

Diffusione da corpi metallici

Si consideri il campo monocromatico (\vec{E}, \vec{H}) irraggiato dalla distribuzione di corrente impressa \vec{J}_o , in un dielettrico ideale illimitato e omogeneo che riempie tutto lo spazio tranne il volume V , occupato da un corpo metallico.

Assumendo, per semplicità, che il conduttore sia un conduttore perfetto, si ha che all'interno di V il campo è identicamente nullo, mentre nel mezzo omogeneo illimitato esterno a V , il campo (\vec{E}, \vec{H}) soddisfa le equazioni di Maxwell non omogenee (per la presenza della sorgente \vec{J}_o), soddisfa la condizione di radiazione all'infinito e la condizione di parete elettrica sulla superficie S del corpo, dove è presente la densità superficiale di corrente $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}$, essendo \vec{n} la normale a S uscente da V .

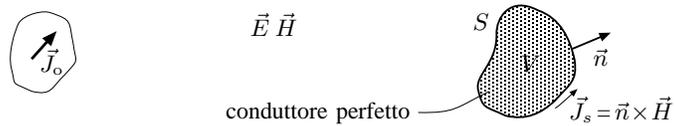
Se si immagina di rimuovere il corpo metallico, rendendo così il mezzo omogeneo ovunque, ma mantenendo sulla superficie S la densità superficiale di corrente \vec{J}_s come corrente impressa, il campo generato dall'insieme delle sorgenti \vec{J}_o e \vec{J}_s nel mezzo reso omogeneo coincide esattamente con il campo (\vec{E}, \vec{H}) della situazione reale. Infatti esso soddisfa tutte le condizioni dovute, compresa quella relativa alla discontinuità della componente tangente di \vec{H} sulla lamina di corrente.

Il campo sostenuto dalla distribuzione di corrente \vec{J}_o nel mezzo omogeneo è, per definizione, il **campo incidente** (\vec{E}_i, \vec{H}_i) sul corpo metallico, il campo sostenuto dalla distribuzione di corrente superficiale \vec{J}_s nel mezzo omogeneo esterno a V è, per definizione, il **campo diffuso** (\vec{E}_d, \vec{H}_d) dal corpo metallico e il campo totale (\vec{E}, \vec{H}) è la somma dei due contributi.

È da notare che sul campo diffuso non è possibile eseguire misure dirette, in quanto le uniche situazioni reali sono:

- il campo incidente (\vec{E}_i, \vec{H}_i) , quando la sorgente \vec{J}_o agisce in assenza del corpo metallico
- il campo totale (\vec{E}, \vec{H}) , quando la sorgente \vec{J}_o agisce in presenza del corpo metallico

misure sul campo diffuso possono essere effettuate solo come differenza tra misure sul campo totale e quello incidente



Situazione reale: la sorgente \vec{J}_o irradia in presenza del corpo metallico



Situazione equivalente: le sorgenti \vec{J}_o e \vec{J}_s irradiano nel mezzo omogeneo

$$\vec{E}_d = \vec{E} - \vec{E}_i$$

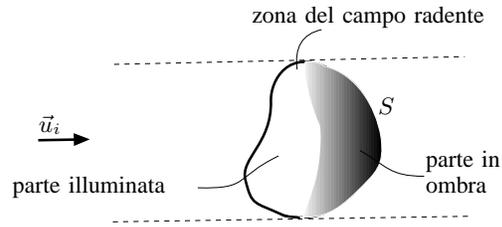
$$\vec{H}_d = \vec{H} - \vec{H}_i$$

Il calcolo del campo diffuso, in generale, non è semplice dato che la sua sorgente, la distribuzione di corrente \vec{J}_s in generale non è nota, e dipende dal campo totale \vec{H} che a sua volta dipende da \vec{J}_s .

Se però il corpo metallico si trova nella zona di radiazione della sorgente \vec{J}_o e si è interessati alle caratteristiche del campo diffuso solo nella zona lontana del corpo diffondente, allora sono possibili delle approssimazioni che semplificano di molto il problema.

Infatti, in questo caso, il campo incidente può essere approssimato, nella zona occupata dal corpo metallico, con un'onda localmente piana uniforme, caratterizzata unicamente dalla direzione di propagazione \vec{u}_i , dalla densità di potenza trasportata $W_i = |\vec{E}_i|^2 / 2\eta$ e dalla sua polarizzazione:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \sqrt{2\eta W_i} e^{-jk\vec{u}_i \cdot \vec{r}} \vec{p}_i \\ \vec{H}_i &= \sqrt{2W_i/\eta} e^{-jk\vec{u}_i \cdot \vec{r}} \vec{u}_i \times \vec{p}_i \end{aligned}$$



inoltre, in questo caso, è possibile approssimare il fenomeno della diffusione da parte del corpo metallico come un fenomeno locale per cui:

- in ciascun punto della parte illuminata della superficie S il campo elettrico diffuso ha componente normale uguale a quella del campo elettrico incidente e componente tangente opposta, mentre il campo magnetico diffuso ha componente normale opposta a quella del campo magnetico incidente e componente tangente uguale ¹ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(\vec{r}) &= 2\vec{n} \cdot \vec{n} \cdot \vec{E}_i(\vec{r}) - \vec{E}_i(\vec{r}) \\ \vec{H}_d(\vec{r}) &= \vec{H}_i(\vec{r}) - 2\vec{n} \cdot \vec{n} \cdot \vec{H}_i(\vec{r}) \end{aligned} \quad \vec{r} \in S$$

- in ciascun punto della parte in ombra della superficie S , l'intensità del campo totale è molto minore di quella nella parte illuminata e può essere trascurata.

Si ottiene pertanto

$$\vec{J}_s = \begin{cases} 2\vec{n} \times \vec{H}_i & \text{nella zona illuminata} \\ 0 & \text{nella zona in ombra} \end{cases}$$

Questo procedimento è noto come **approssimazione dell'ottica fisica** e consente di ricavare la densità di corrente \vec{J}_s e quindi il campo diffuso dalla conoscenza del solo campo incidente.

Una volta nota la sorgente del campo diffuso, i campi diffusi nella zona lontana e l'intensità di radiazione ad esso collegata possono essere calcolati con le solite approssimazioni:

- assunto un sistema di riferimento sferico (r, ϑ, φ) con centro in O, centro della sfera di raggio minimo che racchiude \vec{J}_s
- calcolato il vettore di radiazione

$$\vec{N}(\vartheta, \varphi) = \int_S e^{jk\vec{r}' \cdot \vec{u}_r} \vec{J}_s(\vec{r}') dS'$$

- per $r \gg D, r > \frac{2D^2}{\lambda}, r \gg \lambda$, dove D è il diametro della sfera di raggio minimo che racchiude \vec{J}_s , i campi elettrico e magnetico e l'intensità di radiazione sono dati da

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(r, \vartheta, \varphi) &= -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\vec{N}(\vartheta, \varphi) - \vec{u}_r \vec{u}_r \cdot \vec{N}(\vartheta, \varphi)) \\ \vec{H}_d(r, \vartheta, \varphi) &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \vec{u}_r \times \vec{N}(\vartheta, \varphi) \\ K_d(\vartheta, \varphi) &= \frac{\eta}{8\lambda^2} (|\vec{N}(\vartheta, \varphi)|^2 - |\vec{u}_r \cdot \vec{N}(\vartheta, \varphi)|^2) \end{aligned}$$

¹

Questa è la stessa approssimazione che fa l'ottica geometrica ed è ciò che avviene in ciascun punto della superficie piana indefinita di un conduttore perfetto, quando sulla sua superficie incide un'onda piana uniforme.

L'approssimazione è, a rigore, valida solo se i raggi di curvatura della superficie S sono molto maggiori della lunghezza d'onda e se si considerano punti a distanza sufficientemente grande dalla zona in cui il campo incidente è radente alla superficie.

È noto però, che il campo lontano è abbastanza insensibile ai dettagli fini della distribuzione della corrente, per cui il campo lontano che si calcola senza considerare approssimazioni più accurate della distribuzione di corrente sugli eventuali spigoli e nella zona di campo radente, risulta in generale sufficientemente accurato.

Se si indica con ϑ_i, φ_i la direzione di provenienza del campo incidente \vec{u}_i nel sistema di riferimento solidale con il corpo metallico, si definisce **sezione radar “monostatica”** del corpo diffondente il rapporto tra l'intensità di radiazione del campo diffuso nella direzione di provenienza del segnale moltiplicata per 4π e la densità di potenza del campo incidente W_i :

$$\sigma(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{4\pi K(\vartheta_i, \varphi_i)}{W_i}$$

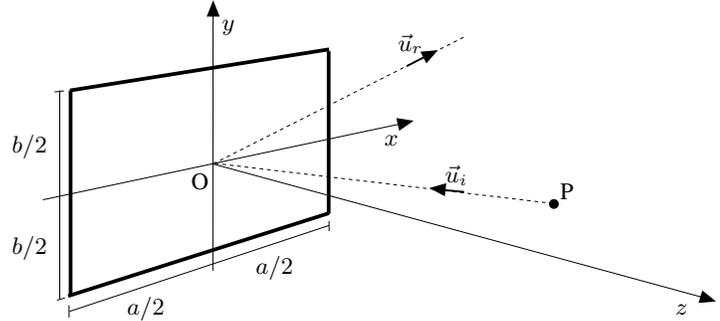
La quantità $4\pi K(\vartheta_i, \varphi_i)$ rappresenta la potenza totale che il corpo metallico diffonderebbe se generasse in tutte le direzioni la stessa intensità di radiazione che genera nella direzione di provenienza del segnale. Il rapporto tra la potenza che il corpo metallico diffonderebbe se diffondesse in modo isotropico la stessa intensità di radiazione che diffonde nella generica direzione (ϑ, φ) e la densità di potenza incidente prende invece il nome di **sezione radar “bistatica”** relativa alle direzioni (ϑ, φ) e (ϑ_i, φ_i) :

$$\sigma(\vartheta, \varphi, \vartheta_i, \varphi_i) = \frac{4\pi K(\vartheta, \varphi)}{W_i}$$

Le sezioni radar sono parametri tipici del corpo diffondente: dipendono principalmente dalla sua forma e dimensioni, dipendono anche dalla direzione di provenienza del segnale e dalla sua polarizzazione, non dipendono invece dall'intensità del campo incidente.

Campo diffuso da uno specchio piano

Consideriamo uno specchio piano di forma rettangolare di dimensioni a, b posto sul piano xy e supponiamo che la sorgente, posta nel punto P, sul piano xz , sia sufficientemente lontana da poter approssimare l'illuminazione con quella che darebbe un'onda piana uniforme che si propaga da P a O, centro del sistema di riferimento, e il cui campo elettrico è polarizzato linearmente lungo l'asse y e ha intensità E_o :



$$\vec{E}_i = \vec{u}_y E_o e^{-jk\vec{u}_i \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{u}_i \times \vec{E}}{\eta}$$

$$\vec{u}_i = -\vec{u}_x \sin \vartheta_i - \vec{u}_z \cos \vartheta_i$$

Con queste ipotesi, e seguendo l'approssimazione dell'ottica fisica assumiamo che la densità di corrente superficiale sulla faccia illuminata dello specchio sia data da ²

$$\vec{J}_s = 2\vec{u}_z \times \vec{H} \Big|_{z=0} = 2\vec{u}_y \frac{E_o \cos \vartheta_i}{\eta} e^{jk \sin \vartheta_i x}$$

Sovrapposto al sistema di coordinate cartesiane $\{x, y, z\}$, per rappresentare i campi di radiazione consideriamo il sistema di coordinate sferiche $\{r, \vartheta, \varphi\}$ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$) con asse polare coincidente con l'asse z . Risulta:

$$\vec{r}' = \vec{u}_x x' + \vec{u}_y y' \quad \vec{u}_r = \vec{u}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{u}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \vec{u}_z \cos \vartheta$$

ponendo

$$\begin{aligned} u &= \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \sin \vartheta \cos \varphi \\ v &= \vec{u}_r \cdot \vec{u}_y = \sin \vartheta \sin \varphi & (u^2 + v^2 \leq 1) \\ u_i &= \sin \vartheta_i \\ v_i &= 0 \end{aligned}$$

il vettore di radiazione relativo alla densità di corrente risulta

$$\begin{aligned} \vec{N} &= 2\vec{u}_y \frac{E_o \cos \vartheta_i}{\eta} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{jk(u x' + v y')} e^{jk u_i x'} dx' dy' \\ &= 2\vec{u}_y \frac{E_o \cos \vartheta_i}{\eta} a b \operatorname{sinc}(\pi a (u + u_i)/\lambda) \operatorname{sinc}(\pi b v/\lambda) \quad \operatorname{sinc}(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \end{aligned}$$

da cui risulta

$$\begin{aligned} \vec{E}_d &= -j ab E_o \cos \vartheta_i \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} \sqrt{1 - v^2} \operatorname{sinc}(\pi a (u + u_i)/\lambda) \operatorname{sinc}(\pi b v/\lambda) \vec{p} \\ \vec{H}_d &= -j ab \frac{E_o}{\eta} \cos \vartheta_i \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} \sqrt{1 - v^2} \operatorname{sinc}(\pi a (u + u_i)/\lambda) \operatorname{sinc}(\pi b v/\lambda) \vec{u}_r \times \vec{p} \end{aligned}$$

2

$$\vec{u}_z \times (\vec{u}_i \times \vec{u}_y) = \underbrace{\vec{u}_i (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_y)}_0 - \underbrace{\vec{u}_y (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_i)}_{-\cos \vartheta_i}$$

$$K_d = \frac{a^2 b^2}{\lambda^2} \frac{|E_o|^2}{2\eta} \cos^2 \vartheta_i (1 - v^2) \operatorname{sinc}^2(\pi a (u + u_i)/\lambda) \operatorname{sinc}^2(\pi b v/\lambda)$$

dove \vec{p} è il vettore di polarizzazione del campo elettrico ³:

$$\vec{p} = \frac{\vec{N} - \vec{u}_r \vec{u}_r \cdot \vec{N}}{\sqrt{|\vec{N}|^2 - |\vec{u}_r \cdot \vec{N}|^2}} = \frac{\vec{u}_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \vec{u}_\varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}}$$

Il campo elettrico è polarizzato linearmente: dall'espressione di \vec{p} si deduce immediatamente che la polarizzazione del campo elettrico, perpendicolare alla direzione di propagazione e appartenente ad un piano passante per l'asse y , è secondo i meridiani della sfera che ha come asse polare l'asse y , la polarizzazione del campo magnetico, perpendicolare alla direzione di propagazione e al campo elettrico è secondo i paralleli della stessa sfera.

L'andamento della funzione $\operatorname{sinc}^2(\xi)$ è riportato in figura, il suo valore massimo è 1 per $\xi = 0$. Pertanto il valore della massima intensità di radiazione si per $u = -u_i$ e $v = 0$, che implica $\vartheta = \vartheta_i$, $\varphi = \varphi_i + \pi$, cioè nella direzione speculare rispetto all'asse z della direzione di propagazione del campo incidente sullo specchio e vale

$$K_{d_{\max}} = \frac{a^2 b^2}{\lambda^2} \frac{|E_o|^2}{2\eta} \cos^2 \vartheta_i$$

Infine, la sezione radar bistatica dello specchio risulta

$$\begin{aligned} \sigma(u, v, u_i, v_i) &= \sigma_{\max}(u_i, v_i) (1 - v^2) \operatorname{sinc}^2(\pi a (u + u_i)/\lambda) \operatorname{sinc}^2(\pi b v/\lambda) \\ \sigma_{\max}(u_i, v_i) &= a^2 b^2 \frac{4\pi}{\lambda^2} \cos^2 \vartheta_i \end{aligned}$$

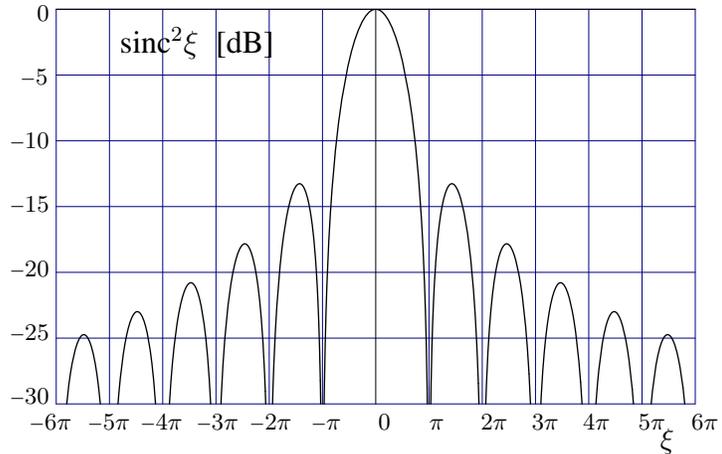
I diagrammi di radiazione del campo diffuso, uguali a quelli della sezione radar normalizzata, sono pertanto diagrammi della funzione

$$\frac{K_d(u, v)}{K_{d_{\max}}} = \frac{\sigma(u, v, u_i, v_i)}{\sigma_{\max}(u_i, v_i)} = (1 - v^2) \operatorname{sinc}^2(\pi a (u + u_i)/\lambda) \operatorname{sinc}^2(\pi b v/\lambda) \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

È evidente che, indipendentemente dalle dimensioni dello specchio si ha uno zero di radiazione per $v = \pm 1$, cioè in direzione dell'asse y , nel verso positivo e negativo.

Dato che u e v sono in modulo non superiori a 1, gli argomenti delle funzioni sinc^2 sono compresi tra

$$\begin{aligned} -\xi'_a &\leq \pi a (u + u_i)/\lambda \leq \xi''_a \\ -\xi_b &\leq \pi b v/\lambda \leq \xi_b = \pi b/\lambda \\ \xi'_a &= \pi a(1 - u_i)/\lambda \\ \xi''_a &= \pi a(1 + u_i)/\lambda \end{aligned}$$



Avendo assunto che le dimensioni dello specchio siano molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda, negli intervalli $-\xi'_a, \xi''_a, -\xi_b, \xi_b$ sono compresi diversi zeri e diversi massimi della funzione sinc^2 . Oltre al lobo

³

essendo $\vec{u}_y = \vec{u}_r \sin \vartheta \sin \varphi + \vec{u}_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \vec{u}_\varphi \cos \varphi$, risulta

$$\begin{aligned} \vec{u}_y - \vec{u}_r \vec{u}_r \cdot \vec{u}_y &= \vec{u}_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \vec{u}_\varphi \cos \varphi \\ |\vec{u}_y - \vec{u}_r \vec{u}_r \cdot \vec{u}_y|^2 &= \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = (1 - \sin^2 \vartheta) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 - v^2 \end{aligned}$$

principale, il diagramma di radiazione presenta molti altri lobi, di intensità massima via via decrescente all'aumentare dell'angolo tra la direzione del lobo e la direzione del lobo principale. Le direzioni di zero di radiazione sono quelle per cui

$$\pi a (u + u_i)/\lambda = m \pi \quad \pi b v/\lambda = n \pi \quad m, n \text{ interi diversi da } 0$$

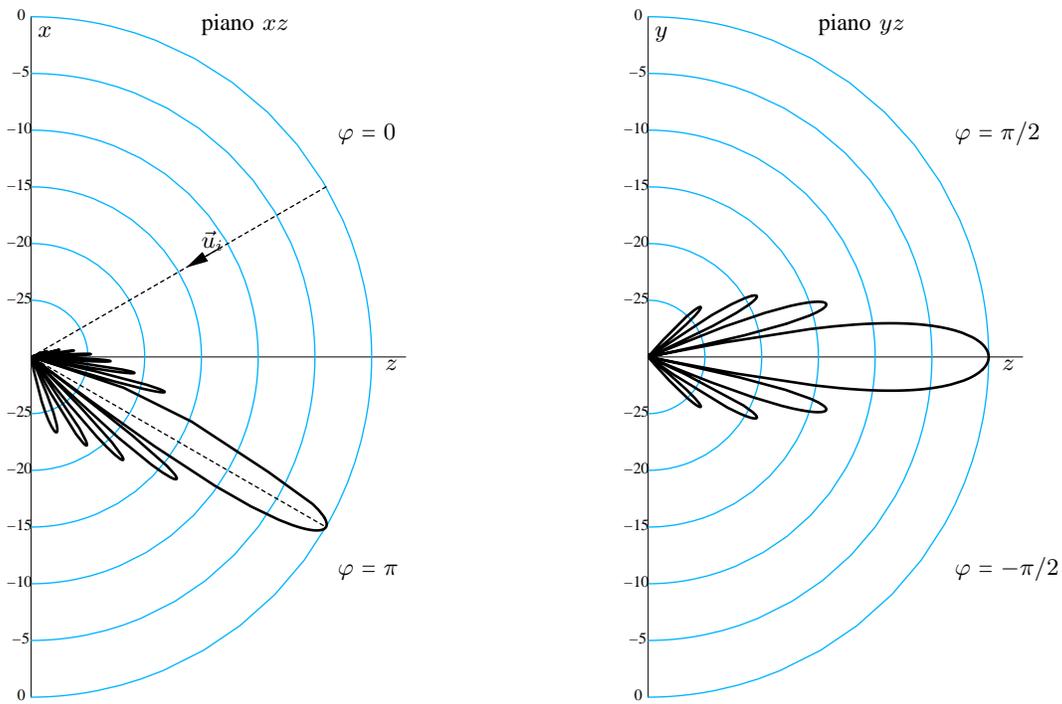
Le direzioni di zero che delimitano il lobo principale nel piano xz sono individuate da $u = -u_i \pm \lambda/a$, e l'angolo compreso tra queste due direzioni, cioè l'apertura angolare Δ_{xz} del lobo principale è data da ⁴

$$\Delta_{xz} = \arcsin(-u_i + \lambda/a) - \arcsin(-u_i - \lambda/a) \approx \frac{2 \lambda}{a \cos \vartheta_i}$$

In modo analogo si trova che l'apertura angolare Δ_{yz} del lobo principale sul piano yz è

$$\Delta_{yz} = 2 \arcsin \lambda/b \approx \frac{2 \lambda}{b}$$

Risulta evidente dal confronto con la radiazione da un'apertura rettangolare che, per quanto riguarda l'intensità di radiazione e l'ampiezza dei lobi, non sono direttamente le dimensioni dello specchio a, b che contano, quanto piuttosto la loro proiezione sul piano perpendicolare alla direzione di massima radiazione $a \cos \vartheta_i, b$, o, indifferentemente, al piano perpendicolare alla direzione di provenienza del campo incidente.



diagrammi di diffusione (dB) di uno specchio piano di dimensioni $a = 2b = 10 \lambda$, illuminato da un'onda piana uniforme proveniente nella direzione $\vartheta_i = \pi/6, \varphi_i = 0$.

In particolare, nel caso considerato, la sezione radar monostatica risulta

$$\begin{aligned} \sigma(u_i, v_i) &= \sigma_{\max}(u_i, v_i) \operatorname{sinc}^2(\pi a 2 \sin \vartheta_i/\lambda) = 0 \\ \sigma_{\max}(u_i, v_i) &= a^2 b^2 \frac{4 \pi}{\lambda^2} \cos^2 \vartheta_i = 23561.9 \lambda^2 \end{aligned}$$

4

$\arcsin(\sin x + \delta) \approx x + \frac{\delta}{\cos x} + \frac{\sin x}{2 \cos^3 x} \delta^2 + \dots \quad (-\pi/2 + |\delta| < x < \pi/2 - |\delta|, \quad |\delta| \ll 1)$