Reciprocità

Si consideri un volume V, delimitato dalla superficie S e contenente un mezzo lineare stazionario omogeneo e isotropo [1] e si considerino due diversi campi monocromatici alla stessa frequenza $\vec{E}_a, \vec{H}_a$ e $\vec{E}_b, \vec{H}_b$, sostenuti da due diverse distribuzioni di densità di corrente impressa elettrica e magnetica: rispettivamente $\vec{J}_a, \vec{M}_a$ e $\vec{J}_b, \vec{M}_b$. Tra i campi e le sorgenti vale la seguente relazione di reciprocità:

$$\int_S \vec{E}_a \times \vec{H}_b \cdot \vec{n}\, ds + \int_V \left(\vec{E}_a \cdot \vec{J}_b - \vec{H}_a \cdot \vec{M}_b\right) dV = \int_S \vec{E}_b \times \vec{H}_a \cdot \vec{n}\, ds + \int_V \left(\vec{E}_b \cdot \vec{J}_a - \vec{H}_b \cdot \vec{M}_a\right) dV \qquad (1)$$

dimostrazione:

I campi soddisfano le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} -\nabla \times \vec{E}_a &= j\omega\mu\, \vec{H}_a + \vec{M}_a & \qquad -\nabla \times \vec{E}_b &= j\omega\mu\, \vec{H}_b + \vec{M}_b \\ \nabla \times \vec{H}_a &= j\omega\epsilon\, \vec{E}_a + \vec{J}_a & \qquad \nabla \times \vec{H}_b &= j\omega\epsilon\, \vec{E}_b + \vec{J}_b \end{aligned}$$

sommando membro a membro l'ultima equazione moltiplicata scalarmente per $\vec{E}_a$ e la prima equazione moltiplicata scalarmente per $\vec{H}_b$, si ottiene

$$\underbrace{\vec{E}_a \cdot \nabla \times \vec{H}_b - \vec{H}_b \cdot \nabla \times \vec{E}_a}_{-\nabla\cdot(\vec{E}_a \times \vec{H}_b)} = j\omega\epsilon\, \vec{E}_a \cdot \vec{E}_b + \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b + j\omega\mu\, \vec{H}_b \cdot \vec{H}_a + \vec{H}_b \cdot \vec{M}_a$$

analogamente, sommando membro a membro la terza equazione moltiplicata scalarmente per $\vec{E}_b$ e la seconda equazione moltiplicata scalarmente per $\vec{H}_a$, si ottiene

$$\underbrace{\vec{E}_b \cdot \nabla \times \vec{H}_a - \vec{H}_a \cdot \nabla \times \vec{E}_b}_{-\nabla\cdot(\vec{E}_b \times \vec{H}_a)} = j\omega\epsilon\, \vec{E}_b \cdot \vec{E}_a + \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a + j\omega\mu\, \vec{H}_a \cdot \vec{H}_b + \vec{H}_a \cdot \vec{M}_b$$

dal confronto delle due relazioni si ottiene

$$\nabla \cdot (\vec{E}_a \times \vec{H}_b) + \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b + \vec{H}_b \cdot \vec{M}_a = \nabla \cdot (\vec{E}_b \times \vec{H}_a) + \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a + \vec{H}_a \cdot \vec{M}_b$$

integrando sul volume V e applicando il teorema della divergenza, si ottiene la relazione di reciprocità (1).

Nel caso di volumi infiniti, il cui contorno comprende una superficie sferica di raggio infinito su cui i campi soddisfano la condizione di radiazione, si può dimostrare (vedi G. Conciauro, L. Perregrini: *Fondamenti di onde elettromagnetiche*, McGraw-Hill, Milano, 2003, par. 8.12 pag. 291) che gli integrali su tale superficie che compaiono nei due membri della relazione di reciprocità sono uguali. Pertanto in questi casi la superficie S che compare nella relazione (1) è solo la parte al finito del contorno del volume V (relazione di reciprocità nella forma di Lorentz).

Dal teorema di reciprocità si deduce l'importante proprietà di simmetria delle matrici di impedenza e ammettenza dei circuiti che comprendono solo mezzi reciproci.
A questo fine, si consideri un generico circuito ad N porte $(S_1, S_2, \ldots, S_N)$, e si applichi il teorema di reciprocità ad un volume V che racchiude al suo interno il circuito considerato e il cui contorno ∂V, intersechi le line che connettono il circuito con l'esterno esattamente nelle sezioni in cui sono definite le porte. Si

[1] l'ipotesi di omogeneità del mezzo non è necessaria, ed è fatta solo per semplificare la dimostrazione: l'estensione della dimostrazione del teorema a mezzi non omogenei è abbastanza semplice. Invece, l'ipotesi che il mezzo sia isotropo è restrittiva e potrebbe essere estesa ai mezzi anisotropi la cui permittività elettrica e permeabilità magnetica sono descritte da matrici simmetriche.
Esistono però mezzi anisotropi che hanno matrice di permittività e/o matrice di permeabilità non simmetrica: per questi mezzi le relazioni di reciprocità non sono verificate.
I mezzi sono detti *reciproci* o *non reciproci* secondo se le relazioni di reciprocità sono verificate o no.

supponga inoltre che il circuito considerato possa comunicare con l'esterno solo attraverso le porte, così che sia possibile assumere che sulla superficie ∂V, al di fuori delle sezioni delle porte $S_1, S_2, \ldots, S_N$, i campi elettromagnetici verifichino la condizione di parete elettrica o magnetica: $\vec{E}_a \times \vec{H}_b \cdot \vec{n} = 0$ e $\vec{E}_b \times \vec{H}_a \cdot \vec{n} = 0$. Indifferentemente se linee di connessione del circuito con l'esterno siano in linea bifilare [2] , coassiale, guida d'onda $\ldots$, siano $\vec{e}_i, \vec{h}_i$ i vettori modali normalizzati relativi all'unico modo che si propaga nella linea in cui è definita la porta i-esima.

Per verificare la simmetria della matrice di impedenza, si ricorda innanzitutto che in un circuito ad N porte, l'impedenza Z_{ij} è il rapporto tra la tensione V_i, sulla porta i-esima, e la corrente I_j, sulla porta j-esima, nel caso in cui le correnti su tutte le altre porte sono nulle (tutte le porte, tranne la j-esima sono *aperte*) [3] . In questo caso risulta

$$V_i = Z_{ij}\, I_j$$

Pertanto, si consideri come a) la situazione in cui il circuito è alimentato dalla porta i con tutte le altre porte *aperte* e come situazione b) quella in cui il circuito è alimentato dalla porta j con tutte le altre porte *aperte*. Applicando il teorema di reprocità si trova che in entrambe i casi, gli integrali di volume non danno contributo, non essendoci densità di corrente impressa né elettrica né magnetica all'interno del volume V. L'integrale di superficie che coinvolge il campo magnetico $\vec{H}_a$ è diverso da zero solo sulla porta i-esima, l'unica *non aperta*, e vale:

$$\int_{\partial V} \vec{E}_b \times \vec{H}_a \cdot \vec{n}\, ds \;=\; V_i^b\, I_i^a \int_{S_i} \vec{e}_i \times \vec{h}_i \cdot \vec{n}_i\, ds \;=\; V_i^b\, I_i^a \;=\; Z_{ij}\, I_j^b\, I_i^a$$

allo stesso modo l'integrale di superficie che coinvolge il campo magnetico $\vec{H}_b$ è diverso da zero solo sulla porta j-esima, unica *non aperta*, e vale:

$$\int_{\partial V} \vec{E}_a \times \vec{H}_b \cdot \vec{n}\, ds \;=\; V_j^a\, I_j^b \int_{S_j} \vec{e}_j \times \vec{h}_j \cdot \vec{n}_j\, ds \;=\; V_j^a\, I_j^b \;=\; Z_{ji}\, I_i^a\, I_j^b$$

dall'uguaglianza dei due integrali si ricava

$$Z_{ij} \;=\; Z_{j\,i}$$

dall'arbitrarietà degli indici i e j deriva la simmetria della matrice d'impedenza.

In modo duale, ricordando che l'ammettenza Y_{ij} è il rapporto tra la corrente I_i sulla porta i-esima, e la tensione V_j, sulla porta j-esima, nel caso in cui le tensioni su tutte le altre porte sono nulle (tutte le altre porte sono *corto-circuitate*), si verifica la simmetria della matrice di ammettenza

$$Y_{ij} = Y_{j\,i}$$

[2] in realtà la dimostrazione è logicamente corretta solo nel caso in cui tutte le linee di trasmissione su cui sono definite le porte sono schermate, perchè in questo caso tutte le superfici $S_1, S_2, \ldots, S_N$ sono finite. L'estensione al caso di linee di trasmissione non schermate, per le quali la superficie della porta non è ben definita (è teoricamente infinita), è possibile solo se si può ipotizzare che la limitazione della superficie su cui è definita la porta non modifichi in modo apprezzabile la relativa impedenza o ammettenza.

[3] dalla definizione di matrice di impedenza

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \ldots \\ V_i \\ \ldots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \ldots & Z_{1j} & \ldots & Z_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{i1} & \ldots & Z_{ij} & \ldots & Z_{iN} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{N1} & \ldots & Z_{Nj} & \ldots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \ldots \\ I_j \\ \ldots \\ I_N \end{bmatrix}$$

si trova

$$V_i \;=\; \sum_{k=1}^{N} Z_{ik}\, I_k$$

e, solo se $I_k = 0$ per tutti i $k \neq j$, risulta $V_i = Z_{ij}\, I_j$.