  interna a  $V$  (figura a<sub>3</sub>) oppure dalle correnti superficiali  $\vec{J}_s$  e  $\vec{M}_s$  distribuite sul contorno di  $V$ , avendo all'interno di  $V$  campo nullo (figura b<sub>3</sub>).

Ma se il campo è nullo all'interno del volume  $V$ , nulla cambia se in  $V$  si pone un conduttore perfetto (figura c<sub>3</sub>).

In questo caso, come visto in precedenza, non è necessario imporre la presenza della corrente superficiale elettrica, dato che è implicita nella condizione di parete elettrica imposta dal conduttore perfetto.

Nell'ultimo caso (figura d<sub>3</sub>) è illustrato il caso duale, in cui il volume  $V$  è riempito dal duale del conduttore perfetto, il *conduttore magnetico perfetto* che impone campo nullo al suo interno e la condizione di parete magnetica sul suo contorno. In questo caso è superfluo considerare la corrente superficiale magnetica, che è implicita con condizione di parete magnetica.

