LEGGI FONDAMENTALI

Lo studio dell'interazione elettromagnetica è basato sul concetto di **campo elettromagnetico**

le variazioni del campo si propagano nello spazio con velocità finita

le variazioni spazio – temporali del campo costituiscono le **onde elettromagnetiche**

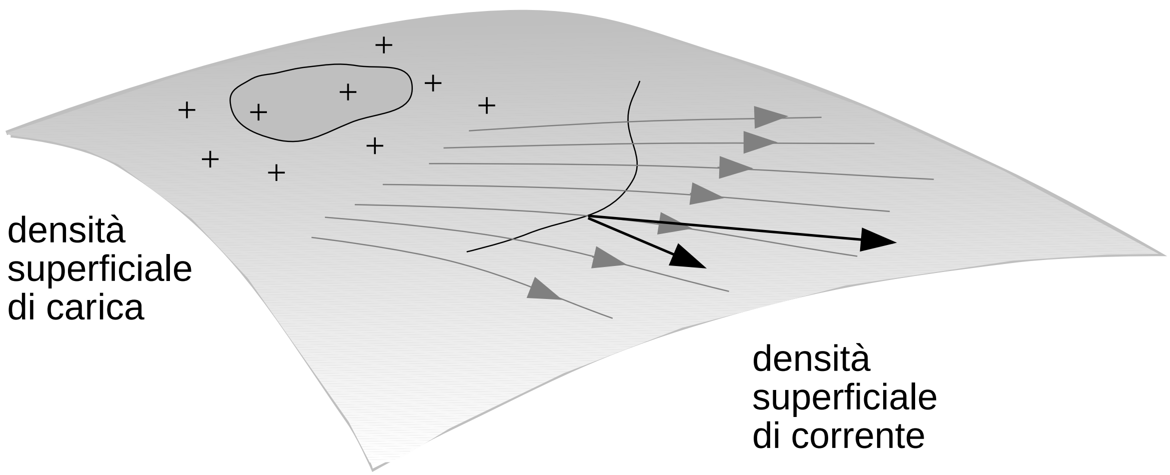
Il campo elettromagnetico macroscopico è descritto dai seguenti quattro vettori dipendenti, in generale, dalla posizione $\vec{r}$ e dal tempo t:

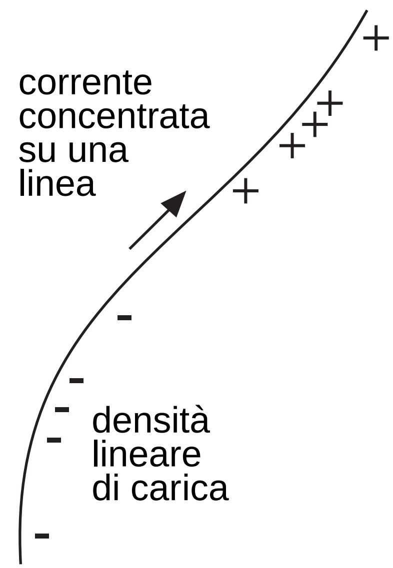
$\vec{\mathcal{E}}$	=	$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$	**campo elettrico**	[V / m]
$\vec{\mathcal{H}}$	=	$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)$	**campo magnetico**	[A / m]
$\vec{\mathcal{D}}$	=	$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t)$	**induzione elettrica o spostamento elettrico**	[C / m^2]
$\vec{\mathcal{B}}$	=	$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$	**induzione magnetica**	[T]

i vettori di campo sono collegati alle densità di carica e di corrente

$\vec{\mathcal{J}}$	=	$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t)$	**densità di corrente**	[A / m^2]
ρ	=	$\rho(\vec{r},t)$	**densità di carica**	[C / m^3]

A volte le cariche e / o le correnti sono confinate in un volume in cui una o più dimensioni sono estremamente più piccole delle dimensioni caratteristiche del problema; queste situazioni sono utilmente schematizzate considerando cariche e correnti “concentrate” su una superficie, su una linea o su un punto





$\vec{\mathcal{J}}_s$	=	$\vec{\mathcal{J}}_s(\vec{r}, t)$	**densità superficiale di corrente**	[A / m]	$\vec{r} \in S$
ρ_s	=	$\rho_s(\vec{r}, t)$	**densità superficiale di carica**	[C / m^2]	
i_ℓ	=	$i_\ell(\vec{r}, t)$	**corrente concentrata su una linea**	[A]	$\vec{r} \in \ell$
ρ_ℓ	=	$\rho_\ell(\vec{r}, t)$	**densità lineare di carica**	[C / m]	
i_p	=	$i_p(\vec{r}, t)$	**corrente puntiforme**	[A]	$\vec{r} \equiv P$
q_p	=	$q_p(\vec{r}, t)$	**carica puntiforme**	[C]	

I vettori che descrivono il campo elettromagnetico sono funzioni continue del tempo e continue quasi-ovunque della posizione

il campo può essere discontinuo

- sulle superfici di discontinuità del mezzo
- in corrispondenza di cariche e/o di correnti concentrate su superfici

il campo può divergere

- sugli spigoli e sulle punte eventualmente presenti nelle superfici di discontinuità del mezzo
- in corrispondenza di cariche e/o di correnti concentrate su linee o punti

Nei punti regolari (punti di continuità dei campi) i vettori di campo sono collegati tra loro e alle densità di carica e di corrente dalle **equazioni di Maxwell**:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{J}}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

Integrando le equazioni di Maxwell in un volume V, e usando la formula del rotore ed il teorema della divergenza, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_S \vec{n} \times \vec{\mathcal{H}}\, dS &= \frac{d}{dt} \int_V \vec{\mathcal{D}}\, dV + \int_V \vec{\mathcal{J}}\, dV \\
\int_S \vec{n} \times \vec{\mathcal{E}}\, dS &= -\frac{d}{dt} \int_V \vec{\mathcal{B}}\, dV \\
\int_S \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dS &= q \\
\int_S \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}\, dS &= 0
\end{aligned}
$$

dove S indica il contorno di V, $\vec{n}$ la sua normale uscente e q la carica totale contenuta in V:

$$q = \int_V \rho \, dV \qquad [\mathrm{C}]$$

Se si considera invece una superficie orientata S, e si integra su essa la componente normale di entrambe i membri delle prime due equazioni di Maxwell, con l'uso del teorema di Stokes, si ottiene

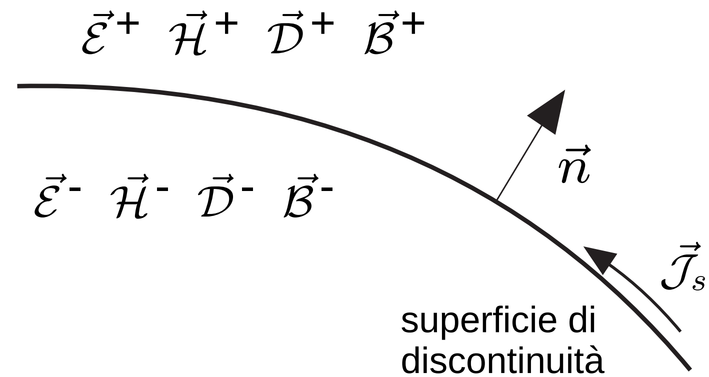
$$\oint_c \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d}{dt}\int_s \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}\, dS + i$$ *legge di Ampère-Maxwell*

$$\oint_c \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{n}\, dS$$ *legge di Faraday-Neumann*

dove i rappresenta la corrente che fluisce attraverso la superficie S

$$i = \int_s \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n}\, dS \qquad [\mathrm{A}]$$

Sulle superfici di discontinuità il rotore e la divergenza non possono essere definiti, e le equazioni di Maxwell sono sostituite dalle relazioni



$$\vec{n} \times (\vec{\mathcal{H}}^+ - \vec{\mathcal{H}}^-) = \vec{\mathcal{J}}_s \qquad \vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}^+ - \vec{\mathcal{E}}^-) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{D}}^+ - \vec{\mathcal{D}}^-) = \rho_s \qquad \vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}^+ - \vec{\mathcal{B}}^-) = 0$$

deducibili dalla forma integrale delle equazioni di Maxwell

È uso generale distinguere due contributi alle correnti e alle relative densità volumetriche, superficiali o lineari:

$$i = i_{\mathsf{O}} + i_{\mathsf{C}} \qquad\qquad \vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}_{\mathsf{O}} + \vec{\mathcal{J}}_{\mathsf{C}}$$

dove

- $i_{\mathsf{O}},\ \vec{\mathcal{J}}_{\mathsf{O}}$ indicano **correnti impresse** e **densità di corrente impressa**, cioè quantità note a priori, che fungono da sorgenti del campo

- $i_{\mathsf{C}},\ \vec{\mathcal{J}}_{\mathsf{C}}$ indicano **correnti di conduzione** e **densità di corrente di conduzione**: quantità dipendenti dalle caratteristiche del mezzo, che devono essere determinare assieme ai vettori del campo

Lo studio del campo elettromagnetico richiede la determinazione dei quattro vettori del campo, equivalenti a 12 funzioni scalari, più le eventuali densità di corrente e di carica dipendenti dalle caratteristiche del mezzo

le equazioni di Maxwell equivalgono a 8 equazioni scalari: insufficienti per determinare il campo, anche in quei problemi in cui le densità di carica e di corrente sono solo impresse

le equazioni di Maxwell non contengono informazioni riguardo all'interazione tra il campo elettromagnetico ed il mezzo da esso permeato

L'interazione tra il campo elettromagnetico ed il mezzo è descritta dai vettori di polarizzazione

$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t)$ **intensità di polarizzazione elettrica** $[\mathrm{C}/\mathrm{m}^2]$

$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}, t)$ **intensità di polarizzazione magnetica** $[\mathrm{A}/\mathrm{m}]$ (o magnetizzazione)

che sono legati ai vettori di campo dalle relazioni

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \, \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \qquad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{B}}/\mu_0 - \vec{\mathcal{M}}$$

$\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ $[\mathrm{H}/\mathrm{m}]$ **permeabilità magnetica del vuoto**

$\epsilon_0 = \mu_0^{-1}\,c^{-2} \approx \frac{10^{-9}}{36\,\pi}$ $[\mathrm{F}/\mathrm{m}]$ **permittività del vuoto**

$c = 2.99792458\,10^8 \approx 3\,10^8$ $[\mathrm{m}/\mathrm{s}]$ **velocità della luce nel vuoto**

Le informazioni su come il mezzo reagisce alla presenza del campo elettromagnetico sono fornite dalle **equazioni costitutive** che descrivono come l'intensità di polarizzazione elettrica, l'intensità di polarizzazione magnetica e la densità di corrente di conduzione dipendono dai vettori di campo in modo del tutto equivalente, le **equazioni costitutive** possono anche dare un legame diretto tra i vettori di campo corrispondenti

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t)$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t)$$

$$\vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{C}} = \vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{C}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, t)$$

Le caratteristiche elettromagnetiche del mezzo possono essere influenzate anche da altri fattori, di natura meccanica, termica, ... a loro volta eventualmente dipendenti dal campo elettromagnetico

La forma delle equazioni costitutive dei mezzi materiali varia da caso a caso, secondo

- il sistema di riferimento in cui si studia il campo
- la natura del mezzo
- l’intensità e la rapidità delle variazioni spazio – temporali del campo che si vuole studiare

in dipendenza delle caratteristiche, ciascun mezzo può essere classificato come:

omogeneo / **non omogeneo**
stazionario / **non stazionario**
lineare / **non lineare**
dispersivo / **non dispersivo** { nello spazio / nel tempo
isotropo / **anisotropo**

nel caso del **vuoto**, che non si polarizza, non si magnetizza, né conduce, le equazioni costitutive sono

$$\vec{\mathcal{P}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon_o \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{B}} = \mu_o \vec{\mathcal{H}}$$

$$\vec{\mathcal{J}}_c = 0$$

Se le caratteristiche del mezzo sono uguali in tutti i punti, il mezzo si dice **omogeneo** e le equazioni costitutive non dipendono esplicitamente dalla posizione

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t)$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, t)$$

$$\vec{\mathcal{J}}_C = \vec{\mathcal{J}}_C(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, t)$$

Se il mezzo è **immobile** rispetto al sistema di riferimento, normalmente la polarizzazione elettrica dipende solo dal campo elettrico e quella magnetica solo dal campo magnetico.
In questo caso le equazioni costitutive sono del tipo:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, t)$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{H}}, t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{H}}, t)$$

$$\vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{C}} = \vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{C}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, t)$$

Se il mezzo non è in movimento ed è possibile trascurare la dipendenza delle caratteristiche del mezzo da tutti i fattori non elettromagnetici, le caratteristiche del mezzo non dipendono direttamente dal tempo e si dice che il mezzo è **stazionario**.
In questo caso le equazioni costitutive sono del tipo:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}})$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{H}}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{H}})$$

$$\vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{C}} = \vec{\mathcal{J}}_{\mathrm{C}}(\vec{r}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$$

Se le equazioni costitutive di un mezzo sono lineari, il mezzo si dice **lineare**

se ci si limita a considerare campi elettromagnetici d’intensità “sufficientemente piccola”, le equazioni costitutive possono quasi sempre essere approssimate con equazioni lineari

il comportamento di tutti i mezzi reali soggetti a campi elettrici molto intensi (ad esempio prossimi alla **rigidità dielettrica** del materiale) è fortemente non lineare

per i mezzi lineari vale la **sovrapposizione degli effetti**

Se il comportamento di un mezzo dipende dalla rapidità di variazione temporale e/o spaziale del campo, si dice che il mezzo è **dispersivo**

le equazioni costitutive dei mezzi dispersivi coinvolgono, oltre ai vettori del campo, anche le loro derivate spaziali (dispersività nello spazio) e / o le loro derivate temporali (dispersività nel tempo)

la dispersività nel tempo dipende dall'inerzia dei meccanismi microscopici che determinano la polarizzazione, la magnetizzazione e la conduzione

in condizioni statiche o di lenta variabilità tutti materiali possono essere considerati non – dispersivi nel tempo

in condizioni dinamiche, con variazioni temporali sufficientemente rapide, tutti i materiali sono dispersivi nel tempo

Se le proprietà fisiche di un mezzo non dipendono dalla direzione in cui vengono osservate, il mezzo si dice **isotropo**

normalmente sono isotropi i fluidi, i solidi amorfi e i solidi a struttura poli-cristallina, purché in assenza tensioni meccaniche

i monocristalli, esclusi quelli del sistema cubico, sono esempi di materiali anisotropi

le equazioni costitutive dei mezzi isotropi sono invarianti rispetto a qualunque rotazione del sistema di riferimento

Le equazioni costitutive dei mezzi **omogenei**, **stazionari**, **lineari**, **non dispersivi** e **isotropi**, sono relazioni algebriche del tipo

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 \, \chi_e \, \vec{\mathcal{E}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \, \epsilon_r \, \vec{\mathcal{E}} \qquad \epsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \, \vec{\mathcal{H}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \, \mu_r \, \vec{\mathcal{H}} \qquad \mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\vec{\mathcal{J}}_c = \sigma \, \vec{\mathcal{E}}$$ *legge di Ohm*

dove

χ_e **suscettività elettrica**

ϵ_r **permittività relativa** (costante dielettrica relativa)

χ_m **suscettività magnetica**

μ_r **permeabilità magnetica relativa**

σ **conducibilità** $[\mathrm{S}/\mathrm{m}]$

Nel caso di mezzi **omogenei**, **stazionari**, **lineari**, **non dipersivi** e **anisotropi**, le equazioni costitutive sono relazioni algebriche del tipo

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon}_r \cdot \vec{\mathcal{E}} \qquad \overleftrightarrow{\epsilon}_r = \overleftrightarrow{\mathrm{I}} + \overleftrightarrow{\chi}_e$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \overleftrightarrow{\chi}_m \cdot \vec{\mathcal{H}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \overleftrightarrow{\mu}_r \cdot \vec{\mathcal{H}} \qquad \overleftrightarrow{\mu}_r = \overleftrightarrow{\mathrm{I}} + \overleftrightarrow{\chi}_m$$

$$\vec{\mathcal{J}}_c = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

dove tutte le grandezze indicate con $\leftrightarrow$ sono *diadiche*

$\overleftrightarrow{\chi}_e$ **suscettività elettrica**

$\overleftrightarrow{\epsilon}_r$ **permittività relativa** (costante dielettrica relativa)

$\overleftrightarrow{\chi}_m$ **suscettività magnetica**

$\overleftrightarrow{\mu}_r$ **permeabilità magnetica relativa**

$\overleftrightarrow{\sigma}$ **conducibilità** $[\mathrm{S}/\mathrm{m}]$

Nel caso di mezzi **omogenei**, **stazionari**, **lineari**, **isotropi non dipersivi nello spazio** e **dispersivi nel tempo**, le equazioni costitutive sono relazioni differenziali del tipo

$$\sum_{n=0}^{N_P} a_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{P}}}{\partial t^n} = \sum_{n=0}^{N_E} b_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^n} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{N_P} a_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{D}}}{\partial t^n} = \sum_{n=0}^{N'_E} \beta_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^n}$$

$$\sum_{n=0}^{N_M} c_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{M}}}{\partial t^n} = \sum_{n=0}^{N_H} d_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^n} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{N_M} c_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{B}}}{\partial t^n} = \sum_{n=0}^{N'_H} \delta_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^n}$$

$$\sum_{n=0}^{N_J} e_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{J}}_c}{\partial t^n} = \sum_{n=0}^{N''_E} f_n \frac{\partial^n \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^n}$$

dove tutti i coefficienti a_n, b_n, β_n, c_n, d_n, δ_n, e_n e f_n sono costanti

In questo corso, salvo avviso contrario, si assume tacitamente che i mezzi siano **omogenei** (a tratti), **stazionari**, **lineari**, **non – dispersivi nello spazio** e **isotropi**

Viene invece considerata la **dispersività temporale**, poiché in molti casi le variazioni temporali del campo sono sufficientemente rapide

Legge di Lorentz

La legge di Lorentz definisce la forza elettromagnetica che agisce sulla carica che, in un generico istante, si trova nel volume infinitesimo dV e si sposta con la velocità $\vec{v}$

$$d\vec{f} = \rho \, dV \, (\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}) \qquad [\,\mathrm{N}\,]$$

la legge di Lorentz costituisce l'anello di congiunzione fra il campo elettromagnetico e i suoi effetti osservabili