Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

Circuiti Elettrici Lineari

Metodi di analisi

Sommario

- Metodo di analisi nodale
- Metodo di analisi agli anelli

Metodi di analisi

Due metodi sistematici per l'analisi dei circuiti:

ANALISI NODALE
(basata su KCL e legge di Ohm)

ANALISI AGLI ANELLI
(basata su KVL e legge di Ohm)

Analisi nodale

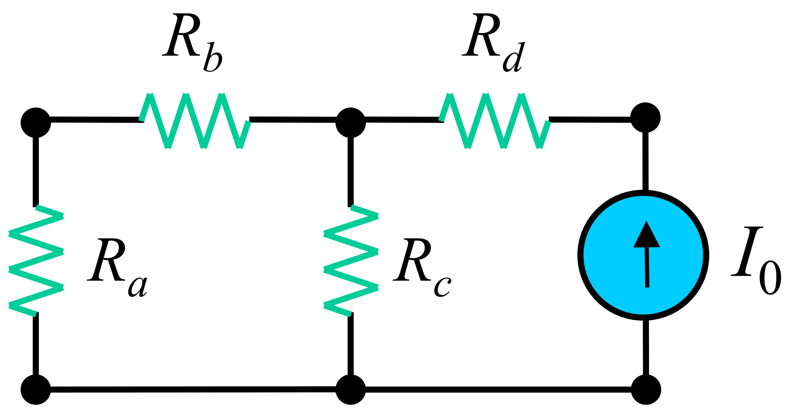
Le incognite sono le tensioni di nodo

Dato un circuito con n nodi il metodo si articola in tre passi:

1. un qualunque nodo viene scelto come riferimento; si indicano con v_1, v_2, ..., v_{n-1} le tensioni dei rimanenti nodi rispetto al nodo di riferimento;
2. si applica la KCL agli $n-1$ nodi, usando la legge di Ohm per esprimere le correnti di ramo in funzione delle tensioni di nodo;
3. si risolvono le equazioni così ottenute, ricavando le tensioni di nodo v_1, v_2, ..., v_{n-1}.

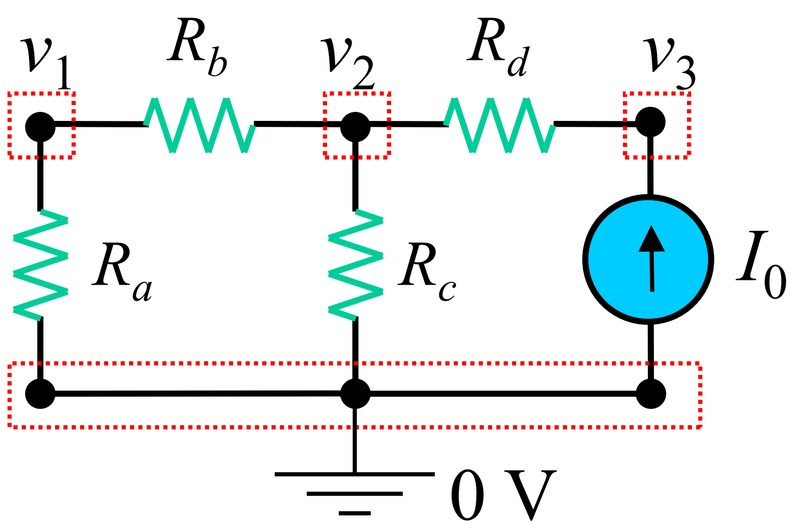
Analisi nodale

Esempio:



Analisi nodale

Esempio:

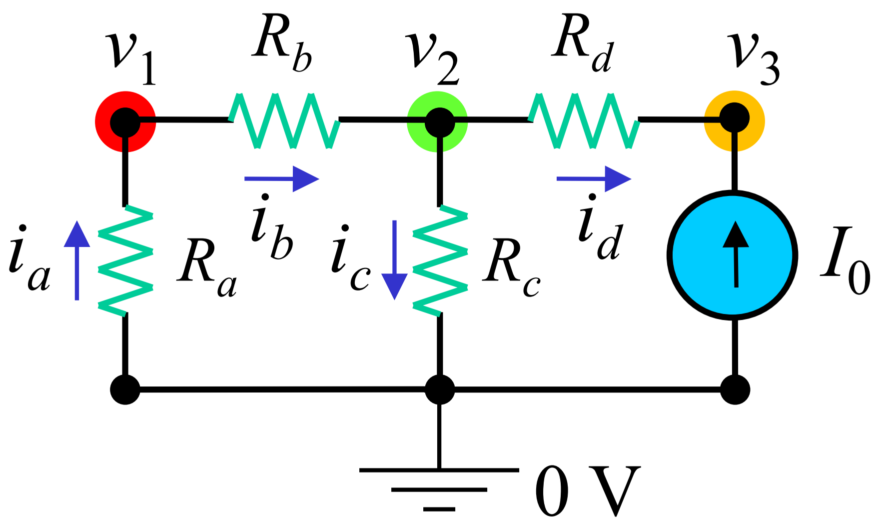


1. Scelta del nodo di riferimento e definizione delle tensioni incognite

N.B.: 4 nodi ⇨ 3 incognite

Analisi nodale

Esempio:



2. Applicazione della KCL

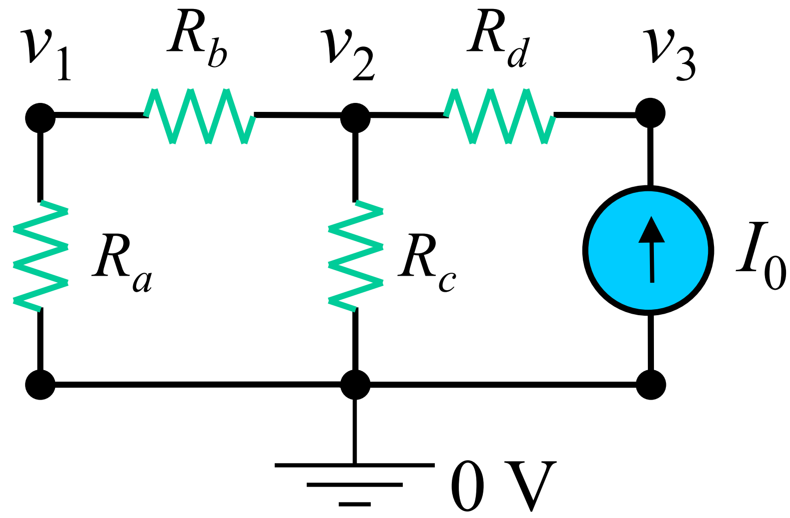
$$\begin{cases} -i_a + i_b = 0 \\ -i_b + i_c + i_d = 0 \\ -i_d - I_0 = 0 \end{cases}$$

… e della legge di Ohm

$$\begin{cases} \dfrac{v_1 - 0}{R_a} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_b} = 0 \\ \dfrac{v_2 - v_1}{R_b} + \dfrac{v_2 - 0}{R_c} + \dfrac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\ \dfrac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0 \end{cases}$$

Analisi nodale

Esempio:



3. Soluzione sistema

$$
\begin{cases}
\dfrac{v_1 - 0}{R_a} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_b} = 0 \\[2ex]
\dfrac{v_2 - v_1}{R_b} + \dfrac{v_2 - 0}{R_c} + \dfrac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\[2ex]
\dfrac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_1 \,,\, v_2 \,,\, v_3}$$

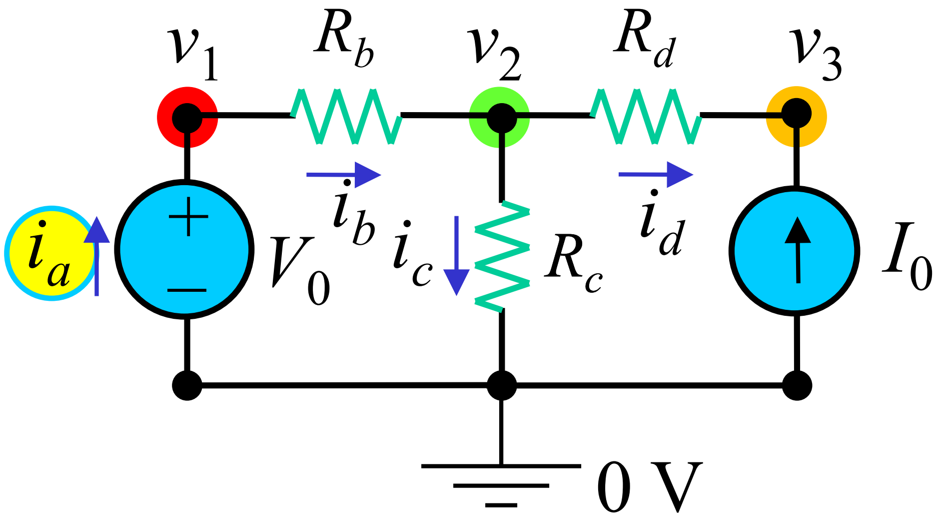
Analisi nodale

PROBLEMA!

Se su un ramo è presente un generatore di tensione la corrente che lo attraversa non può essere espressa in funzione delle tensioni nodali

Analisi nodale

Caso 1: generatore di tensione collegato a massa

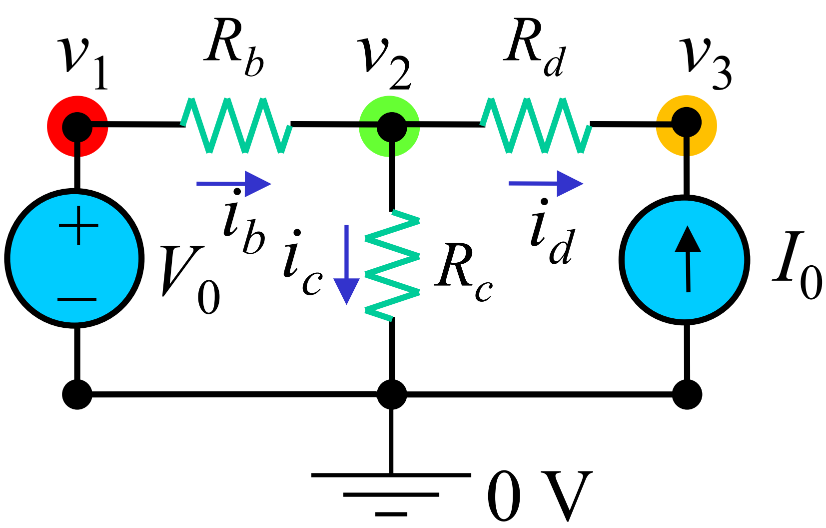


$$\begin{cases} \cancel{-i_a + i_b = 0} \\ -i_b + i_c + i_d = 0 \\ -i_d - I_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{? + \dfrac{v_1 - v_2}{R_b} = 0} \\ \dfrac{v_2 - v_1}{R_b} + \dfrac{v_2 - 0}{R_c} + \dfrac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\ \dfrac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0 \end{cases}$$

Analisi nodale

Caso 1: generatore di tensione collegato a massa



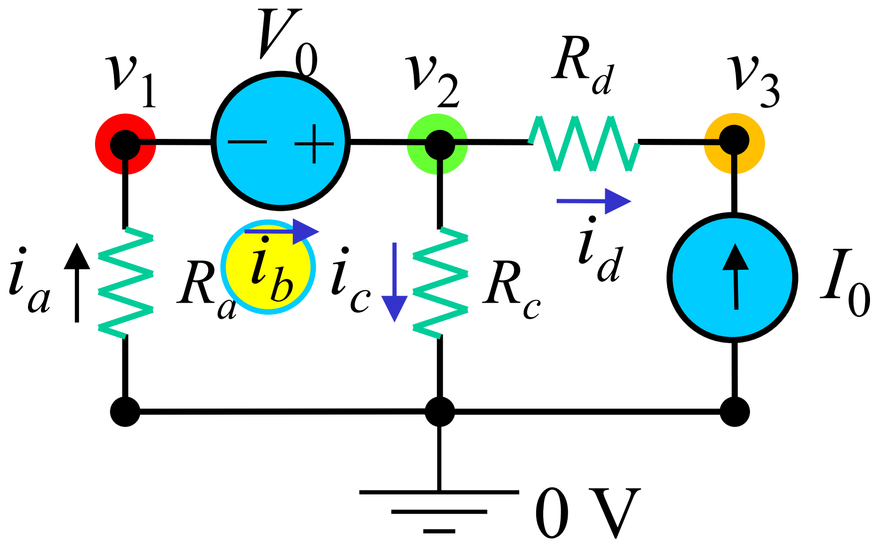
$$\begin{cases} \boxed{v_1 = V_0} \\ -i_b + i_c + i_d = 0 \\ -i_d - I_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = V_0 \\ \dfrac{v_2 - v_1}{R_b} + \dfrac{v_2 - 0}{R_c} + \dfrac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\ \dfrac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0 \end{cases}$$

Il problema si semplifica:
un'incognita è già nota

Analisi nodale

Caso 2: generatore di tensione non collegato a massa

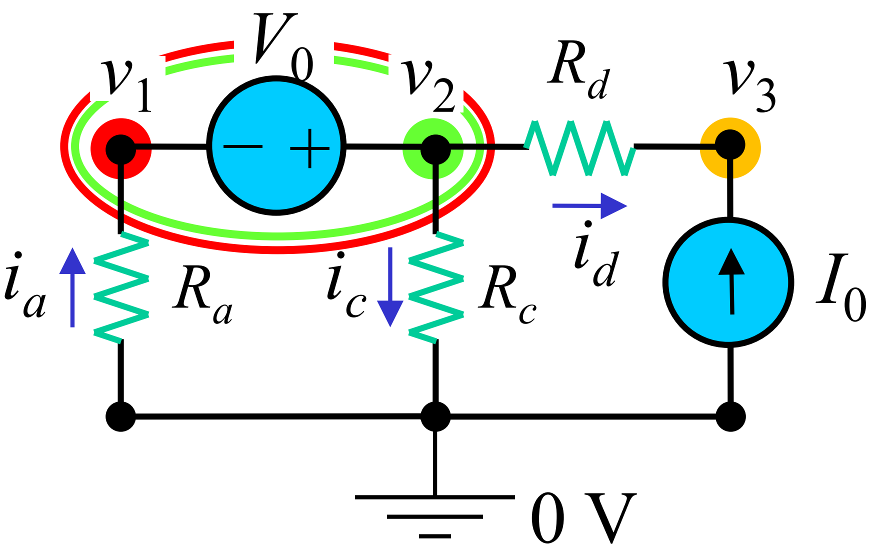


$$
\begin{cases}
-i_a + i_b = 0 \\
-i_b + i_c + i_d = 0 \\
-i_d - I_0 = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{v_1 - 0}{R_a} + \, ? = 0 \\
? + \dfrac{v_2 - 0}{R_c} + \dfrac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\
\dfrac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0
\end{cases}
$$

Analisi nodale

Caso 2: generatore di tensione non collegato a massa



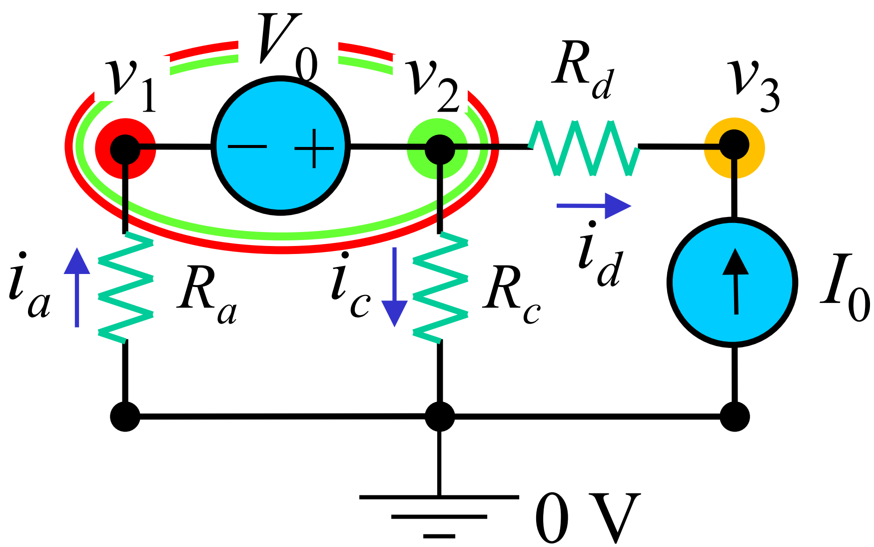
$$\begin{cases} \boxed{-i_a + i_c + i_d = 0} \\ -i_d - I_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{v_1 - 0}{R_a} + \dfrac{v_2 - 0}{R_c} + \dfrac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\ \dfrac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0 \end{cases}$$

Supernodo
si applica la KCL generalizzata

Analisi nodale

Caso 2: generatore di tensione non collegato a massa



$$\begin{cases} \boxed{v_2 - v_1 = V_0} \\ \boxed{-i_a + i_c + i_d = 0} \\ -i_d - I_0 = 0 \end{cases}$$

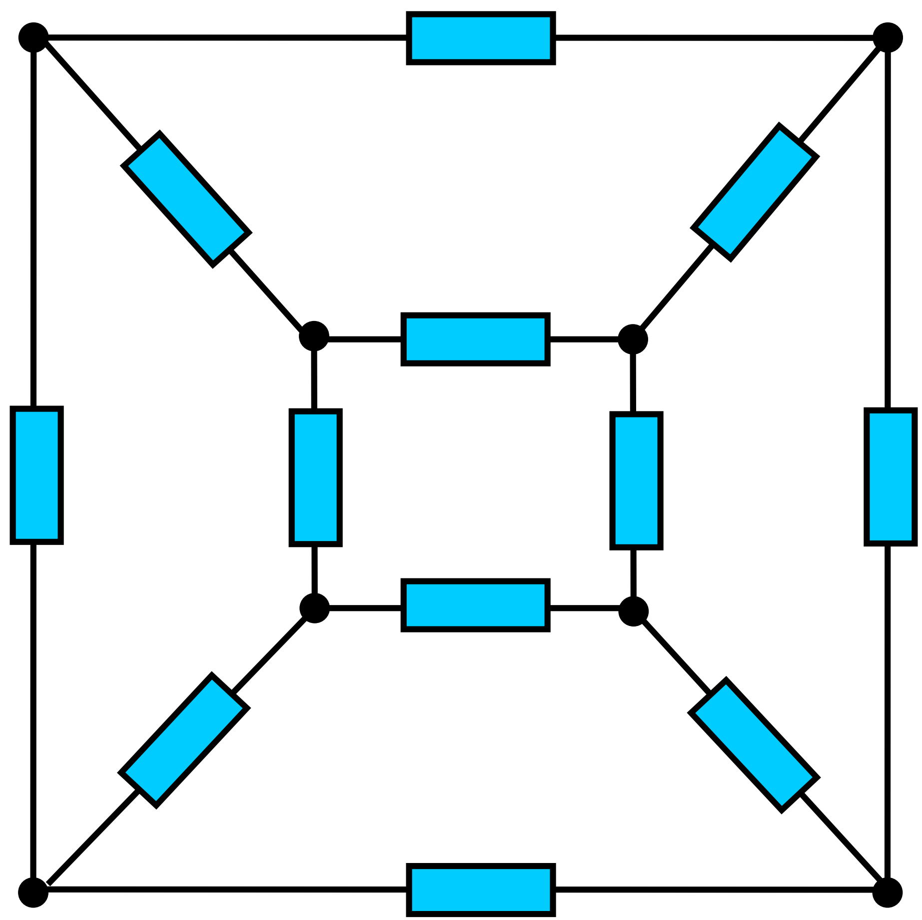
$$\begin{cases} v_2 - v_1 = V_0 \\ \dfrac{v_1 - 0}{R_a} + \dfrac{v_2 - 0}{R_c} + \dfrac{v_2 - v_3}{R_d} = 0 \\ \dfrac{v_3 - v_2}{R_d} - I_0 = 0 \end{cases}$$

Supernodo
si applica la KCL generalizzata + la KVL

Analisi agli anelli

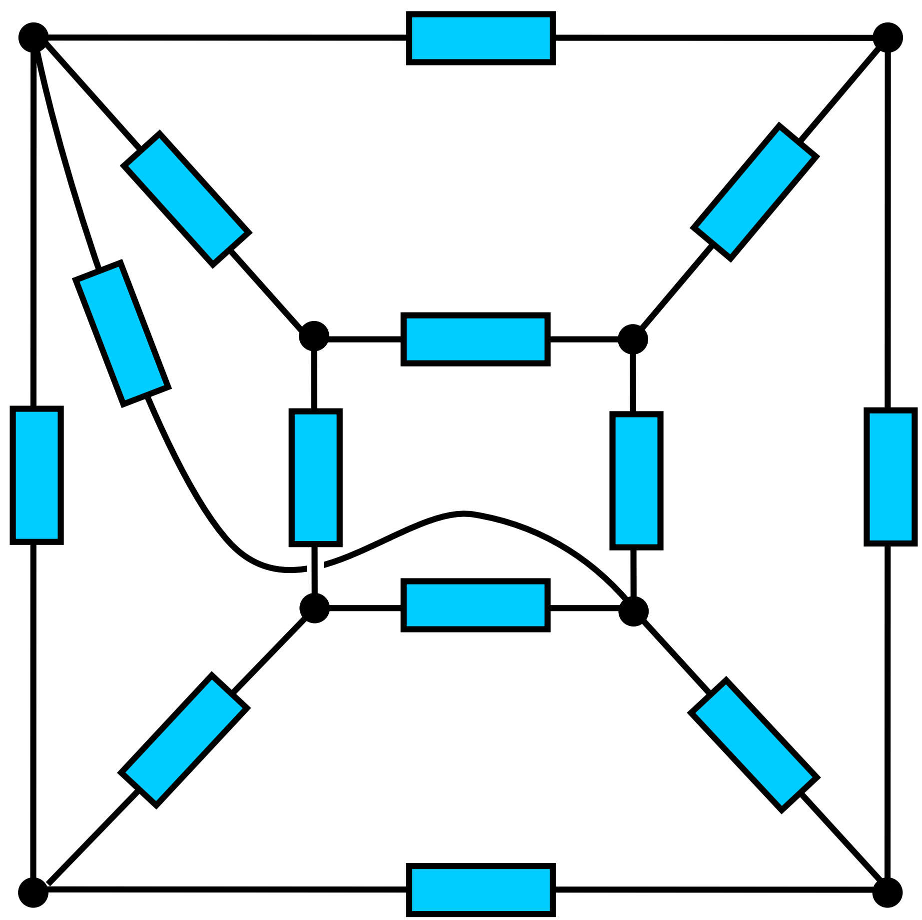
Si applica soltanto ai circuiti planari, cioè ai circuiti che possono essere disegnati su un piano senza che vi siano rami che si incrociano.

Analisi agli anelli



Circuito planare

Analisi agli anelli



Circuito <u>non</u> planare

Analisi agli anelli

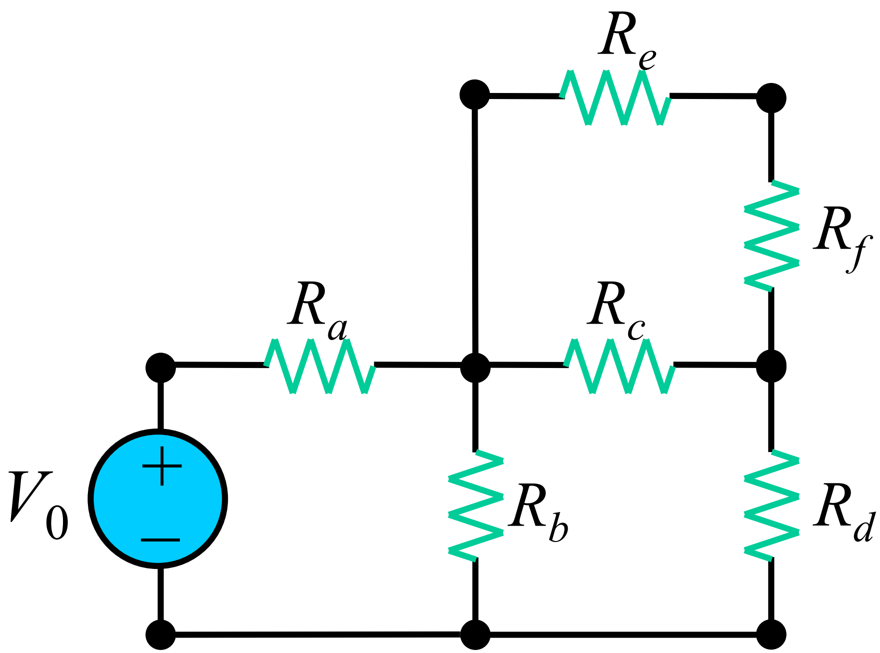
Le incognite sono le correnti di maglia

Dato un circuito con n maglie il metodo si articola in tre passi:

1. Si assegnano le correnti di anello $i_1, i_2, \ldots, i_n$ agli n anelli;
2. si applica la KVL a ciascuno degli n anelli, usando la legge di Ohm per esprimere le tensioni in termini di correnti di anello;
3. si risolvono le equazioni così ottenute, ricavando le correnti di anello $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

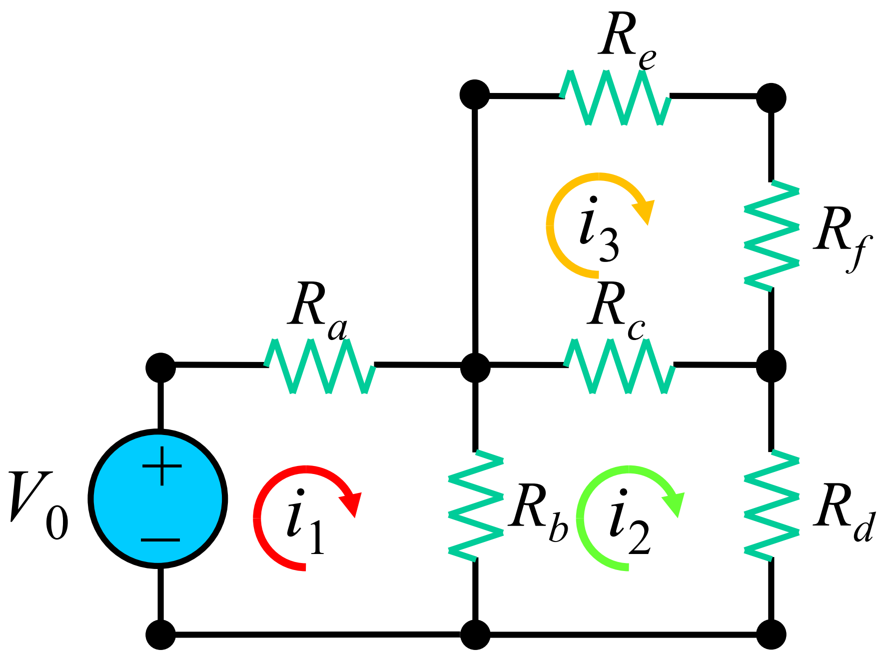
Analisi agli anelli

Esempio:



Analisi agli anelli

Esempio:

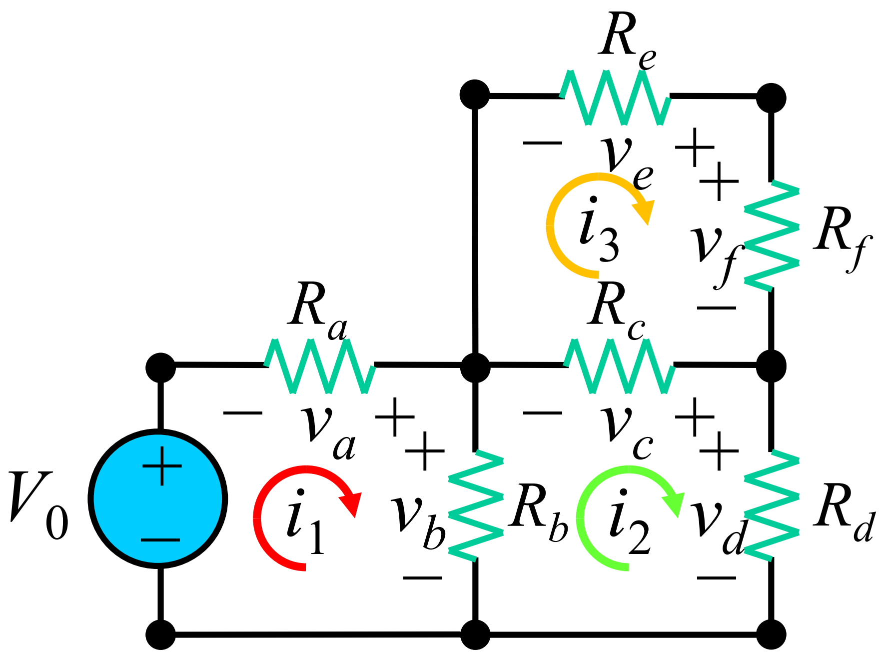


1. Definizione delle correnti d'anello incognite

N.B.: 3 anelli ⇨ 3 incognite

Analisi agli anelli

Esempio:



2. Applicazione della KVL

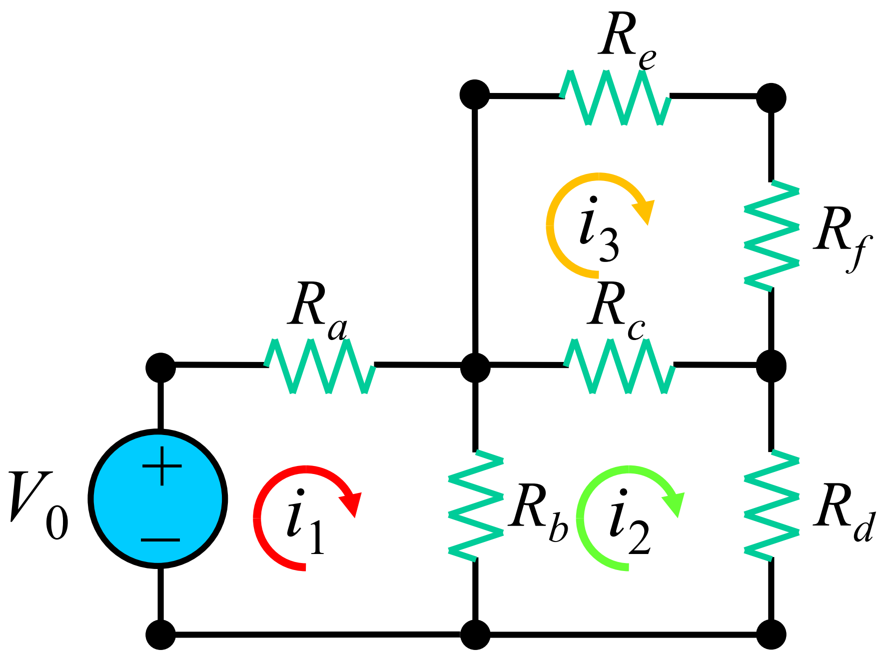
$$\begin{cases} -V_0 - v_a + v_b = 0 \\ -v_b - v_c + v_d = 0 \\ +v_c - v_e + v_f = 0 \end{cases}$$

… e della legge di Ohm

$$\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b(i_1 - i_2) = 0 \\ R_b(i_2 - i_1) + R_c(i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\ R_c(i_3 - i_2) + R_e i_3 + R_f i_3 = 0 \end{cases}$$

Analisi agli anelli

Esempio:



3. Soluzione sistema

$$\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\ R_b (i_2 - i_1) + R_c (i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\ R_c (i_3 - i_2) + R_e i_3 + R_f i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_1 \, , i_2 \, , i_3}$$

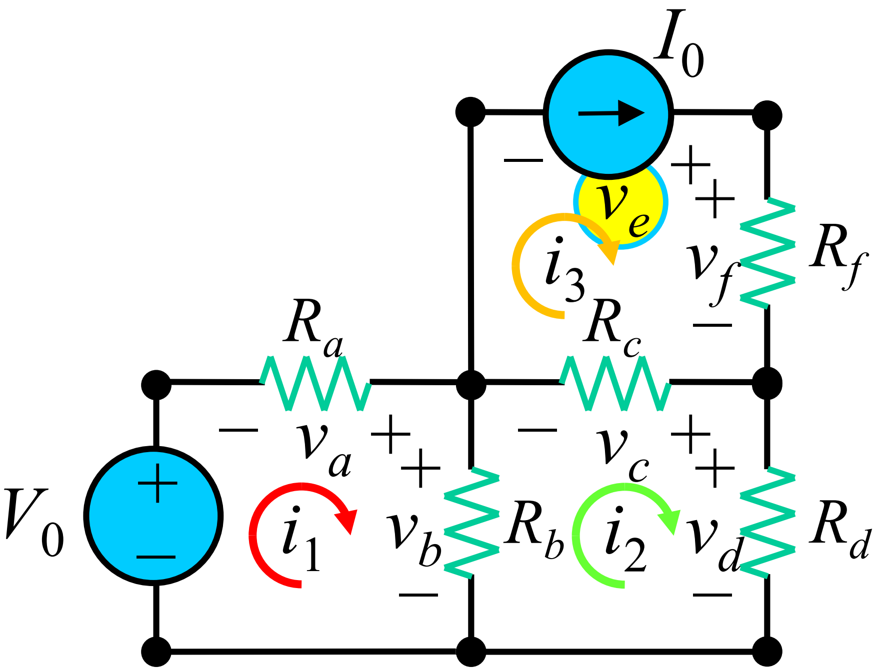
Analisi agli anelli

PROBLEMA!

Se su un ramo è presente un generatore di corrente la tensione ai suoi capi non può essere espressa in funzione delle correnti d'anello

Analisi agli anelli

Caso 1: generatore di corrente <u>appartenente ad un anello</u>

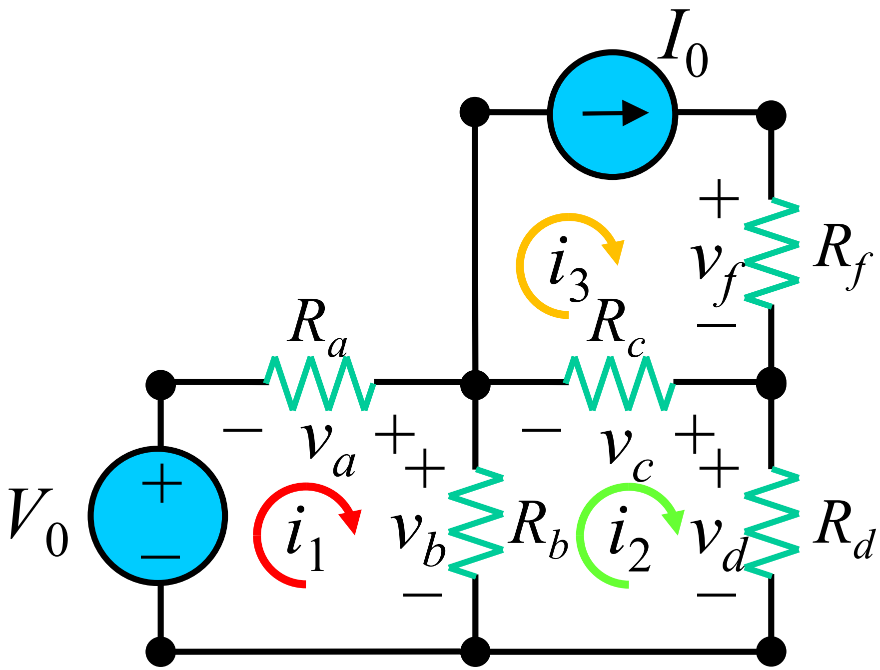


$$
\begin{cases}
-V_0 - v_a + v_b = 0 \\
- v_b - v_c + v_d = 0 \\
\cancel{+ v_c - v_e + v_f = 0}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\
R_b (i_2 - i_1) + R_c (i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\
\cancel{R_c (i_3 - i_2) + ? + R_f i_3 = 0}
\end{cases}
$$

Analisi agli anelli

Caso 1: generatore di corrente appartenente ad un anello



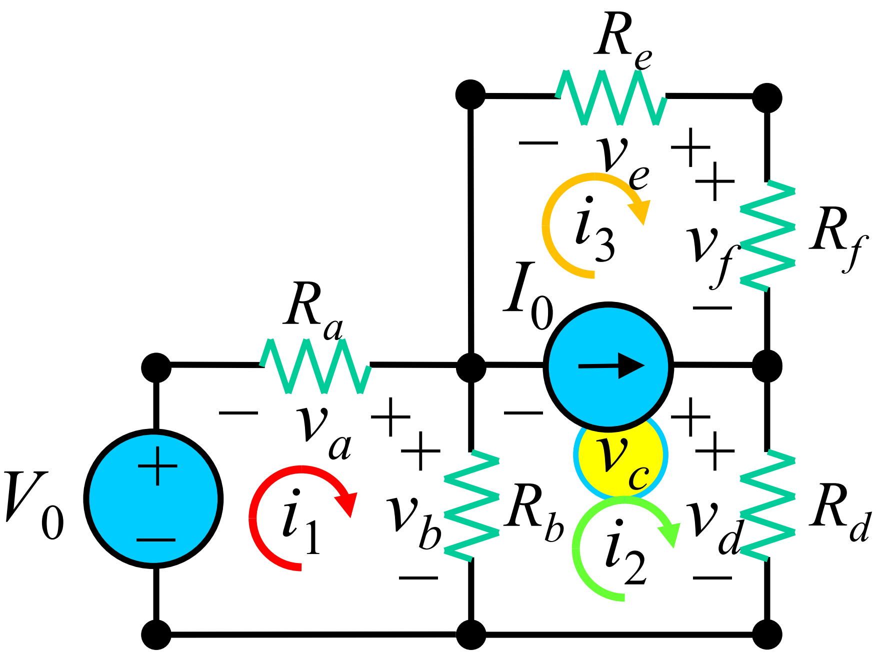
$$\begin{cases} -V_0 - v_a + v_b = 0 \\ -v_b - v_c + v_d = 0 \\ \boxed{i_3 = I_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b (i_1 - i_2) = 0 \\ R_b (i_2 - i_1) + R_c (i_2 - i_3) + R_d i_2 = 0 \\ i_3 = I_0 \end{cases}$$

Il problema si semplifica:
un'incognita è già nota

Analisi agli anelli

Caso 2: generatore di corrente <u>appartenente a due anelli</u>

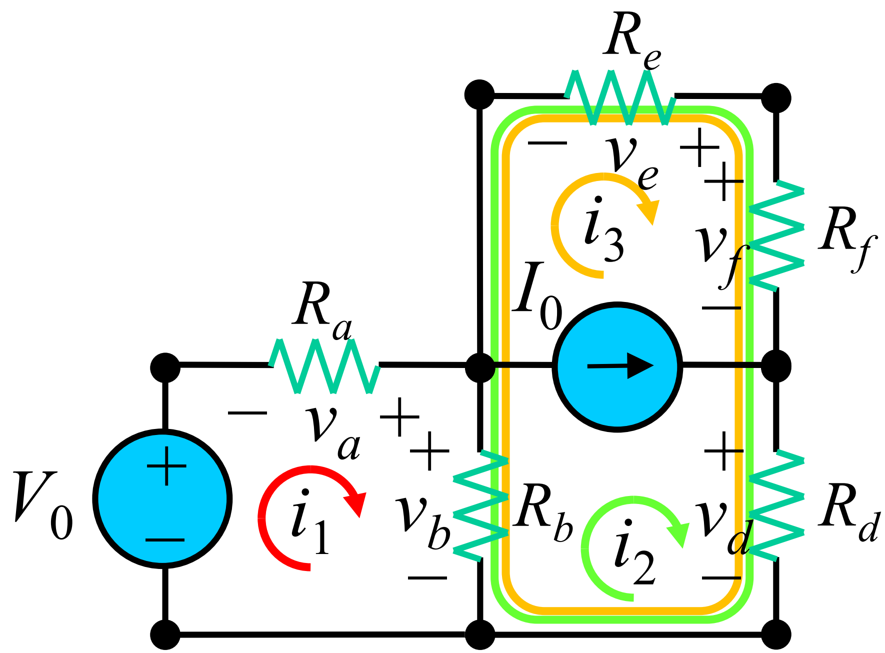


$$\begin{cases} -V_0 - v_a + v_b = 0 \\ \cancel{-v_b - v_c + v_d = 0} \\ \cancel{+v_c - v_e + v_f = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b(i_1 - i_2) = 0 \\ \cancel{R_b(i_2 - i_1) + \;?\; + R_d i_2 = 0} \\ \cancel{?\; + R_e i_3 + R_f i_3 = 0} \end{cases}$$

Analisi agli anelli

Caso 2: generatore di corrente appartenente a due anelli



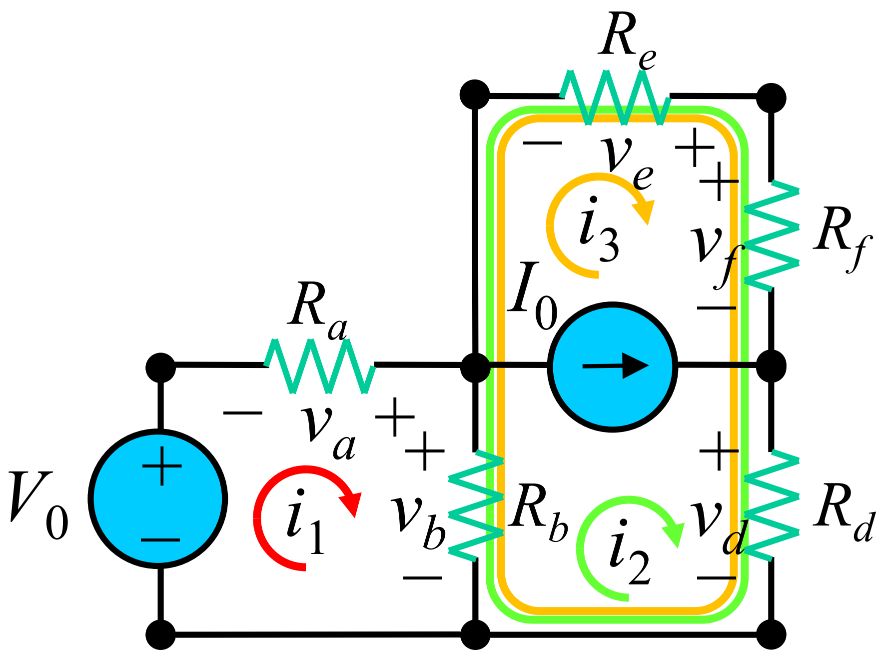
Superanello
si applica la KVL

$$\begin{cases} -V_0 - v_a + v_b = 0 \\ \boxed{-v_b - v_e + v_f + v_d = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b(i_1 - i_2) = 0 \\ R_b(i_2 - i_1) + R_e i_3 + R_f i_3 + R_d i_2 = 0 \end{cases}$$

Analisi agli anelli

Caso 2: generatore di corrente appartenente a due anelli



Superanello
si applica la KVL
+ la KCL

$$\begin{cases} -V_0 - v_a + v_b = 0 \\ \boxed{-v_b - v_e + v_f + v_d = 0} \\ \boxed{i_2 - i_3 = I_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_0 + R_a i_1 + R_b(i_1 - i_2) = 0 \\ R_b(i_2 - i_1) + R_e i_3 + R_f i_3 + R_d i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 = I_0 \end{cases}$$