

### Radiazione da aperture

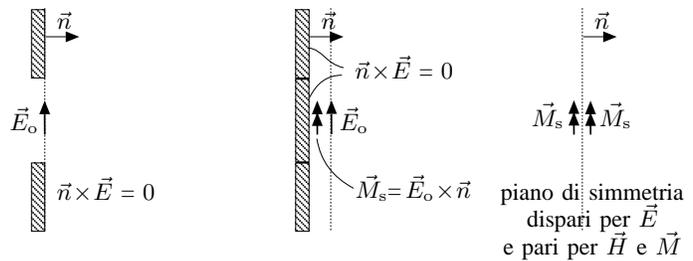
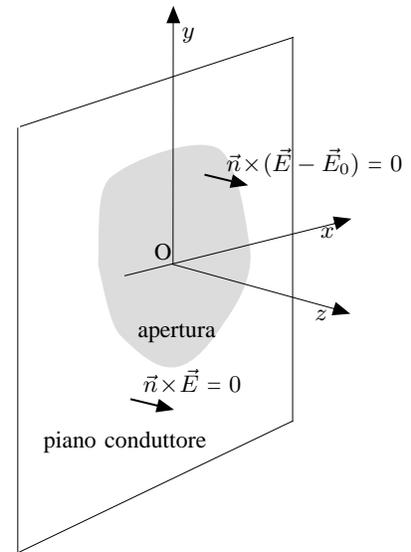
Consideriamo il problema di determinare il campo elettromagnetico nel semispazio  $z > 0$  sostenuto da sorgenti poste nel semispazio  $z < 0$ , quando sul piano  $z = 0$  è presente uno schermo piano, perfettamente conduttore, che permette l'accoppiamento dei campi elettromagnetici tra i due semispazi solo attraverso un'apertura di dimensioni finite. Supponiamo che il mezzo, nel semispazio d'interesse, sia omogeneo, isotropo e senza perdite e supponiamo di conoscere l'illuminazione dell'apertura, cioè il campo elettrico tangenziale  $\vec{E}_0$  presente sull'apertura.

Così com'è stato formulato, il problema è un problema di "condizioni al contorno" che ammette un'unica soluzione, dato che l'assegnazione del campo elettrico tangente in una parte del piano  $z = 0$ , la condizione di parete elettrica nella parte rimanente del piano e la condizione di radiazione sulla semi-superficie sferica all'infinito del semispazio  $z > 0$  sono condizioni che assicurano l'unicità della soluzione.

Per trovare la soluzione di questo problema è conveniente considerare un problema equivalente: dapprima si possono cambiare le condizioni al contorno da disomogenee in omogenee introducendo una lamina di corrente magnetica impressa. Infatti imporre la condizione al contorno  $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}_0$  sull'apertura è equivalente ad imporre la condizione di parete elettrica  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$  su tutto il piano  $z = 0$ , estendendo la presenza del conduttore perfetto anche sull'apertura, e imporre il valore  $\vec{E}_0$  immediatamente sopra l'apertura introducendo la lamina di densità di corrente magnetica superficiale  $\vec{M}_s = \vec{E}_0 \times \vec{n}$  che comporta la discontinuità della componente tangente del campo elettrico da zero, sul piano conduttore, a  $\vec{E}_0$  immediatamente al di là della lamina.

Infine è possibile trasformare quest'ultimo problema in un problema di radiazione nello spazio infinito, sfruttando la regola delle immagini. Infatti, su tutto il piano  $z = 0$  è verificata la condizione di parete elettrica  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$  per la presenza del conduttore perfetto, possiamo rimuovere il conduttore perfetto e imporre la stessa condizione imponendo che il campo elettrico abbia simmetria dispari rispetto al piano  $z = 0$  e che quindi il campo magnetico e la densità di corrente magnetica abbiano simmetria pari rispetto allo stesso piano.

Dato che la densità di corrente superficiale  $\vec{M}_s$  e la sua immagine a simmetria pari coincidono, la soluzione del problema richiede di calcolare il campo di radiazione dovuto alla distribuzione di corrente magnetica superficiale  $2\vec{M}_s = 2\vec{E}_0 \times \vec{u}_z$  localizzata sull'apertura. Il calcolo di tale campo è immediato sfruttando le relazioni di dualità riportate nella tabella in appendice.



### Campo di radiazione di un'apertura rettangolare illuminata uniformemente

Consideriamo un'apertura rettangolare di dimensioni  $a, b$  posta sul piano  $xy$  e supponiamo che l'illuminazione dell'apertura sia d'intensità uniforme pari a  $E_o$ , in fase e polarizzata lungo l'asse  $y$ :

$$2 \vec{M}_s = 2 \vec{E}_o \times \vec{u}_z = 2 E_o \vec{u}_x$$

Sovrapposto al sistema di coordinate cartesiane  $\{x, y, z\}$ , per rappresentare i campi di radiazione consideriamo il sistema di coordinate sferiche  $\{r, \vartheta, \varphi\}$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ) con asse polare coincidente con l'asse  $z$ . Risultata:

$$\vec{r}' = \vec{u}_x x' + \vec{u}_y y' \quad \vec{u}_r = \vec{u}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{u}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \vec{u}_z \cos \vartheta$$

ponendo

$$u = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$v = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_y = \sin \vartheta \sin \varphi \quad (u^2 + v^2 \leq 1)$$

il vettore di radiazione relativo alla densità di corrente magnetica risulta

$$\vec{L} = 2 E_o \vec{u}_x \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{jk(u x' + v y')} dx' dy'$$

$$= 2 a b E_o \vec{u}_x \operatorname{sinc}(\pi a u / \lambda) \operatorname{sinc}(\pi b v / \lambda) \quad \operatorname{sinc}(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

da cui risulta <sup>1</sup>:

$$\vec{E} = j a b E_o \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} (\vec{u}_\varphi \cos \vartheta \cos \varphi + \vec{u}_\vartheta \sin \varphi) \operatorname{sinc}(\pi a u / \lambda) \operatorname{sinc}(\pi b v / \lambda)$$

$$\vec{H} = -j a b \frac{E_o}{\eta} \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} (\vec{u}_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - \vec{u}_\varphi \sin \varphi) \operatorname{sinc}(\pi a u / \lambda) \operatorname{sinc}(\pi b v / \lambda)$$

$$K = \frac{a^2 b^2}{\lambda^2} \frac{|E_o|^2}{2\eta} (1 - u^2) \operatorname{sinc}^2(\pi a u / \lambda) \operatorname{sinc}^2(\pi b v / \lambda)$$

Dall'espressione di  $\vec{E}$ , si vede che il campo elettrico è polarizzato linearmente. Dalla sua espressione generale si deduce immediatamente che la polarizzazione del campo elettrico, perpendicolare alla direzione di propagazione e perpendicolare alla direzione  $\vec{u}_x$ , è secondo i paralleli della sfera che ha come asse polare l'asse  $x$ , la polarizzazione del campo magnetico, perpendicolare alla direzione di propagazione e al campo elettrico è secondo i meridiani della stessa sfera.

L'andamento della funzione  $\operatorname{sinc}^2(x)$  è riportato in figura, il suo valore massimo è 1 per  $x = 0$ . Pertanto il valore della massima intensità di radiazione si per  $u = v = 0$ , cioè nella direzione dell'asse  $z$  e vale

$$K_{\max} = \frac{a^2 b^2}{\lambda^2} \frac{|E_o|^2}{2\eta}$$

1

essendo  $\vec{u}_x = \vec{u}_r \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{u}_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - \vec{u}_\varphi \sin \varphi$ , risulta

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_x = \vec{u}_\varphi \cos \vartheta \cos \varphi + \vec{u}_\vartheta \sin \varphi$$

$$\vec{u}_x - \vec{u}_r \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - \vec{u}_\varphi \sin \varphi$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_x|^2 = \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = (1 - \sin^2 \vartheta) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 - u^2$$

I diagrammi di radiazione dell'apertura sono pertanto diagrammi della funzione

$$\frac{K(u, v)}{K_{\max}} = (1 - u^2) \operatorname{sinc}^2(\pi a u/\lambda) \operatorname{sinc}^2(\pi b v/\lambda) \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

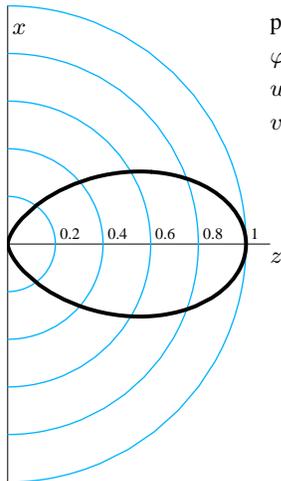
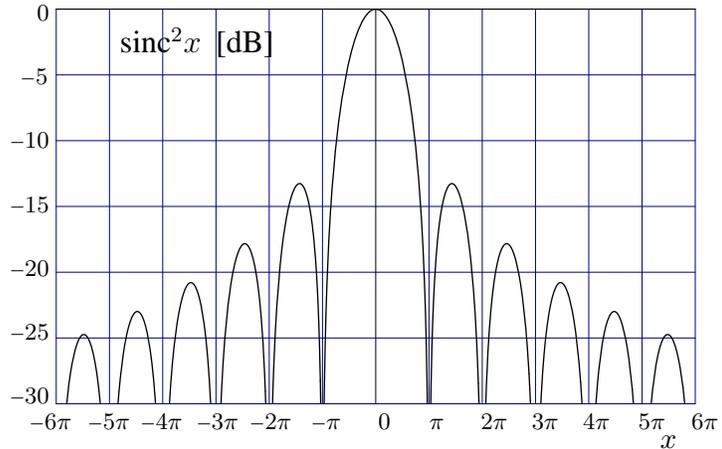
È evidente che, indipendentemente dalle dimensioni dell'apertura si ha uno zero di radiazione per  $u = \pm 1$ , cioè in direzione dell'asse  $x$ , nel verso positivo e negativo.

Dato che  $u$  e  $v$  sono in modulo non superiori a 1, gli argomenti delle funzioni  $\operatorname{sinc}^2$  sono compresi tra

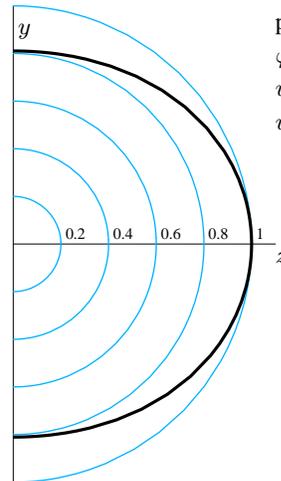
$$\begin{aligned} -\xi_a &\leq \pi a u/\lambda \leq \xi_a = \pi a/\lambda \\ -\xi_b &\leq \pi b v/\lambda \leq \xi_b = \pi b/\lambda \end{aligned}$$

Se le dimensioni dell'apertura sono molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda ( $a, b \ll \lambda$ )  $\xi_a$  e  $\xi_b$  sono molto piccoli rispetto a  $\pi$  e il valore di  $\operatorname{sinc}^2(\xi)$  non è molto diverso da 1. Questo implica che il diagramma di radiazione dell'apertura è

praticamente uguale a  $\cos^2 \vartheta$  sul piano  $xz$  e praticamente costante sul piano  $yz$ .



piano  $xz$   
 $\varphi = 0, \varphi = \pi$   
 $u = \pm \sin \vartheta$   
 $v = 0$



piano  $yz$   
 $\varphi = \pm \pi/2$   
 $u = 0$   
 $v = \pm \sin \vartheta$

diagrammi di radiazione (scala lineare) di un'apertura illuminata uniformemente di dimensioni  $a = 2b = \lambda/2$

Al contrario, se le dimensioni dell'apertura sono molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda,  $\xi_a$  e  $\xi_b$  sono molto grandi rispetto a  $\pi$  e negli intervalli  $-\xi_a, \xi_a, -\xi_b, \xi_b$  sono compresi diversi zeri e diversi massimi della funzione  $\operatorname{sinc}^2$ . Oltre al lobo principale nella direzione dell'asse  $z$ , il diagramma di radiazione presenta molti altri lobi, di intensità massima via via decrescente all'aumentare dell'angolo  $\vartheta$  tra la direzione del lobo e l'asse  $z$ . Le direzioni di zero di radiazione sono quelle per cui

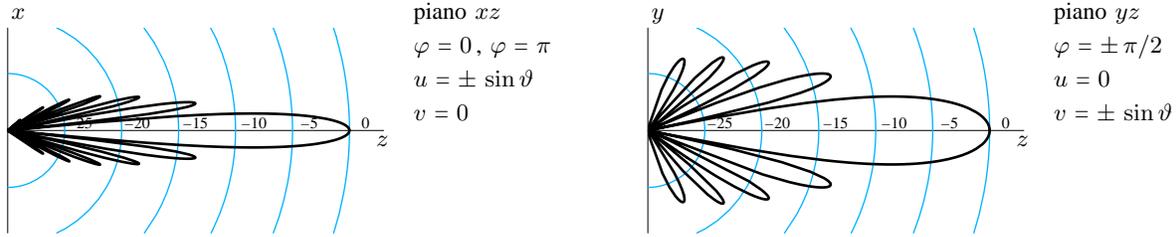
$$\pi a u/\lambda = m \pi \quad \pi b v/\lambda = n \pi \quad m, n \text{ interi diversi da } 0$$

Le direzioni di zero che delimitano il lobo principale nel piano  $xz$  sono individuate da  $u = \pm \lambda/a$ , e l'angolo compreso tra queste due direzioni, cioè l'apertura angolare  $\Delta_{xz}$  del lobo principale è data da

$$\Delta_{xz} = 2 \arcsin \lambda/a \approx 2 \lambda/a$$

In modo analogo si trova che l'apertura angolare  $\Delta_{yz}$  del lobo principale sul piano  $yz$  è

$$\Delta_{yz} = 2 \arcsin \lambda/b \approx 2 \lambda/b$$



diagrammi di radiazione (dB) di un'apertura illuminata uniformemente di dimensioni  $a = 2b = 10 \lambda$

Alcuni aspetti dei risultati ottenuti nel caso considerato hanno in realtà validità molto più generale. Il primo riguarda il fatto che abbiamo trovato che il massimo di radiazione è nella direzione dell'asse  $z$ . In realtà, qualunque sia la forma dell'apertura e qualunque sia la sua legge d'illuminazione d'ampiezza, se il campo sull'apertura ha fase costante, il massimo di radiazione è nella direzione perpendicolare al piano dell'apertura.

La spiegazione è abbastanza intuitiva se si considerano i contributi al campo di radiazione dati dai singoli elementi infinitesimi di cui si compone la sorgente  $\vec{M}_s(x', y') dx' dy'$ . Infatti, se tali elementi di sorgente sono tutti in fase, i campi da essi prodotti si sommano in fase nei punti in cui i ritardi di fase dovuti alla propagazione sono uguali, cioè nei punti che hanno la stessa distanza da tutti gli elementi della sorgente e questo avviene proprio nei i punti a grande distanza dall'apertura, nella direzione perpendicolare all'apertura stessa.

Il secondo aspetto è relativo al fatto che abbiamo trovato che ad un'apertura di dimensioni  $a, b$  piccole rispetto alla lunghezza d'onda corrisponde un diagramma di radiazione ampio, mentre a un'apertura di grandi dimensioni corrisponde un diagramma di radiazione con un lobo principale molto stretto. Questo è un risultato, del tutto generale, che deriva dalla legge che collega la "forma" dei campi di radiazione alla "forma" della sorgente. Tale legame è dato dall'espressione del vettore di radiazione:

$$\vec{L}(\vartheta, \varphi) = 2 \int \int_{\text{apertura}} e^{jk(u x' + v y')} \vec{M}_s(x', y') dx' dy'$$

Infatti, se estendiamo la definizione della densità di corrente magnetica superficiale a tutto il piano dell'apertura, ponendo che essa è nulla al di fuori dell'apertura, possiamo riscrivere l'espressione di  $\vec{L}$  nella forma

$$\vec{L}(\vartheta, \varphi) = 2 \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\xi x' + \eta y')} \vec{M}_s(x', y') dx' dy' \quad \begin{matrix} \xi = -k u \\ \eta = -k v \end{matrix}$$

è evidente che il vettore di radiazione è proporzionale alla trasformata di Fourier bidimensionale della sorgente, dove  $\xi$  e  $\eta$  sono le "variabili spettrali" associate alle variabili "spaziali"  $x'$  e  $y'$ . I campi nella zona di radiazione e l'intensità di radiazione dipendono dalla parte dello spettro della sorgente interna al cerchio di raggio  $k$ , detto cerchio di visibilità<sup>2</sup>. La proprietà riscontrata nel caso specifico dell'apertura rettangolare è in realtà una proprietà generale della trasformata di Fourier.

2

la condizione sui coseni direttori  $u^2 + v^2 \leq 1$  implica la condizione sulle variabili spettrali  $\xi^2 + \eta^2 \leq k^2$ .

**relazioni di dualità**

sorgenti elettriche

sorgenti magnetiche

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_o$$

$$-\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H} + \vec{M}_o$$

$$\vec{E} = -j\omega\left(\vec{A} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

$$\vec{H} = -j\omega\left(\vec{F} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\vec{F}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon}\nabla \times \vec{F}$$

$$\vec{A} = \mu \int_V \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \vec{J}_o(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{F} = \epsilon \int_V \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \vec{M}_o(\vec{r}') dV'$$

**nell'approssimazione di campo lontano**

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}$$

$$\vec{F} = \epsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{L}$$

$$\vec{N} = \int_V e^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'} \vec{J}_o(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{L} = \int_V e^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'} \vec{M}_o(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{E} = -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\vec{N} - \vec{u}_r(\vec{u}_r\cdot\vec{N})\right)$$

$$\vec{H} = -\frac{j}{\eta} \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\vec{L} - \vec{u}_r(\vec{u}_r\cdot\vec{L})\right)$$

$$\vec{H} = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \vec{u}_r \times \vec{N}$$

$$\vec{E} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \vec{u}_r \times \vec{L}$$

$$K = \frac{\eta}{8\lambda^2} \left(|\vec{N}|^2 - |\vec{u}_r\cdot\vec{N}|^2\right)$$

$$K = \frac{1}{8\eta\lambda^2} \left(|\vec{L}|^2 - |\vec{u}_r\cdot\vec{L}|^2\right)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{u}_r \times \vec{E}}{\eta} \quad \vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{u}_r$$

$$K = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} r^2 = \frac{\eta|\vec{H}|^2}{2} r^2$$