# Ottica geometrica

L'ottica geometrica assume che il campo elettromagnetico in un mezzo senza perdite possa essere rappresentato in ogni punto di regolarità come somma di onde "localmente" piane uniformi. Per queste onde elementari valgono le relazioni proprie delle onde piane uniformi

$$\vec{E} = \eta \, \vec{H} \times \vec{u} \qquad\qquad \vec{H} = \eta^{-1} \, \vec{u} \times \vec{E}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \eta^{-1} \, |\, \vec{E} \,|^2 \, \vec{u} = \frac{1}{2} \eta \, |\, \vec{H} \,|^2 \, \vec{u}$$

dove $\vec{u}$ è il versore nella direzione locale di propagazione.
Si ammette però che l'onda possa essere non piana e non uniforme, purchè i raggi di curvatura delle superfici equifase siano molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda e le variazioni dell'intensità del campo su una superficie equifase siano sensibili solo su distanze molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda
(ipotesi di **lenta variabilità**)

mettendo in evidenza l'ampiezza, la polarizzazione e la fase del campo elettrico, si può scrivere

$$\vec{E} = |\vec{E}|\,\vec{p}\,e^{-jk_0 L}$$

$$\vec{H} = \eta^{-1}\,|\vec{E}|\,\vec{u}\times\vec{p}\,e^{-jk_0 L}$$

dove:

- $|\vec{E}|$ è una funzione reale della posizione

- la polarizzazione $\vec{p}$, come nelle onde piane uniformi, è ortogonale in ogni punto alla direzione di propagazione

$$\vec{p}\cdot\vec{u} = 0$$

- $k_0 = \omega/c$ è il numero d'onda nel vuoto

- la funzione reale della posizione $L$, che definisce la fase del campo, prende il nome di **iconale**

Il vettore di propagazione locale è $\vec{\beta} = k_{\mathrm{o}} \nabla L$, per cui, se $n$ è l'indice di rifrazione, in ogni punto risulta

$$\nabla L = n\,\vec{u} \qquad \textit{equazione dell'iconale}$$

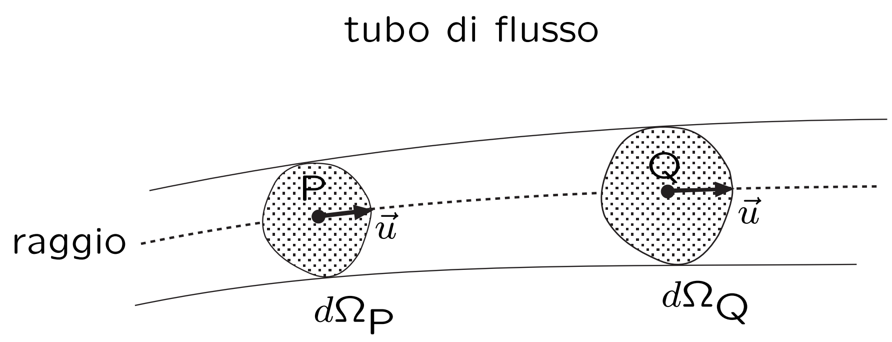
$$v = \frac{\omega}{|\vec{\beta}|} = \frac{c}{n} \qquad \textit{velocità di fase}$$

Nell'ottica geometrica, le superfici equifase sono superfici a iconale costante, le linee in ogni punto perpendicolari alla superfici equifase, che coincidono con le linee di flusso del vettore di Poynting, vengono detti **raggi**.

Dati due punti P e Q appartenenti ad uno stesso raggio, la differenza tra i valori che l'iconale assume nei due punti $L_{\mathrm{Q}} - L_{\mathrm{P}}$ prende il nome di **cammino ottico**

Nell'ottica geometrica, lo studio della propagazione viene ricondotto al tracciamento dei raggi e allo studio dell'ampiezza, della fase e della polarizzazione del campo elettromagnetico lungo i raggi.

Congruentemente al principio di conservazione dell'energia, l'ottica geometrica assume che la potenza trasportata in ogni tubo di flusso sia costante (tutti i mezzi sono assunti senza perdite).




Per questo motivo, se P e Q sono due punti appartenenti allo stesso raggio, la densità di potenza trasportata in Q è uguale a quella trasportata nel punto P per il rapporto inverso delle aree delle sezioni del tubo di flusso in Q e in P

$$W_{\mathsf{Q}} = W_{\mathsf{P}}\, K_{\mathsf{QP}}$$

$$K_{\mathsf{QP}} = \frac{d\Omega_{\mathsf{P}}}{d\Omega_{\mathsf{Q}}}$$ **fattore di divergenza**

## mezzo omogeneo

- i raggi sono rettilinei.

- il cammino ottico tra due punti P e Q, appartenenti allo stesso raggio, è

$$L_{\mathsf{Q}} - L_{\mathsf{P}} = n\, d$$

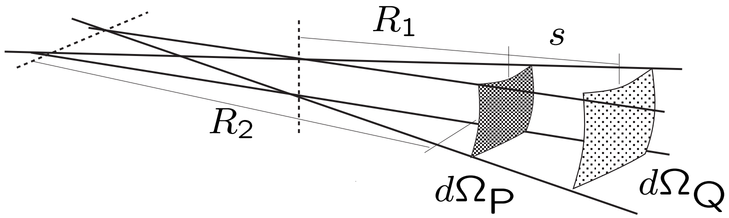
dove $d$ è la distanza tra i punti (misurata lungo il raggio).

- il rapporto tra le ampiezze dei campi in due punti appartenenti allo stesso raggio è la radice quadrata del fattore di divergenza tra i due punti

$$|\,\vec{E}_{\mathsf{Q}}\,| = |\,\vec{E}_{\mathsf{P}}\,| \sqrt{K_{\mathsf{QP}}}$$

- la polarizzazione dei campi rimane invariata lungo i raggi.

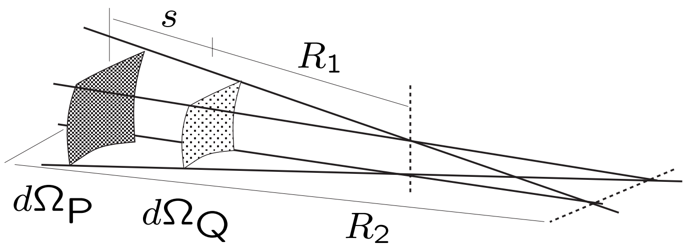
## fascio astigmatico divergente




$$d\Omega_P = d\Omega_Q \frac{R_1 R_2}{(R_1+s)(R_2+s)}$$

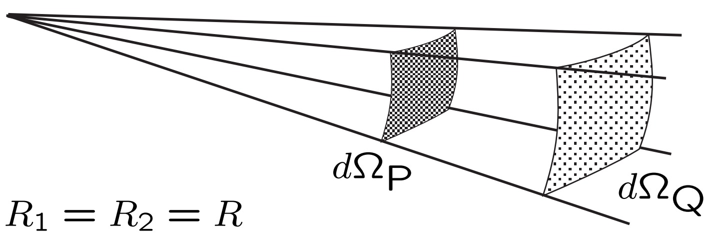
$R_1$ e $R_2$ sono i raggi principali di curvatura dell'elemento $d\Omega_P$ di superficie equifase, $s$ è la distanza tra $d\Omega_P$ e $d\Omega_Q$

## fascio astigmatico convergente




$$d\Omega_P = d\Omega_Q \frac{R_1 R_2}{(R_1-s)(R_2-s)}$$

## fascio omocentrico divergente



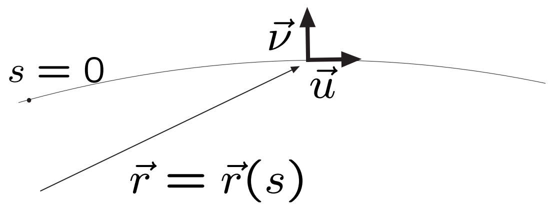

$R_1 = R_2 = R$

$$d\Omega_P = d\Omega_Q \frac{R^2}{(R+s)^2}$$

## mezzo non omogeneo

(l'indice di rifrazione è una funzione lentamente variabile)

• i raggi non sono rettilinei e si incurvano verso le zone ad indice di rifrazione maggiore. Se $s$ è una coordinata curvilinea lungo il raggio, l'andamento del raggio è definito da




$$\frac{d\,(n\,\vec{u})}{ds} = \nabla n \qquad\qquad \textit{equazione dei raggi}$$

dove il versore tangente al raggio $\vec{u}$ può essere definito da $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$

• il raggio di curvatura $R$ del raggio elettromagnetico è definito dalla relazione

$$-\frac{\vec{\nu}}{R} = \nabla \ln n - \vec{u}\,(\vec{u} \cdot \nabla \ln n)$$

dove $\vec{\nu}$ è il versore normale al raggio

• il cammino ottico tra i punti P e Q, appartenenti allo stesso raggio, è

$$L_{\mathsf{Q}} - L_{\mathsf{P}} = \int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} n \, ds$$

• la relazione tra le ampiezze dei campi nei punti P e Q è data da

$$|\vec{E}_{\mathsf{Q}}| = |\vec{E}_{\mathsf{P}}| \, e^{-\frac{1}{2}\int_{\mathsf{P}}^{\mathsf{Q}} \frac{1}{n} \nabla \cdot n \, \vec{u} \, ds}$$

• se i raggi sono curve piane, la polarizzazione dei campi rimane invariata nel sistema di riferimento locale, della normale e binormale al raggio $\{\vec{\nu}, \vec{u} \times \vec{\nu}\}$.