

# E

## Funzioni di Bessel

---

In questa appendice sono elencate alcune proprietà delle funzioni di Bessel. Per un'elencazione molto più ampia si veda: Abramowitz-Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., N.Y. 1965.

FUNZIONI DI BESSEL DEL PRIMO E DEL SECONDO TIPO Le funzioni di Bessel, indicate in generale con  $Z_\nu = Z_\nu(z)$ , sono definite sul piano complesso  $z = x + jy$ . Esse sono le soluzioni dell'equazione di Bessel

$$z \frac{d}{dz} \left( z \frac{dZ_\nu}{dz} \right) + (z^2 - \nu^2) Z_\nu = 0 \quad (\text{E.1})$$

dove  $\nu$  è una costante (generalmente complessa) detta "ordine" dell'equazione e delle funzioni. Nello studio delle onde interessa il caso in cui  $\nu$  è reale, in particolare intero. In questo ultimo caso l'ordine viene indicato con il simbolo  $n$ .

Se l'ordine *non* è intero la soluzione generale della (E.1) può essere posta nella forma

$$Z_\nu(z) = A J_\nu(z) + B J_{-\nu}(z) \quad (\text{A, B costanti arbitrarie}) \quad (\text{E.2})$$

dove  $J_\nu(z)$  e  $J_{-\nu}(z)$  sono due soluzioni indipendenti (*funzioni di Bessel del primo tipo*) date da:

$$J_\nu(z) = \left( \frac{z}{2} \right)^\nu \sum_0^\infty m \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{2m} \quad (\text{E.3a})$$

$$|\arg z| < \pi$$

$$J_{-\nu}(z) = \left( \frac{z}{2} \right)^{-\nu} \sum_0^\infty m \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m - \nu + 1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{2m} \quad (\text{E.3b})$$

In queste espressioni la funzione  $\Gamma$  indica il cosiddetto "fattoriale generalizzato". Quando  $\nu$  è intero si ha:

$$\Gamma(m+n+1) = (m+n)!$$

e risulta  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ . In questo caso la soluzione generale della (E.1) non è più la (E.2), perchè  $J_n$  e  $J_{-n}$  non sono più indipendenti. Un'altra soluzione particolare dell'equazione di Bessel è evidentemente:

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} \quad (\text{funzione di Bessel del secondo tipo})$$

Pertanto si può anche scrivere:

$$Z_\nu(z) = C J_\nu(z) + D N_\nu(z) \quad (\text{E.4})$$

Quando l'ordine è intero l'espressione che definisce  $N_\nu$  diviene indeterminata, e quindi  $N_n$  deve essere definita mediante il seguente limite:

$$N_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}$$

La funzione così ottenuta è indipendente da  $J_n$ , così che la (E.4) rappresenta la soluzione generale dell'equazione di Bessel, anche quando l'ordine è intero.

Le funzioni  $J_n(z)$  sono analitiche in tutto il piano  $z$ . Le altre funzioni di Bessel sono analitiche in tutto il piano  $z$ , escluso il semiasse  $x \leq 0$  (l'origine è un punto di diramazione).

Le funzioni di Bessel  $J_0$  e  $N_0$  sono rappresentate dalle seguenti serie di potenze:

$$J_0(z) = \sum_0^{\infty} m \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \quad (\text{E.5})$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left( \gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_0(z) + \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} m \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \phi(m) \quad (\text{E.6})$$

dove

$$\phi(m) = 1 + 1/2 + \dots + 1/m \quad \gamma = 0.5772\dots \quad (\text{costante di Eulero})$$

Se l'ordine è un intero diverso da zero si ha:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_0^{\infty} m \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned}
 N_n(z) = & \frac{2}{\pi} \left( \gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_0^{n-1} m \frac{(n-m-1)!}{m!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2m-n} + \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} m \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2m+n} [\phi(m) + \phi(m+n)]
 \end{aligned}
 \tag{E.8}$$

L'andamento di alcune funzioni di Bessel sull'asse reale positivo è rappresentato nelle Figure E.1 e E.2. I valori numerici possono essere ottenuti mediante comuni routine di calcolo numerico, o possono essere reperiti su tabelle.

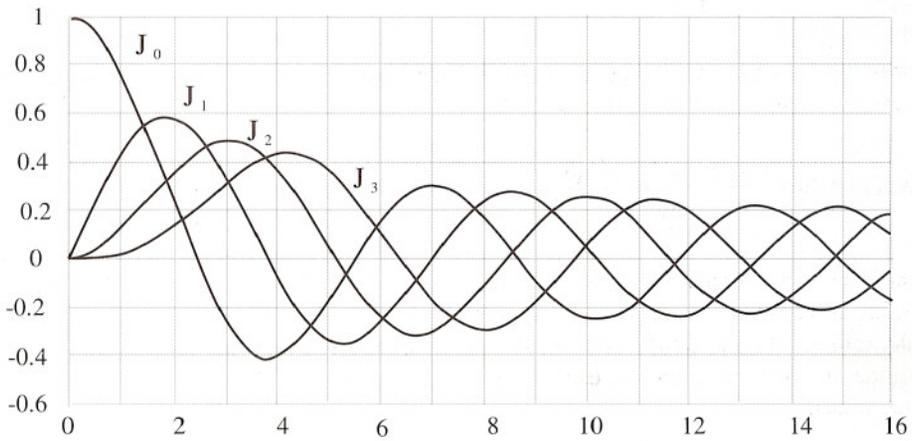


Figura E.1

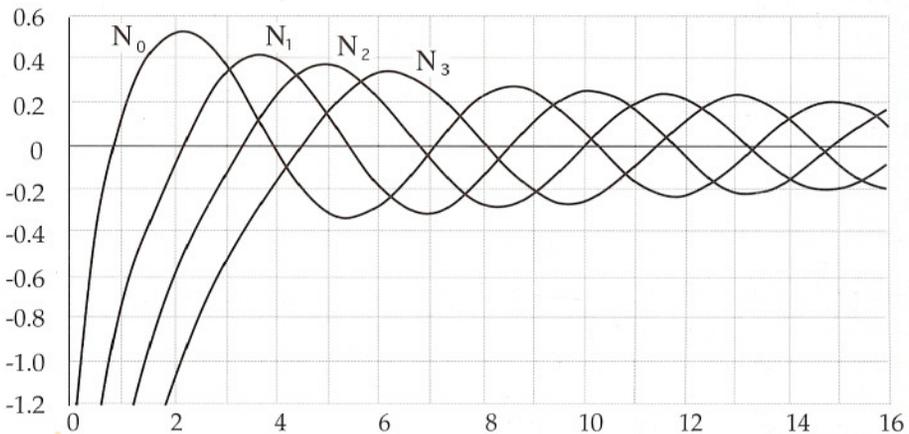


Figura E.2

Altre soluzioni particolari della (E.1) sono le funzioni di Hankel (o funzioni di Bessel del terzo tipo), definite come segue:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + jN_{\nu}(z) \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - jN_{\nu}(z) \quad (\text{E.9})$$

È evidente che la soluzione generale (E.4) può trasformata nella seguente espressione:

$$Z_{\nu}(z) = MH_{\nu}^{(1)}(z) + NH_{\nu}^{(2)}(z) \quad (\text{M, N costanti arbitrarie})$$

La Figura E.3 mostra l'andamento delle funzioni di Hankel di ordine 0 e 1, per valori reali positivi dell'argomento.

**APPROSSIMAZIONI PER PICCOLI VALORI DELL'ARGOMENTO** Dalle precedenti definizioni si deduce facilmente che, per piccoli valori di  $|z|$ , si ha:

$$J_0(z) \approx 1 \quad N_0(z) \approx \frac{2}{\pi} \ln z \quad (\text{E.10})$$

$$J_{\nu}(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \quad N_{\nu}(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu} \quad (\nu > 0) \quad (\text{E.11})$$

**APPROSSIMAZIONI PER GRANDI VALORI DELL'ARGOMENTO** Per valori molto grandi di  $|z|$  si ha:

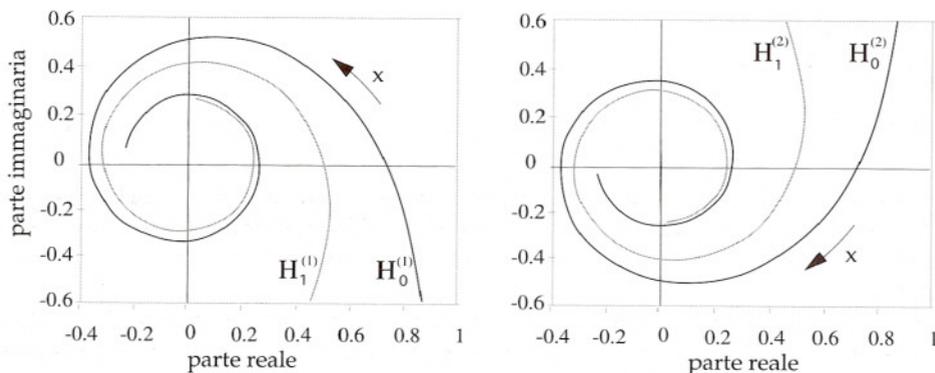


Figura E.3

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad (\text{E.12})$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{j(z - \pi/4 - \nu\pi/2)} \quad H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - \pi/4 - \nu\pi/2)} \quad (\text{E.13})$$

Al crescere di  $x$  lungo l'asse reale positivo le funzioni  $J_n(x)$  e  $N_n(x)$  tendono a comportarsi come sinusoidi smorzate, la cui ampiezza decresce come  $x^{-1/2}$ ; il modulo delle funzioni di Hankel decresce con la stessa legge e l'argomento varia proporzionalmente a  $x$ .

**FORMULE DI RICORRENZA** Detta  $Z_\nu$  una funzione di Bessel qualsiasi, vale la seguente relazione:

$$Z_\nu(z) = \frac{2(\nu-1)}{z} Z_{\nu-1} - Z_{\nu-2} \quad (\text{E.14})$$

Questa formula permette di dedurre per ricorrenza le funzioni di ordine intero maggiore di 1 partendo dalle funzioni  $Z_0$  e  $Z_1$ .

Indicando con un apice la derivata si ha:

$$Z'_\nu(z) = Z_{\nu-1} - \frac{\nu}{z} Z_\nu \quad (\text{E.15})$$

$$Z'_\nu(z) = -Z_{\nu+1} + \frac{\nu}{z} Z_\nu \quad (\text{E.16})$$

$$Z'_\nu(z) = \frac{Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1}}{2} \quad (\text{E.17})$$

In particolare risulta:

$$Z'_0 = -Z_1 \quad (\text{E.18})$$

**ZERI DELLE FUNZIONI  $J_n(z)$  e  $J'_n(z)$**  Quando l'ordine è reale le funzioni del primo e del secondo tipo e le loro derivate prime hanno un numero infinito di zeri reali, ciascuno dei quali è semplice, con la possibile esclusione dell'eventuale zero sull'origine (che può essere multiplo).

Gli zeri positivi delle funzioni  $J_n(z)$  e  $J'_n(z)$  costituiscono due successioni, i cui termini sono indicati con  $x_{np}$  e  $x'_{np}$  per le due funzioni rispettivamente ( $p = 1, 2, \dots$ ). I valori di alcuni zeri sono riportati nelle Tabelle E.1 e E.2

**Tabella E.1** Alcuni valori degli zeri  $x_{np}$  di  $J_n$ 

$p$	$n$	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771	
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339	
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.372		
4	11.792	13.324	14.796				

**Tabella E.2** Alcuni valori degli zeri  $x'_{np}$  di  $J_n$ 

$p$	$n$	0	1	2	3	4	5
1	3.832	1.841	3.054	4.201	5.317	6.416	
2	7.016	5.331	6.706	8.015	9.282	10.520	
3	10.173	8.536	9.969	11.346	12.682	13.987	
4	13.324	11.706	13.170				

INTEGRALI DI LOMMEL Indicate con  $h$  e  $k$  due costanti diverse si ha:

$$\int_0^z t J_\nu(ht) J_\nu(kt) dt = \frac{z}{h^2 - k^2} \{h J_\nu(kz) J_{\nu+1}(hz) - k J_\nu(hz) J_{\nu+1}(kz)\} =$$

$$\frac{z}{h^2 - k^2} \{k J_{\nu-1}(kz) J_\nu(hz) - h J_{\nu-1}(hz) J_\nu(kz)\} \quad (\nu > -1) \quad (\text{E.19})$$

$$\int_0^z t J_\nu^2(ht) dt = \frac{z^2}{2} \left\{ J_\nu^2(hz) + \left( 1 - \frac{\nu^2}{h^2 z^2} \right) J_\nu^2(kz) \right\} \quad (\nu > -1) \quad (\text{E.20})$$

I precedenti integrali sono noti come integrali di Lommel.

RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI  $J_n(z)$  Esistono diverse rappresentazioni integrali delle funzioni di Bessel, fra le quali la seguente:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin\theta) d\theta = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{jz \cos\theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (\text{E.21})$$

FUNZIONI DI BESSEL MODIFICATE Vengono così indicate le soluzioni dell'equazione di Bessel modificata:

$$z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d\tilde{Z}}{dz} \right) - (z^2 + \nu^2) \tilde{Z} = 0 \quad (\text{E.22})$$

Nello studio dei campi è particolarmente interessante il caso in cui  $z$  è reale non negativo. In questo caso la soluzione generale della (E.22) è data da:

$$\tilde{Z}(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x) \quad (\text{E.23})$$

dove:

$$I_\nu(x) = j^{-\nu} J_\nu(jx) \quad K_\nu(x) = (-j)^{\nu+1} \frac{\pi}{2} H_\nu^{(2)}(-jx) \quad (x \geq 0) \quad (\text{E.24})$$

L'andamento di  $I_0, I_1, K_0, K_1$  è rappresentato nella Figura E.4. Per valori grandi di  $x$  si ha:

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (\text{E.25})$$

Le formule di ricorrenza per le funzioni modificate possono essere facilmente dedotte dalle (E.14-18).

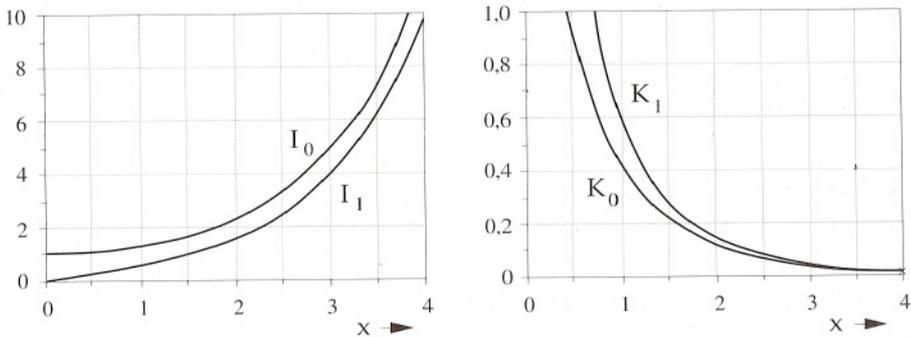


Figura E.4