Determinazione del potenziale in un mezzo omogeneo indefinito

Abbiamo visto che il potenziale vettore, nella gauge di Lorentz, dovuto alla densità di corrente impressa $\vec{J}_\mathrm{o}$ agente nel volume V, contenente un mezzo stazionario, lineare e isotropo di permittivitè ϵ e permeabilità μ, è la soluzione dell'equazione di Helmholtz disomogenea

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_\mathrm{o} \tag{1}$$

dove $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$. Per assicurare il legame di causalità tra le correnti ed il potenziale, la soluzione deve essere soggetta a condizioni al contorno che ne assicurino l'unicità. Se consideriamo un volume indefinito, contenente un mezzo omogeneo, è possibile trovare in modo semplice un'espressione generale del potenziale utilizzando la *funzione di Green* del problema. La determinazione di tale funzione è riconducibile alla *soluzione fondamentale* del problema, cioè alla soluzione dell'equazione (1) nel caso la sorgente sia una delta di Dirac [1] . In questo caso, il legame di causalità tra il potenziale e le sorgenti è assicurato se all'infinito l'andamento del potenziale è tale per cui i campi elettromagnetici da esso dedotti soddisfano la condizione di radiazione. Consideriamo pertanto l'equazione

$$\nabla^2 \vec{A}_\mathrm{o} + k^2 \vec{A}_\mathrm{o} = -\vec{u}\, \delta(\vec{r})$$

dove $\vec{u}$ è il versore che definisce la direzione della sorgente concentrata nell'origine del sistema di riferimento ($\vec{r}$, come al solito, è il vettore posizione).

È possibile assumere che la direzione della *soluzione fondamentale* $\vec{A}_\mathrm{o}$ sia $\vec{u}$ ovunque e porre $\vec{A}_\mathrm{o} = \vec{u}\, G$, dove lo scalare G soddisfa l'equazione

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\vec{r}) \tag{2}$$

Dalle proprietà della delta di Dirac, indicando con V_o un qualunque volume che non comprende l'origine del sistema di riferimento e con V_a un volume sferico, di raggio a, centrato sull'origine si trova

$$\begin{aligned} \int_{V_o} \left(\nabla^2 G + k^2 G \right) dV &= 0 \\ \int_{V_a} \left(\nabla^2 G + k^2 G \right) dV &= -1 \end{aligned}$$

La soluzione di queste equazioni è facilmente deducibile in un sistema di coordinate sferico $\{O, r, \vartheta, \varphi\}$ con l'origine O coincidente con la posizione della sorgente. Infatti in un tale sistema di riferimento, per simmetria, G è funzione della sola distanza dall'origine (r), ed è indipendente dalla direzione (ϑ, φ). Dalla prima relazione, data la genericità del volume V_o, risulta [2]

$$\frac{\partial^2 (r\, G)}{\partial r^2} + k^2 (r\, G) = 0 \qquad r \neq 0$$

[1] senza utilizzare il formalismo rigoroso della teoria delle distribuzioni, per la seguente deduzione è sufficiente utilizzare la proprietà della delta di Dirac in uno spazio tridimensionale:

$$\int_V f(\vec{r})\, \delta(\vec{r})\, dV = \begin{cases} f(\vec{r} = 0) & \text{se il volume } V \text{ comprende l'origine del sistema di riferimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[2] normalmente l'espressione del Laplaciano in coordinate sferiche si trova scritta nella forma

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \dots$$

dove i puntini indicano termini che comprendono derivate rispetto a ϑ o a φ che nel caso considerato sono nulle. Sviluppando le derivate rispetto ad r, è immediato verificare che l'espressione seguente è del tutto equivalente.

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\, G)}{\partial r^2} + \dots$$

che ha come soluzione

$$r\,G = c_1\, e^{-jkr} + c_2\, e^{jkr}$$

con c_1 e c_2 costanti, da cui

$$G = c_1\, \frac{e^{-jkr}}{r} + c_2\, \frac{e^{jkr}}{r}$$

I due termini di cui si compone l'espressione di G rappresentano due onde sferiche (le superfici equifase sono evidentemente superfici a r costante): la prima rappresenta un'onda che si propaga in verso centrifugo ($-\mathrm{Im}(\nabla(-jkr)) = \vec{u}_r\, k$), la seconda un'onda che si propaga in verso centripeto ($-\mathrm{Im}(\nabla(jkr)) = -\vec{u}_r\, k$). È evidente che solo il primo termine può dipendere in modo causale dalla sorgente collocata nell'origine. Per questo motivo escludiamo il termine e^{jkr}/r, così come qualunque altro termine derivante dalla soluzione dell'equazione omogenea, che, evidentemente, non può avere nulla a che fare con la sorgente. Dalla seconda relazione, ricordando che il Laplaciano di una funzione scalare è la divergenza del gradiente e usando il teorema della divergenza, si ottiene:

$$\int_{S_a} \nabla G \cdot \vec{u}_r\, dS + k^2 \int_{V_a} G\, dV = -1$$

dove S_a è la superficie sferica di raggio a. Il primo termine dà [3]

$$\int_{S_a} \nabla G \cdot \vec{u}_r\, dS = -4\,\pi\, c_1\, (1 + j\, ka)\, e^{-jka}$$

il secondo termine dà [4]

$$k^2 \int_{V_a} G\, dV = 4\,\pi\, c_1 \left[(1 + j\, ka)\, e^{-jka} - 1\right]$$

dalla somma si ricava $-4\pi\, c_1 = -1$ e quindi

$$G = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

Pertanto la soluzione fondamentale è

$$\vec{A}_{\mathrm{o}}(\vec{r}) = \vec{u}\; G(r) = \vec{u}\; \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

Generalizzando il risultato ottenuto, pensando di avere come sorgente ancora una delta di Dirac, ma posta nel punto "sorgente" $\vec{r}\,'$ anziché nell'origine, il potenziale nel punto "campo" $\vec{r}$ risulta

$$\vec{A}_{\mathrm{o}}(\vec{r}) = \vec{u}\; G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \vec{u}\; \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

dove $R = |\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,|$ è la distanza tra il punto campo ed il punto sorgente. Risulta così definita la funzione di Green $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ che soddisfa l'equazione

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{3}$$

Nel caso generale, quando la sorgente è la densità di corrente impressa $\vec{J}_{\mathrm{o}}$, definita entro il volume finito V, possiamo considerare tale sorgente come l'insieme di infinite sorgenti elementari $\mu\, \vec{J}_{\mathrm{o}}(\vec{r}\,')\, dV\,'$

3

$$\nabla\, \frac{e^{-jkr}}{r}\Big|_{r=a} = \left(-\,j\,k \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r^2}\right)_{r=a} \vec{u}_r = -(1 + j\, ka)\, \frac{e^{-jka}}{a^2}\; \vec{u}_r$$

4

$$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} r^2\, \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_0^a e^{-jkr}\, r dr \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{k^2}\left[(1{+}jkr)e^{-j\,kr}\right]_0^a\; 2\;\, 2\pi = \frac{4\pi}{k^2}\left[(1{+}jka)e^{-j\,ka}{-}1\right]$$

ciascuna concentrata nell'intorno del punto $\vec{r}\,' \in V$, d'intensità, direzione e fase definite dall'intensità, dalla direzione e dalla fase di $\mu\,\vec{J}_\mathrm{o}(\vec{r}\,')$. Per la sovrapposizione degli effetti, possiamo scrivere

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \int_V \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\,\vec{J}_\mathrm{o}(\vec{r}\,')\,dV\,' \tag{4}$$

dove l'integrazione è fatta rispetto alle coordinate del punto sorgente. Allo stesso risultato si perviene in modo meno intuitivo ma più formale, utilizzando l'identità

$$-\mu\,\vec{J}_\mathrm{o}(\vec{r}) = \mu \int_V \vec{J}_\mathrm{o}(\vec{r}\,')(-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'))\,dV\,'$$

usando le uguaglianze (1) e (3), si ottiene

$$\underbrace{(\nabla^2+k^2)\vec{A}(\vec{r})}_{-\mu\,\vec{J}_\mathrm{o}(\vec{r})} = \mu \int_V \vec{J}_\mathrm{o}(\vec{r}\,')\,\underbrace{(\nabla^2+k^2)\,G(\vec{r},\vec{r}\,')}_{-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}\;dV\,'$$

Dato che l'operatore (∇^2+k^2) opera sulle coordinate del punto campo, mentre l'integrazione è rispetto alle coordinate del punto sorgente, l'operatore a secondo membro può essere portato fuori dal segno d'integrazione, ottenendo

$$(\nabla^2+k^2)\,\vec{A}(\vec{r}) = (\nabla^2+k^2)\,\mu \int_V \vec{J}_\mathrm{o}(\vec{r}\,')\,G(\vec{r},\vec{r}\,')\;dV\,'$$

Questa relazione implica che $\vec{A}(\vec{r})$ è uguale al secondo membro della (4) a meno di termini $\vec{A}\,'$ che soddisfano l'equazione omogenea $(\nabla^2+k^2)\,\vec{A}\,' = 0$, termini che comunque dobbiamo escludere dalla soluzione perché non connessi causalmente alle sorgenti.
L'unica soluzione che assicura la dipendenza di causalità è quindi la (4).