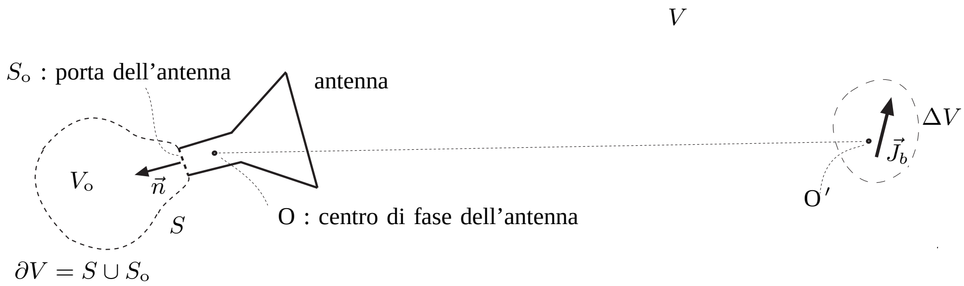
Antenne Riceventi

Per determinare le caratteristiche di un'antenna ricevente ci si avvale del teorema di reciprocità applicato al campo elettromagnetico irradiato dall'antenna quando è usata in trasmissione ed al campo cui essa è soggetta quando è usata in ricezione.
Consideriamo un'antenna nello spazio libero, e consideriamo lo spazio V, delimitato dalla superficie ∂V che esclude da tutto lo spazio il volume V_o occupato dal generatore che alimenta l'antenna quando è usata come trasmittente, oppure dal carico cui essa è connessa, quando è usata come ricevente.
Assumiamo che il generatore ed il carico possano scambiare potenza con lo spazio esterno solo attraverso l'antenna. A tal fine assumiamo che l'antenna sia collegata al trasmettitore o al carico attraverso una linea di trasmissione schermata: linea bifilare schermata, cavo coassiale, guida d'onda, …[1] , d'ora in poi chiamata genericamente linea di trasmissione, e assumiamo che la porta dell'antenna coincida con la sezione S_o di tale linea [2]. Assumiamo inoltre che la superficie ∂V, contorno di V_o, intersechi la linea di trasmissione proprio sulla porta dell'antenna. Infine, sempre per escludere la possibilità di scambi energetici diretti tra il volume V_o e lo spazio V, assumiamo per semplicità che sulla superficie S, complementare di S_o a δV i campi elettromagnetici soddisfino la condizione di parete elettrica.
Nessuna ipotesi viene fatta circa l'adattamento dell'antenna alla linea.



Consideriamo le due situazioni di campo:

a) campo irraggiato dall'antenna nello spazio libero V, quando l'antenna è alimentata da un generatore posto in V_o, in assenza di qualunque sorgente nello spazio V,
b) campo irraggiato dalla densità di corrente elettrica $\vec{J}_b$, localizzata nel volume ΔV, di centro O$'$ e di dimensioni trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda λ, in presenza dell'antenna, quando essa è collegata tramite la linea di trasmissione ad un carico posto all'interno di V_o.

La scelta della sorgente del caso b) è molto particolare, ma se facciamo l'ulteriore assunzione che il punto O$'$ si trovi nella zona di radiazione dell'antenna, come si vedrà, potremo ottenere un risultato indipendente dalla particolarità della sorgente scelta.

[1] la teoria sviluppata è rigorosa nel caso in cui la linea di trasmissione che collega l'antenna al generatore o al carico è completamente schermata, ma può essere estesa anche al caso di linee di trasmissione non schermate (linee bifilari, miscostrisce, …), se rimane valida l'ipotesi che gli scambi di energia tra il generatore e lo spazio libero e tra lo spazio libero ed il carico avvengano solo attraverso l'antenna.

[2] la definizione precisa della porta dell'antenna è importante nel caso di antenne funzionanti ad alta frequenza, quando la lunghezza della linea può essere grande rispetto alla lunghezza d'onda e la tensione e la corrente lungo la linea possono differire in modo significativo tra sezioni poco distanti.
In queste considerazioni si è implicitamente assunto che il campo elettromagnetico sulla porta dell'antenna sia definito unicamente dal modo dominante della linea di trasmissione.

I campi $\vec{E}_a$, $\vec{H}_a$ ed $\vec{E}_b$, $\vec{H}_b$ nel volume V soddisfano le equazioni di Maxwell e le condizioni al contorno:

a) $\nabla \times \vec{E}_a = -j\omega\mu\vec{H}_a$ b) $\nabla \times \vec{E}_b = -j\omega\mu\vec{H}_b$

$\nabla \times \vec{H}_a = j\omega\epsilon\vec{E}_a$ $\nabla \times \vec{H}_b = j\omega\epsilon\vec{E}_b + \vec{J}_b$

condizioni di radiazione all'infinito

$\vec{n} \times \vec{E}_a = 0$ su S $\vec{n} \times \vec{E}_b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_a = V_a\,\vec{e} \\ \vec{H}_a = -I_a\,\vec{h} \end{array}\right\} \quad \text{sulla porta } S_o \text{ dell'antenna} \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{E}_b = V_b\,\vec{e} \\ \vec{H}_b = I_b\,\vec{h} \end{array}\right.$$

dove V_a, I_a e V_b, I_b sono le tensioni e correnti (modali) sulla porta dell'antenna quando essa è usata rispettivamente come trasmittente e ricevente e $\vec{e}$, $\vec{h}$ sono i vettori modali normalizzati [3] dell'unico modo che si propaga sulla linea che collega l'antenna al generatore o al carico.
Si nota che il segno meno nella definizione di $\vec{H}_a$ su S_o esplicita il fatto che nel caso a) la potenza fluisce nel verso opposto a quello della normale $\vec{n}$ a δV.
Il teorema di reciprocità nella forma di Lorentz, applicato al volume V con i campi descritti, afferma che:

$$\int_{\partial V} \vec{E}_a \times \vec{H}_b \cdot \vec{n}\, dS + \int_V \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b\, dV = \int_{\partial V} \vec{E}_b \times \vec{H}_a \cdot \vec{n}\, dS$$

In base alle definizioni date, si trova immediatamente che gli integrali di superficie sono limitati alla sola porta dell'antenna e valgono:

$$\int_{S_o} \vec{E}_a \times \vec{H}_b \cdot \vec{n}\, dS = V_a\, I_b \qquad \int_{S_o} \vec{E}_b \times \vec{H}_a \cdot \vec{n}\, dS = -V_b\, I_a$$

Per la valutazione dell'integrale di volume, assumiamo come origine del sistema di riferimento il punto O, *centro di fase dell'antenna* [4] e, avendo supposto che O′ si trovi nella zona di radiazione, possiamo rappresentare il campo $\vec{E}_a$ in O′ nella forma:

$$\vec{E}_a = \sqrt{\frac{\eta\, P_{in}}{2\,\pi}}\; \frac{e^{-jkr}}{r}\; \sqrt{g}\;\; e^{j\psi}\; \vec{p}$$

dove:

- P_{in} è la potenza in ingresso all'antenna,
- r è la distanza del punto O′ dall'origine O,
- g è il guadagno dell'antenna nella direzione di O′,
- ψ è il termine di fase del campo irradiato dall'antenna nella direzione di O′,
- $\vec{p}$ è la polarizzazione del campo irradiato dall'antenna nella direzione di O′,

Dato che il volume ΔV ha dimensioni trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda, risulta:

$$\int_V \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b\, dV = \sqrt{\frac{\eta\, P_{in}}{2\,\pi}}\, \frac{e^{-jkr}}{r}\; \sqrt{g}\; e^{j\psi}\; \vec{p} \cdot \vec{J}_b\; \Delta V$$

[3] la normalizzazione implica

$$\int_{S_o} \vec{e} \times \vec{h} \cdot \vec{n}\; dS = 1$$

[4] anche questa precisazione è importante nel caso di antenne funzionanti ad alta frequenza, quando le dimensioni dell'antenna possono essere molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda.

Indicando con $\vec{u}_r$ il versore nella direzione OO$'$ e introducendo il campo elettrico incidente sull'antenna, cioè il campo elettrico nel punto O quando la sorgente localizzata in O$'$ irraggia nello spazio libero, in assenza dell'antenna [5]:

$$\vec{E}_{\rm inc} = -j\eta\,\frac{e^{-jkr}}{2\lambda\, r}\left(\vec{J}_b - \vec{u}_r\,(\vec{J}_b\cdot\vec{u}_r)\right)\,\Delta V$$

dato che per le proprietà del campo di radiazione $\vec{p}\cdot\vec{u}_r = 0$, risulta:

$$\vec{p}\cdot\vec{E}_{\rm inc} = -j\eta\,\frac{e^{-jkr}}{2\lambda\, r}\;\vec{p}\cdot\vec{J}_b\;\Delta V$$

da cui, ricavando l'espressione di $\vec{p}\cdot\vec{J}_b\,\Delta V$ in funzione di $\vec{p}\cdot\vec{E}_{\rm inc}$ e sostituendola nell'espressione dell'integrale di volume, otteniamo:

$$\int_V \vec{E}_a\cdot\vec{J}_b\,dV = \sqrt{\frac{2\,P_{in}}{\eta\,\pi}}\;\lambda\,\sqrt{g}\;e^{j(\psi+\pi/2)}\;\vec{p}\cdot\vec{E}_{\rm inc}$$

Infine, uguagliando i valori calcolati dei due termini del teorema di reciprocità ed evidenziando la polarizzazione del campo incidente $\vec{E}_{\rm inc} = E_{\rm inc}\,\vec{p}_{\rm inc}$, otteniamo:

$$V_a\,I_b + V_b\,I_a = \sqrt{\frac{2\,P_{in}}{\eta\,\pi}}\;\lambda\,\sqrt{g}\;e^{j(\psi-\pi/2)}\;E_{\rm inc}\,\vec{p}\cdot\vec{p}_{\rm inc} \tag{1}$$

In questa espressione non compare più nessuna traccia della tipologia della sorgente agente nel volume V: unico dato ad essa collegato rimane il campo elettrico incidente sull'antenna, che però possiamo pensare generato da una qualunque altra sorgente (anche di grandi dimensioni) sempre posta nello spazio V, con l'unico vincolo che l'antenna si trovi comunque nella zona di radiazione di tale sorgente.

Un'antenna usata come ricevente, si comporta come un generatore rispetto al circuito cui è connessa.
Se il parametro naturale d'ingresso dell'antenna quando è usata in trasmissione è la corrente d'ingresso, come avviene ad esempio nel caso dei dipoli, allora è conveniente assumere la fase della corrente d'ingresso all'antenna come riferimento per la fase del campo irradiato, cioè assumere I_a reale positiva, e caratterizzare l'antenna trasmittente dal punto di vista circuitale con la sua impedenza d'ingresso

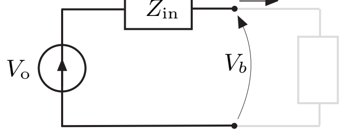
$$\begin{aligned} V_a &= Z_{\rm in} I_a = (R_{\rm in} + jX_{\rm in})\,I_a \\ P_{\rm in} &= \frac{1}{2}\,R_{\rm in}\,|\,I_a|^2 = \frac{1}{2}\,R_{\rm in}\,I_a^2 \end{aligned}$$

Con queste assunzioni la relazione (1) diventa

$$Z_{\rm in}\,I_b + V_b = \sqrt{\frac{R_{in}}{\eta\,\pi}}\;\lambda\,\sqrt{g}\;e^{j(\psi_I-\pi/2)}\;E_{\rm inc}\,\vec{p}\cdot\vec{p}_{\rm inc}$$

dove ψ_I è il termine di fase del campo irradiato dall'antenna nella direzione di O$'$, riferito alla fase della corrente in ingresso all'antenna. Questa relazione, indipendente da I_a, dice che indipendentemente dal rapporto $V_b\,/\,I_b$, cioè dall'impedenza del carico cui l'antenna è collegata, la tensione $V_{\rm o} = Z_{\rm in}\,I_b + V_b$ è costante e quindi possiamo rappresentare il generatore equivalente dell'antenna ricevente con un circuito tipo Thevenin in cui $V_{\rm o}$ è la tensione a vuoto e l'impedenza d'uscita coincide con $Z_{\rm in}$

$$V_{\rm o} = \sqrt{\frac{R_{\rm in}}{\eta\,\pi}}\;\lambda\,\sqrt{g}\;e^{j(\psi_I-\pi/2)}\;E_{\rm inc}\,\vec{p}\cdot\vec{p}_{\rm inc}$$



[5] avendo assunto che le dimensioni di ΔV sono trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda, è chiaro che, se O$'$ si trova nella zona di radiazione dell'antenna, anche O si trova nella zona di radiazione della sorgente posta in O$'$.

Se invece è la tensione il parametro naturale d'ingresso dell'antenna, allora è conveniente assumere la sua fase come riferimento di fase per i campi irraggiati (V_a reale positiva) e caratterizzare l'antenna dal punto di vista circuitale con l'ammettenza d'ingresso

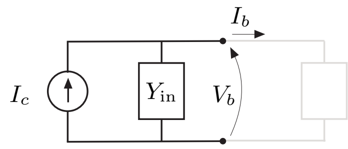
$$\begin{aligned} I_a &= Y_{\text{in}} V_a = (G_{\text{in}} + jB_{\text{in}})\, V_a \\ P_{\text{in}} &= \frac{1}{2}\, G_{\text{in}}\, |\, V_a|^2 = \frac{1}{2}\, G_{\text{in}}\, V_a^2 \end{aligned}$$

Con queste assunzioni la relazione (1) diventa

$$I_b + Y_{\text{in}}\, V_b = \sqrt{\frac{G_{in}}{\eta\, \pi}}\ \lambda\ \sqrt{g}\ e^{j(\psi_V - \pi/2)}\ E_{\text{inc}}\ \vec{p} \cdot \vec{p}_{\text{inc}}$$

dove ψ_V è il termine di fase del campo irradiato dall'antenna nella direzione di O$'$, riferito alla fase della tensione in ingresso all'antenna. Questa relazione, indipendente da V_a , dice che indipendentemente dal carico cui l'antenna è collegata, la corrente $I_c = I_b + Y_{\text{in}}\, V_b$ è costante e quindi possiamo rappresentare il generatore equivalente dell'antenna ricevente con un circuito tipo Norton in cui I_c è la corrente di cortocircuito e l'ammettenza d'uscita coincide con Y_{in} [6]

$$I_c = \sqrt{\frac{G_{\text{in}}}{\eta\, \pi}}\ \lambda\ \sqrt{g}\ e^{j(\psi_V - \pi/2)}\ E_{\text{inc}}\ \vec{p} \cdot \vec{p}_{\text{inc}}$$



La potenza disponibile sulla porta dell'antenna ricevente, cioè la potenza che l'antenna può fornire ad un carico adattato, è data da:

$$P_d = \frac{|V_{\text{o}}|^2}{8\, R_{\text{in}}} \quad \text{nel primo caso} \qquad\qquad P_d = \frac{|I_c|^2}{8\, G_{\text{in}}} \quad \text{nel secondo caso}$$

in ogni caso si ottiene

$$P_d = \frac{\lambda^2}{4\pi}\, g\ \frac{|E_{\text{inc}}|^2}{2\, \eta}\ |\, \vec{p} \cdot \vec{p}_{\text{inc}}\, |^2$$

- Il prodotto di $\lambda^2/4\pi$ per il guadagno dell'antenna nella generica direzione prende il nome di *area efficace* dell'antenna nella stessa direzione
$$A_{\text{eff}}(\vartheta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi}\, g(\vartheta, \varphi)$$
- $W_{\text{inc}} = \dfrac{|E_{\text{inc}}|^2}{2\, \eta}$ è la densità di potenza incidente sull'antenna ricevente,
- il fattore adimensionale $\tau = |\, \vec{p} \cdot \vec{p}_{\text{inc}}\, |^2$ non negativo e non superiore a 1, prende il nome di *fattore di polarizzazione* o *perdita per polarizzazione*: il valore di τ espresso in dB è un un numero negativo (perdita) o, al limite, nullo che indica la diminuzione di potenza disponibile a causa del disadattamento dell'antenna alla polarizzazione dell'onda incidente.

Si può quindi scrivere in ogni caso che la potenza disponibile sulla porta d'uscita di un'antenna ricevente è data dal prodotto della densità di potenza incidente per l'area efficace dell'antenna ricevente e per la perdita per polarizzazione

$$P_d = W_{\text{inc}}\, A_{\text{eff}}\ \tau$$

[6] non è difficile verificare che i due circuiti tipo Thevenin e tipo Norton sono del tutto equivalenti.

Date le proprietà dei vettori di polarizzazione

$$\vec{p} \cdot \vec{p}^* = 1 \qquad\qquad \vec{p} \cdot \vec{p}^*_{\mathrm{cross}} = 0$$

dove $\vec{p}_{\mathrm{cross}} = \vec{u}_r \times \vec{p}^*$ è, per definizione, la *polarizzazione incrociata* della polarizzazione $\vec{p}$, si ha *adattamento in polarizzazione*, cioè τ assume il valore massimo pari a 1, solo se $\vec{p}_{\mathrm{inc}}$ e $\vec{p}^{\,*}$ sono uguali [7] . Questo significa che per avere adattamento in polarizzazione, nel caso di polarizzazione lineare, $\vec{p}_{\mathrm{inc}}$ e $\vec{p}$ devono essere parallele, mentre, nel caso di polarizzazione ellittica o circolare, le ellissi che rappresentano $\vec{p}_{\mathrm{inc}}$ e $\vec{p}$ devono essere uguali, ma percorse in verso opposto. Ricordando che il verso di percorrenza (orario o antiorario) dell'ellisse di polarizzazione dipende dal punto di vista, e che il campo irraggiato dall'antenna ed il campo su essa incidente si propagano in versi opposti, il risultato precedente si può anche esprimere dicendo che si ha adattamento in polarizzazione quando la polarizzazione dell'onda incidente e la polarizzazione del campo che l'antenna genera nella stessa direzione sono uguali, ciascuna vista nel proprio verso di propagazione.
Allo stesso modo si può affermare che per avere *disadattamento completo in polarizzazione* ($\tau = 0$) è necessario che $\vec{p}_{\mathrm{inc}}$ sia uguale alla polarizzazione incrociata della polarizzazione del campo che l'antenna irraggia nella direzione di provenienza del campo incidente.

[7] L'uguaglianza tra polarizzazioni è da intendersi sempre a meno di un fattore di fase, dato che le polarizzazioni stesse sono definite a meno di un fattore di fase arbitrario.