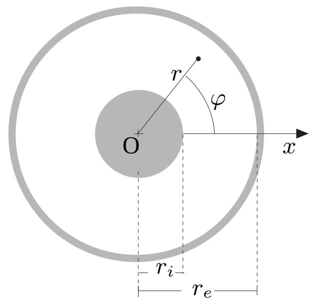
Calcolo dell'attenuazione del modo TEM in un cavo coassiale

Consideriamo ad esempio il cavo coassiale RG142 che ha le seguenti caratteristiche

impedenza caratteristica	Z_c	=	50	Ω
diametro conduttore interno	$2\,r_i$	=	0.94	mm
dielettrico PTFE				
fattore di velocità	$1\,/\,n$	=	0.66	



assumiamo:

conducibilità dei conduttori	σ	=	$2\;10^7$	S / m
angolo di perdita elettrico	θ_e	=	$3\;10^{-4}$	
angolo di perdita magnetico	θ_m		trascurabile	

I campi ideali, nel caso si propaghi una sola onda, sono dati da

$$\vec{E}^{\mathrm{o}}(r,\varphi,z) \;=\; \vec{e}^{\;\mathrm{o}}(r,\varphi)\, I^{\mathrm{o}}(z)\, Z_c$$
$$\vec{H}^{\mathrm{o}}(r,\varphi,z) \;=\; \vec{h}^{\;\mathrm{o}}(r,\varphi)\, I^{\mathrm{o}}(z)$$

dove

$$\vec{e}^{\;\mathrm{o}} = \frac{1}{r\;\ln\left(r_e/r_i\right)}\,\vec{u}_r \qquad \text{vettore modale elettrico}$$
$$\vec{h}^{\;\mathrm{o}} = \frac{1}{2\pi\, r}\,\vec{u}_\varphi \qquad \text{vettore modale magnetico}$$
$$Z_c = \frac{\eta}{2\pi}\;\ln\left(r_e/r_i\right) \qquad \text{impedenza caratteristica}$$

dall'espressione dell'impedenza caratteristica si ricava

$$r_e = r_i\; e^{2\pi Z_c/\eta} = 1.6 \text{ mm}$$

Ci proponiamo di calcolare la costante di attenuazione

$$\alpha \;=\; \alpha_c + \alpha_d \;=\; \frac{dP_c}{2Pdz} \;+\; \frac{dP_d}{2Pdz}$$

dove α_c tiene conto delle perdite nei conduttori e α_d quelle nei dielettrici.
La potenza trasportata nella generica sezione z è [1] :

$$P = \frac{Z_c}{2}\;|\,I^{\mathrm{o}}(z)|^2$$

La potenza dissipata sui conduttori tra la sezione z e $z+dz$ è [2] :

$$dP_c = \frac{1}{2}\;dz\;|\,I^{\mathrm{o}}(z)|^2\;\frac{R_s}{2\pi r_e}\left(1+\frac{r_e}{r_i}\right)$$

dove $R_s = \dfrac{1}{\sigma\delta}$ è la resistenza superficiale dei conduttori e $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\,\mu\,\sigma\,f}}$ è lo spessore di penetrazione.

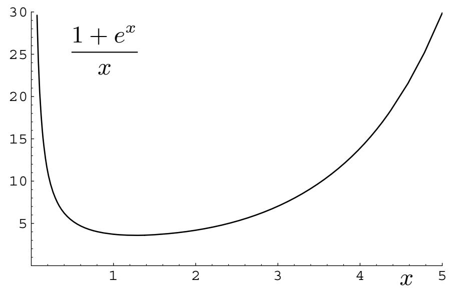
---

[1]
$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_S \vec{E}\times\vec{H}^*\cdot\vec{u}_z\;ds = \frac{Z_c}{2}\;|\,I^{\mathrm{o}}(z)|^2\underbrace{\int_S \vec{e}^{\;\mathrm{o}}\times\vec{h}^{\;\mathrm{o}}\cdot\vec{u}_z\;ds}_{1}$$

[2]
$$dP_c = \frac{1}{2}\;dz\int_c R_s\,|\,\vec{J}_s\,|^2 dc = \frac{1}{2}\;dz\int_c R_s\,|\,\vec{H}\,|^2 dc$$
$$= \frac{1}{2}\;dz\,R_s\,|\,I^{\mathrm{o}}(z)|^2\left(\int_{c_{\text{esterno}}}|\,\vec{h}^{\;\mathrm{o}}\,|^2_{r=r_e}\;dc + \int_{c_{\text{interno}}}|\,\vec{h}^{\;\mathrm{o}}\,|^2_{r=r_e}\;dc\right) = \frac{1}{2}\;dz\,R_s\,|\,I^{\mathrm{o}}(z)|^2\left(\frac{2\pi\,r_e}{(2\pi\,r_e)^2}+\frac{2\pi r_i}{(2\pi r_i)^2}\right)$$

Risulta pertanto

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_c}\,\frac{1}{4\pi r_e}\Big(1+\frac{r_e}{r_i}\Big)$$



Riscrivendo questa espressione in funzione del parametro adimensionale:

$$x = \ln(r_e/r_i) = 2\pi Z_c/\eta$$

si ottiene

$$\alpha_c\, 2\; r_e\, \eta/R_s = \frac{1+e^x}{x}$$

da questa espressione si capisce come, una volta fissate le dimensioni del cavo (r_e) e i materiali che lo compongono (η e R_s per ciascun valore della frequenza), ci siano dei valori ottimali del parametro x e quindi dell'impedenza caratteristica che rendono minima l'attenuazione. Infatti, al variare del rapporto r_e/r_i, la costante di attenuazione può assumere valori molto grandi sia per $r_e/r_i \approx 1$ (a causa del fattore x a denominatore), sia per r_e/r_i molto grande (a causa del termine esponenziale a numeratore).
Dal diagramma, si vede che i valori ottimali di x sono compresi tra 1 e 2, per cui i valori ottimali di Z_c, assumendo una costante dielettrica relativa intorno a 2, risultano compresi tra circa 40 e 80 Ω.

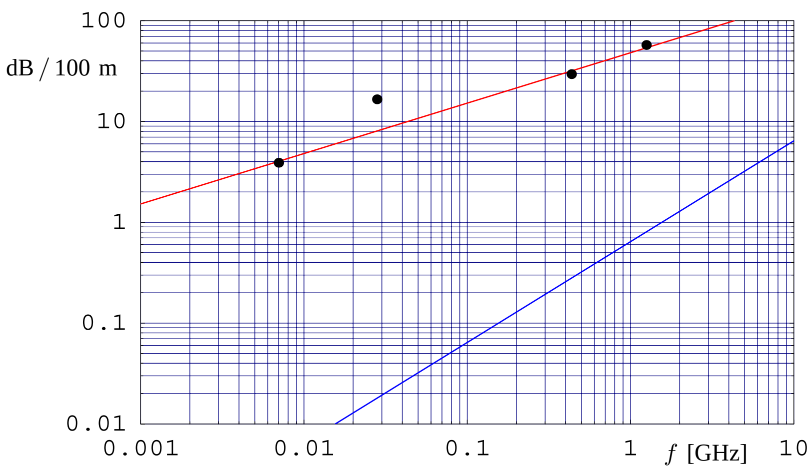
La potenza dissipata nel dielettrico tra la sezione z e $z+dz$ è [3]

$$dP_d = P\,dz\frac{2\pi}{\lambda}\;(\tan\theta_e + \tan\theta_m)$$

e quindi

$$\alpha_d = \frac{\pi}{\lambda}\,(\tan\theta_e + \tan\theta_m)$$

Il diagramma seguente riporta il contributo all'attenuazione del cavo, in dB ogni 100 m, dovuto alla dissipazione di potenza nei conduttori (linea rossa) e quello dovuto alla dissipazione di potenza nel dielettrico (linea blu), confrontato con alcuni valori sperimentali, (punti neri). Si nota che nella banda di frequenze considerata la perdita sui conduttori è decisamente prevalente rispetto a quella nel dielettrico.



[3] tenendo conto che $\omega\,\varepsilon = k/\eta = \dfrac{2\pi}{\lambda\,\eta}$ e $\omega\,\mu = k\,\eta = \dfrac{2\pi\,\eta}{\lambda}$, risulta:

$$\begin{aligned}
dP_d &= \frac{1}{2}\,\omega\,dz\Big(\epsilon\tan\theta_e\int_S|\vec{E}\,|^2 ds + \mu\tan\theta_m\int_S|\vec{H}\,|^2 ds\Big)\\
&= dz\,\frac{\pi}{\lambda}\Big(\,\frac{Z_c^2}{\eta}\,\tan\theta_e\,|\,I^{\rm o}(z)|^2\underbrace{\int_S|\vec{e}^{\;\rm o}|^2 ds}_{\eta/Z_c} + \eta\,\tan\theta_m\,|\,I^{\rm o}(z)|^2\underbrace{\int_S|\vec{h}^{\;\rm o}|^2 ds}_{Z_c/\eta}\Big)\\
&= \underbrace{Z_c\,|\,I^{\rm o}(z)|^2}_{2\,P}\,dz\,\frac{\pi}{\lambda}\,(\tan\theta_e + \tan\theta_m)
\end{aligned}$$