

Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

Circuiti Elettrici Lineari

Teoremi delle reti elettriche

Sommario

- Linearità
- Principio di sovrapposizione degli effetti
- Teorema di Thevenin
- Teorema di Norton
- Massimo trasferimento di potenza
- Trasformazione di generatori

Linearità

Elemento lineare: presenta una relazione matematica lineare fra causa ed effetto.

Esempio: $i = v/R$ relazione lineare
 $i = i_0 \cdot e^{-\alpha v}$ relazione non lineare

linearità = omogeneità + additività

Se l'ingresso viene moltiplicando per un fattore costante, l'uscita risulta moltiplicata per lo stesso fattore:

$$v = f(i) \Rightarrow f(k \cdot i) = k \cdot f(i) = k \cdot v$$

La risposta alla somma di un certo numero d'ingressi è pari alla somma delle risposte a ciascuno degli ingressi applicato separatamente:

$$\begin{aligned} v_1 = f(i_1) , v_2 = f(i_2) \\ \Rightarrow f(i_1 + i_2) = f(i_1) + f(i_2) = v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Circuito lineare

Un circuito lineare è costituito soltanto da elementi lineari, da generatori dipendenti lineari e da generatori indipendenti

Un **circuito lineare** è un circuito in cui l'uscita è in relazione lineare con l'ingresso

Potenza e linearità

$$p = R \cdot i^2 = \frac{v^2}{R}$$

La potenza è **funzione non lineare** della corrente o della tensione.

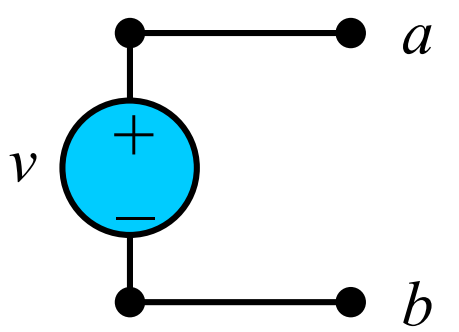
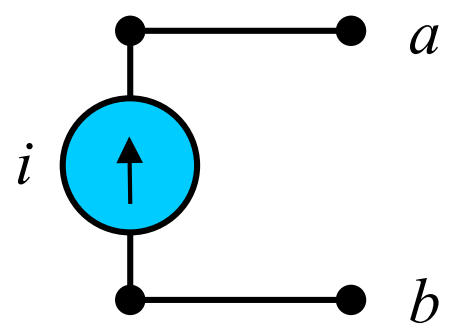
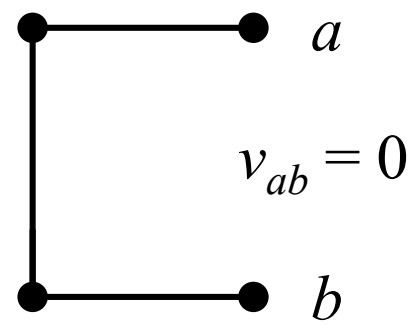
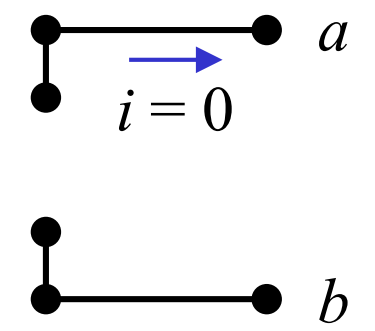
I teoremi che seguono non si potranno applicare alla potenza!

Principio di sovrapposizione degli effetti

In un circuito lineare, la tensione su un elemento o la corrente che lo attraversa è pari alla somma delle tensioni o delle correnti dell'elemento quando ciascuno dei generatori indipendenti funziona da solo (tutti gli altri generatori indipendenti sono spenti)

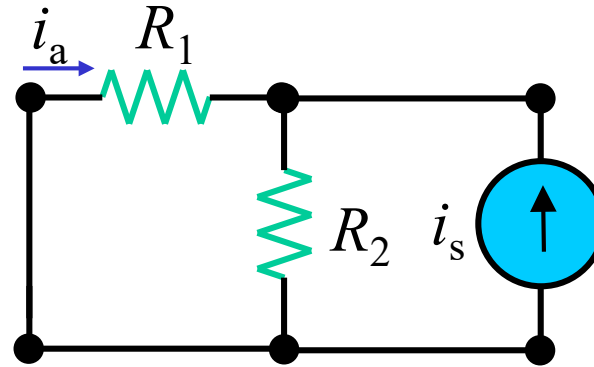
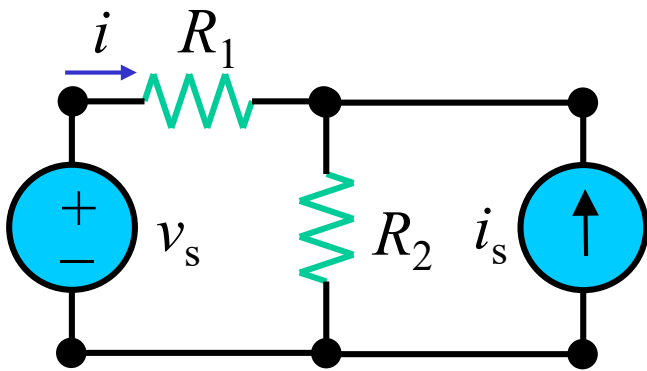
Principio di sovrapposizione degli effetti

Spegnimento dei generatori

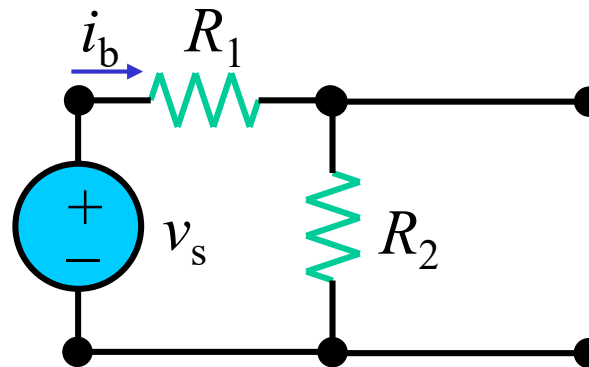
	generatore di tensione	generatore di corrente
acceso		
spento		

Principio di sovrapposizione degli effetti

Esempio:



$$i_a = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

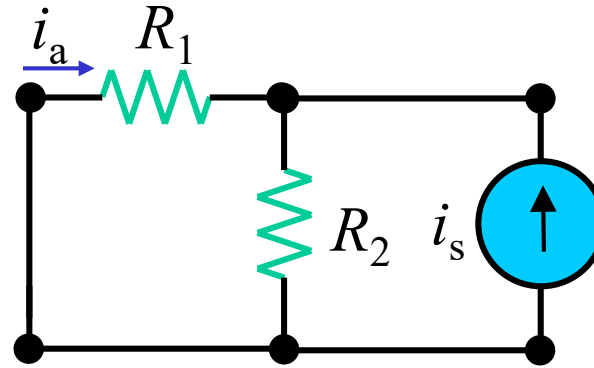
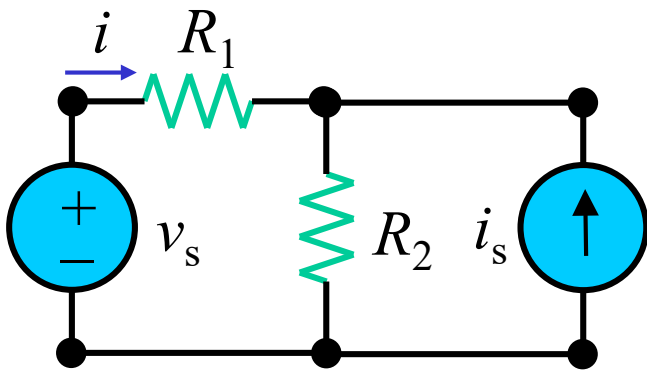


$$i_b = \frac{v_s}{R_1 + R_2}$$

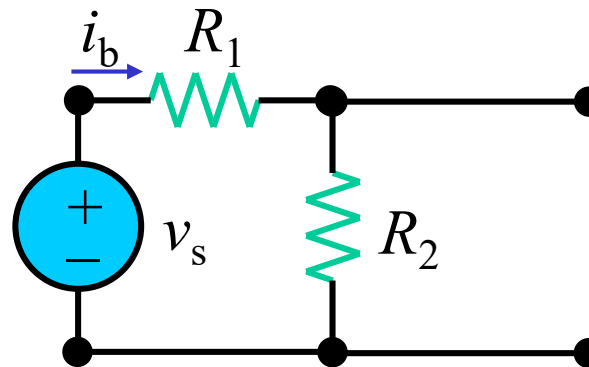
$$i = i_a + i_b = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s + \frac{v_s}{R_1 + R_2} = \frac{v_s - R_2 i_s}{R_1 + R_2}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Esempio:



$$i_a = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$$



$$i_b = \frac{v_s}{R_1 + R_2}$$

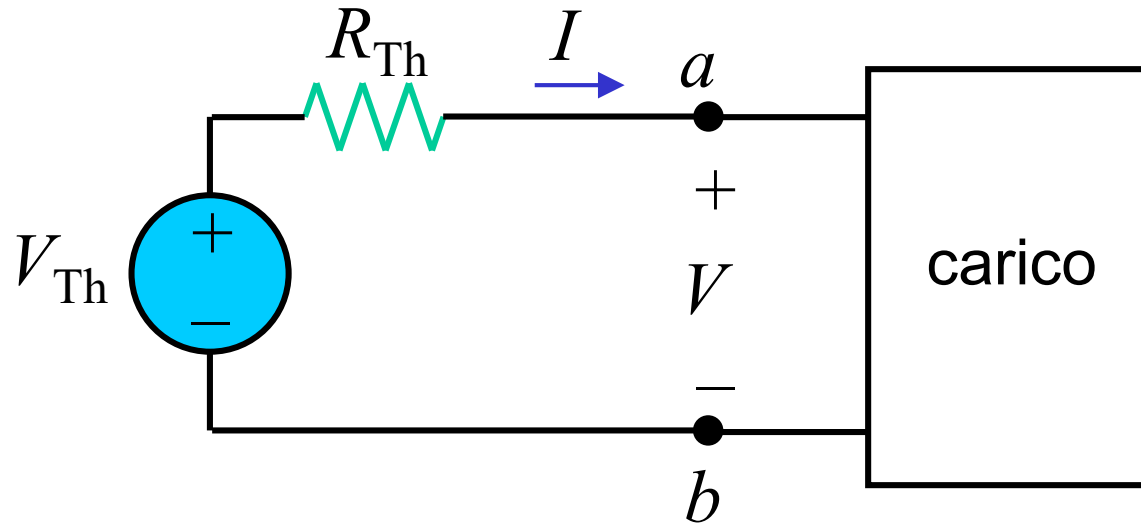
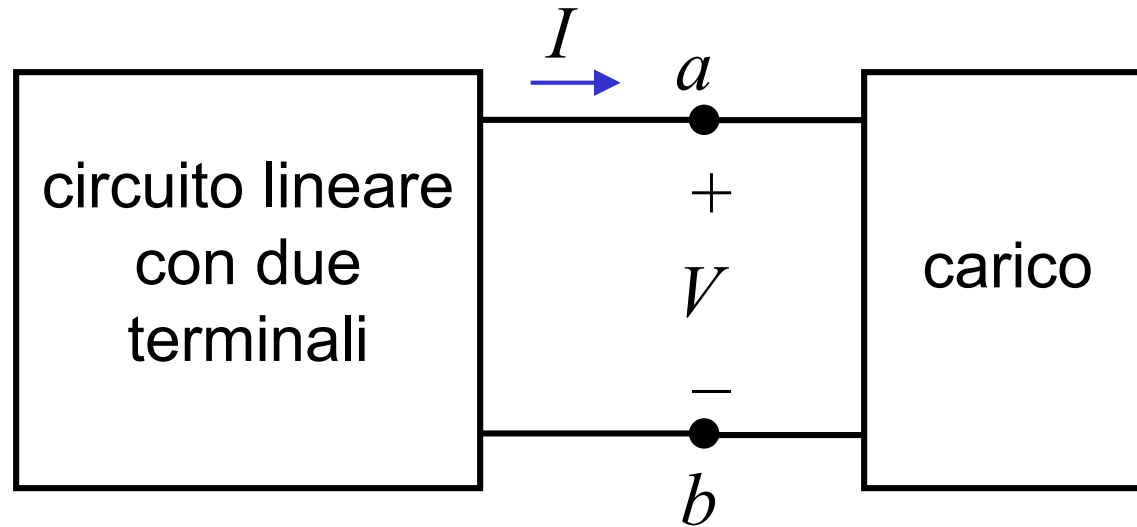
E la potenza?

$$p_a = R_1 \cdot i_a^2$$

$$p_b = R_1 \cdot i_b^2$$

$$R_1 \cdot (i_a + i_b)^2 = R_1 \cdot i_a^2 + R_1 \cdot i_b^2 + 2R_1 \cdot i_a \cdot i_b \neq p_a + p_b$$

Teorema di Thevenin

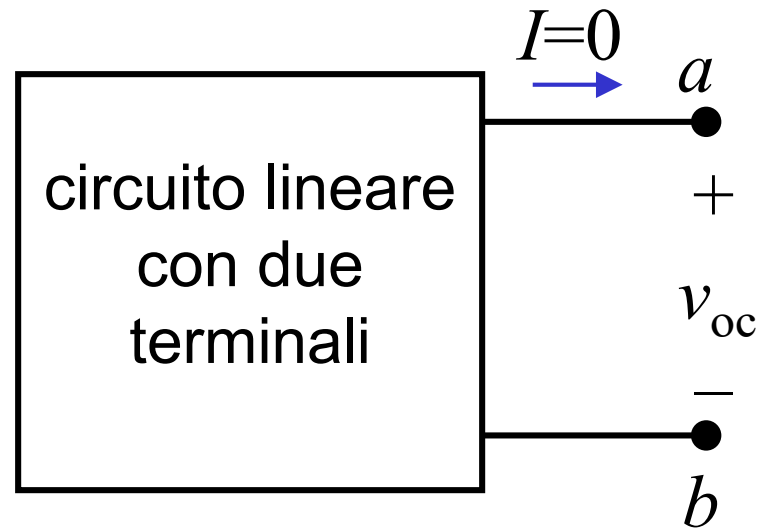


Teorema di Thevenin

Il teorema fu enunciato per primo dallo scienziato tedesco Hermann von Helmholtz (1821-1894) nel 1853 ma fu riscoperto nel 1883 dall'ingegnere francese Léon Charles Thévenin (1857-1926) da cui prende il nome

Teorema di Thevenin

Calcolo di V_{Th}

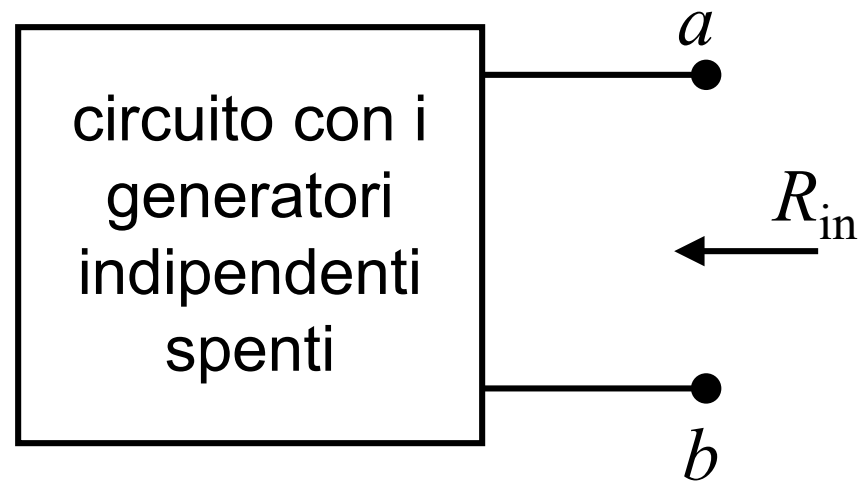


V_{Th} coincide con la tensione a vuoto (circuito aperto ai terminali ab) del circuito: $V_{Th} = v_{oc}$

Teorema di Thevenin

Calcolo di R_{Th}

Caso 1: il circuito non include generatori dipendenti

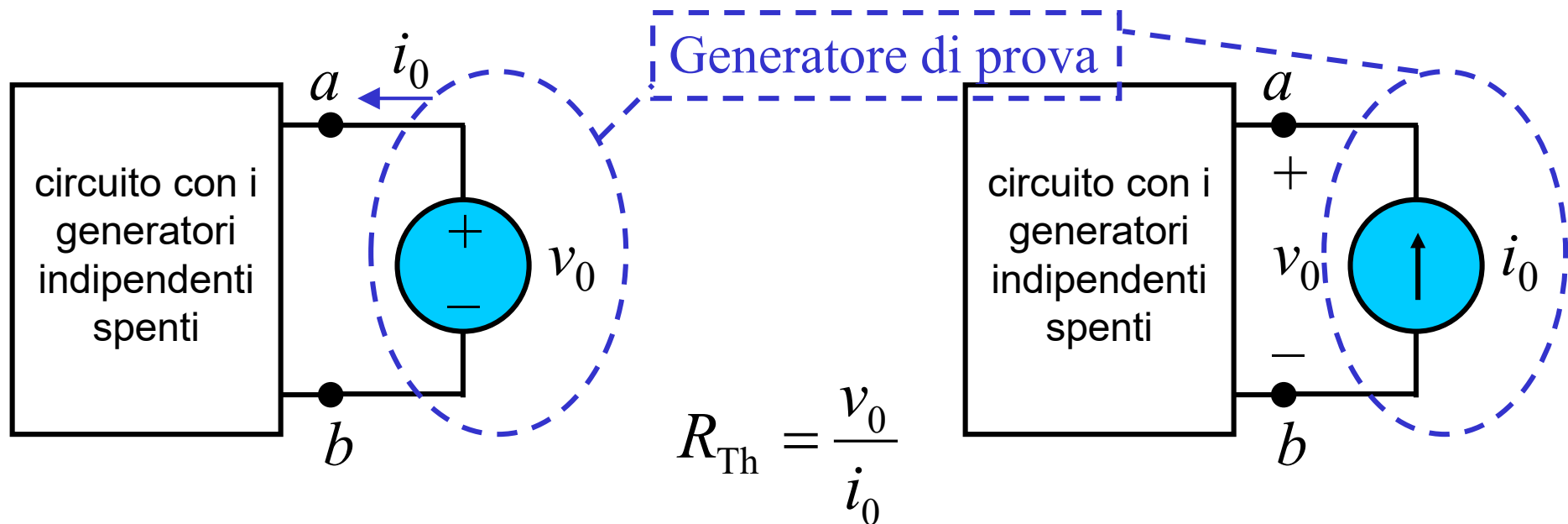


R_{Th} coincide con la resistenza R_{in} vista ai terminali ab dopo aver spento tutti i generatori: $R_{Th} = R_{in}$

Teorema di Thevenin

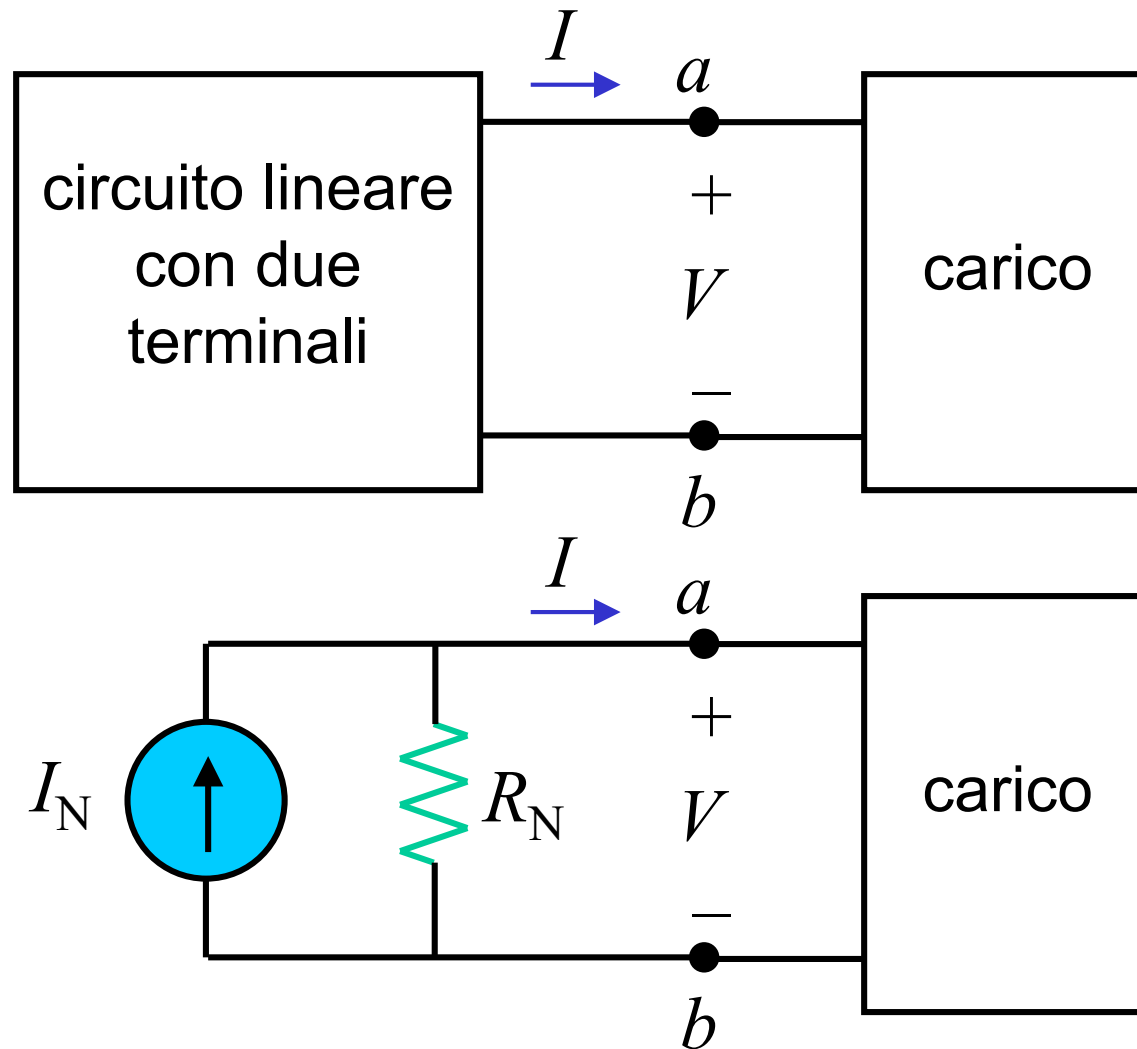
Calcolo di R_{Th}

Caso 2: il circuito include generatori dipendenti



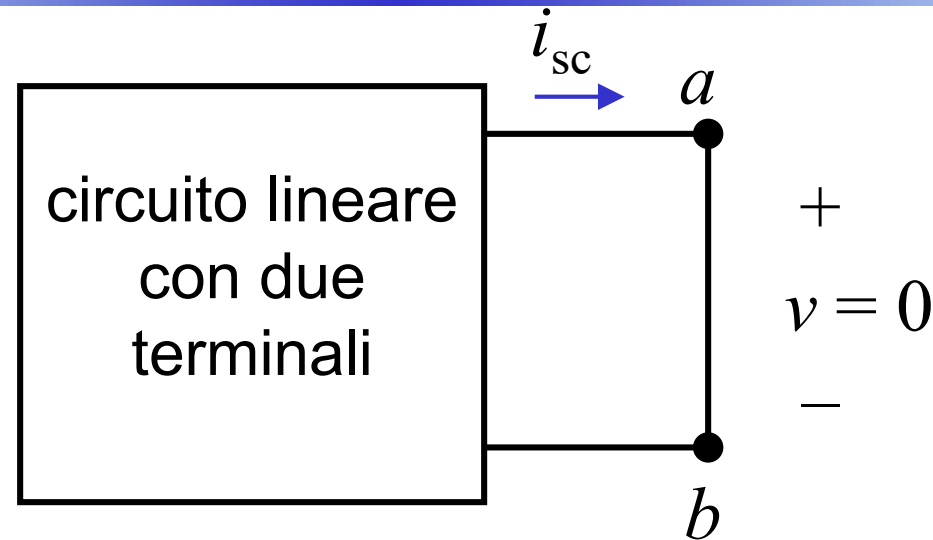
R_{Th} coincide con il rapporto tensione/corrente ai terminali ab (corrente entrante nel circuito)

Teorema di Norton



Enunciato nel 1926 da Edward L. Norton (1898 – 1983)

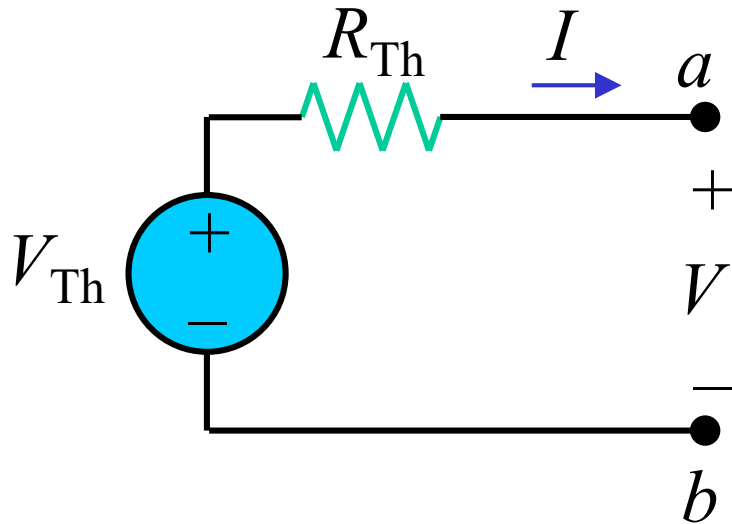
Teorema di Norton



I_N coincide con la corrente di corto circuito del circuito: $I_N = i_{sc}$

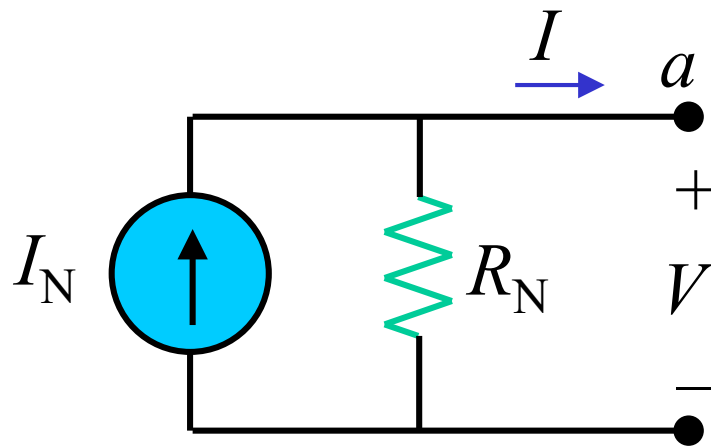
R_N coincide con la resistenza R_{Th} del generatore di Thevenin

Relazione fra Thevenin e Norton



$$R_{Th} = R_N$$

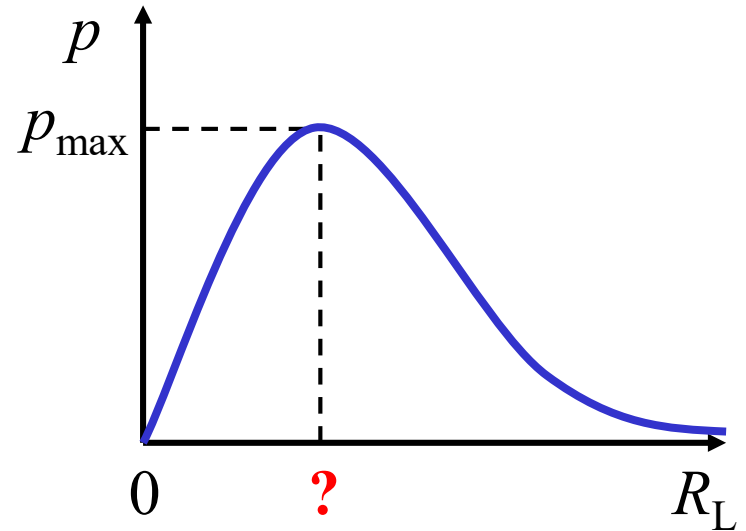
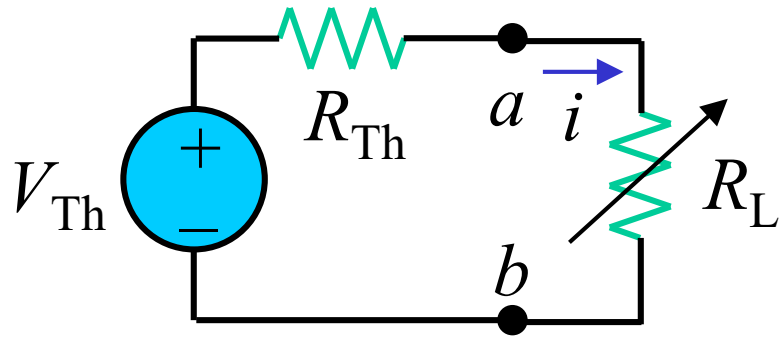
$$V_{Th} = R_N \cdot I_N$$



$$R_N = R_{Th}$$

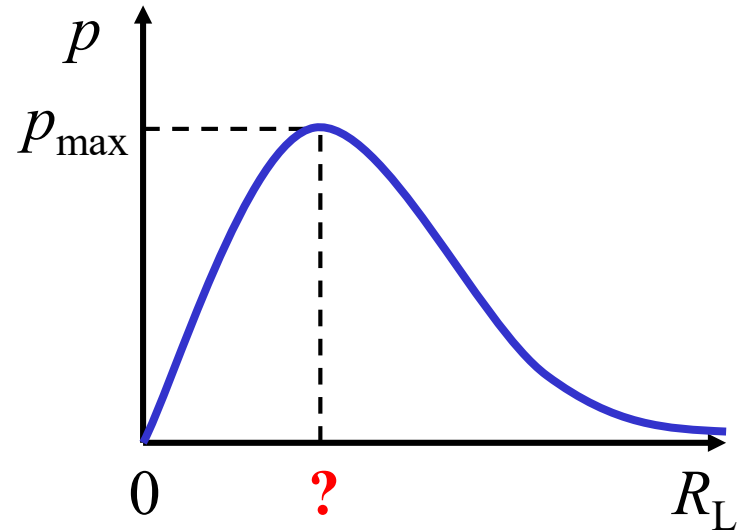
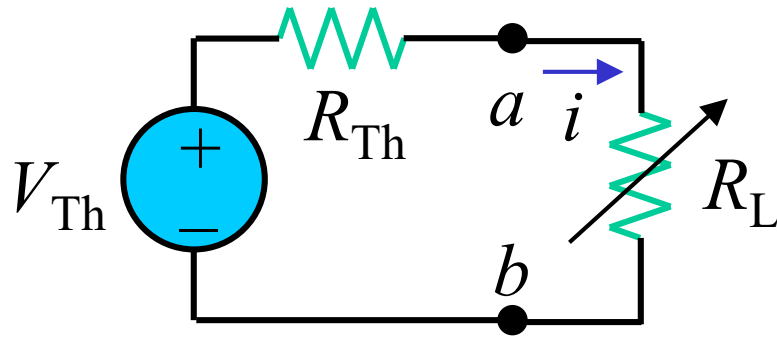
$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

Massimo trasferimento di potenza



$$p = R_L \cdot i^2 = R_L \cdot \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2$$

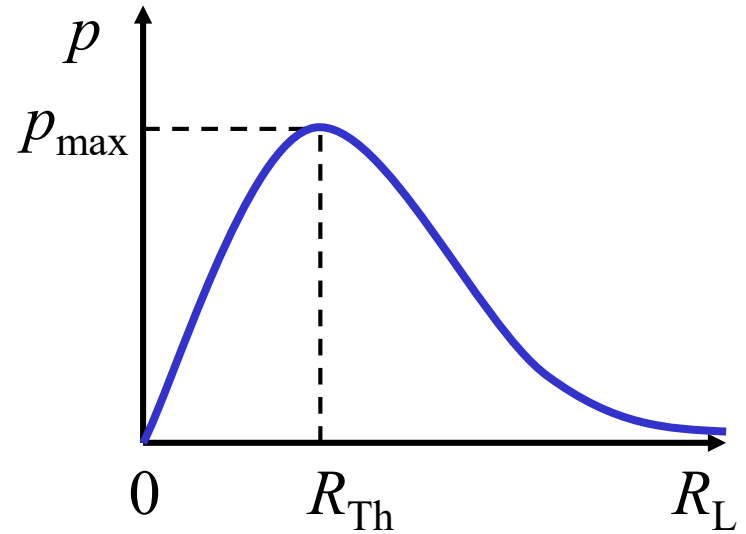
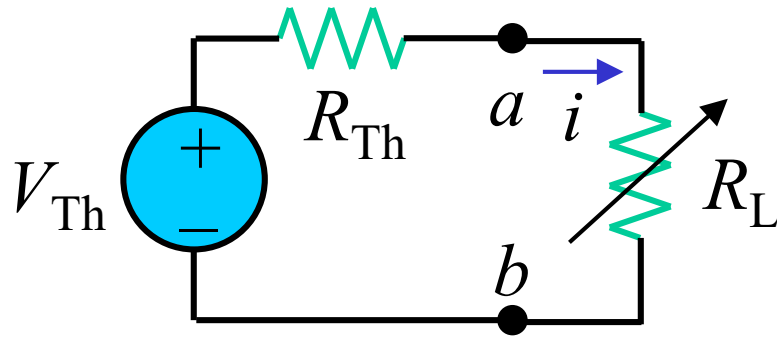
Massimo trasferimento di potenza



$$p = R_L \cdot i^2 = R_L \cdot \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial R_L} = \left[\frac{1}{(R_{Th} + R_L)^2} - \frac{2R_L}{(R_{Th} + R_L)^3} \right] \cdot V_{Th}^2 = \frac{(R_{Th} - R_L) \cdot V_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^3} = 0$$

Massimo trasferimento di potenza

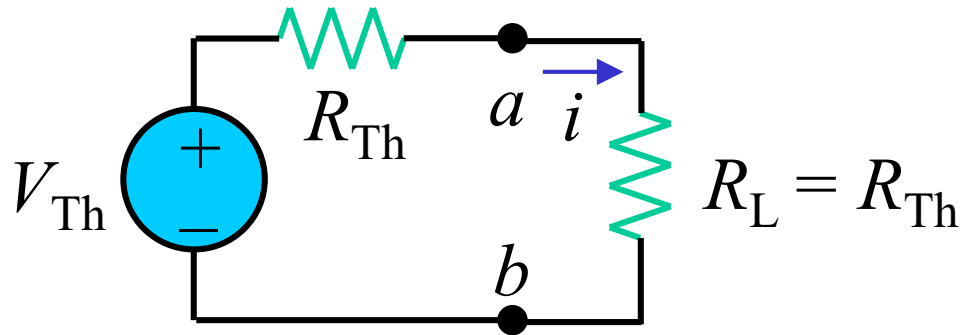


$$p = R_L \cdot i^2 = R_L \cdot \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2$$

Il massimo trasferimento di potenza si ha quando $R_L = R_{Th}$ e la **potenza massima** fornita al carico è

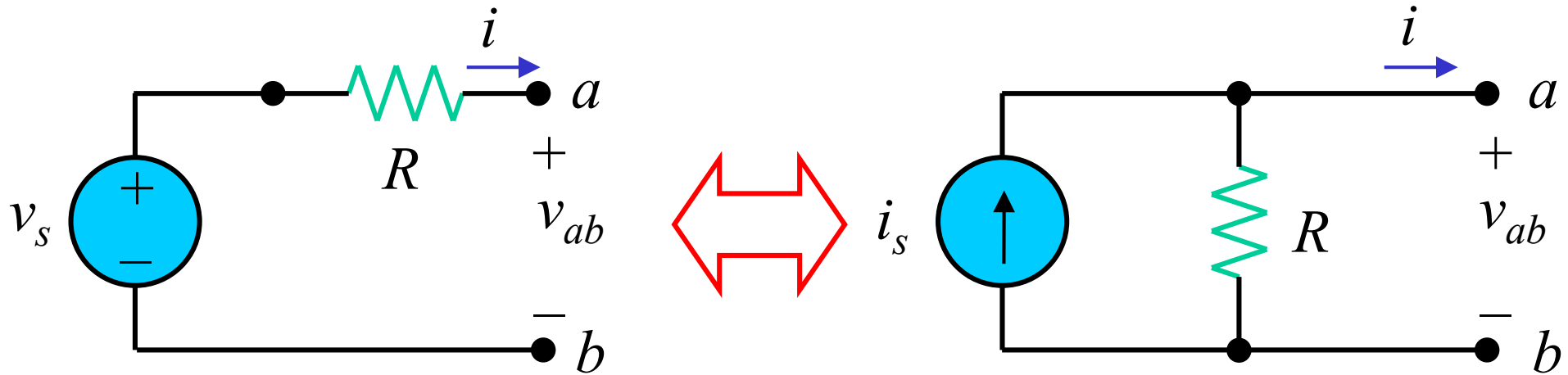
$$p_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$

Massimo trasferimento di potenza



Se $R_L = R_{Th}$ si dice che il
carico è adattato al generatore

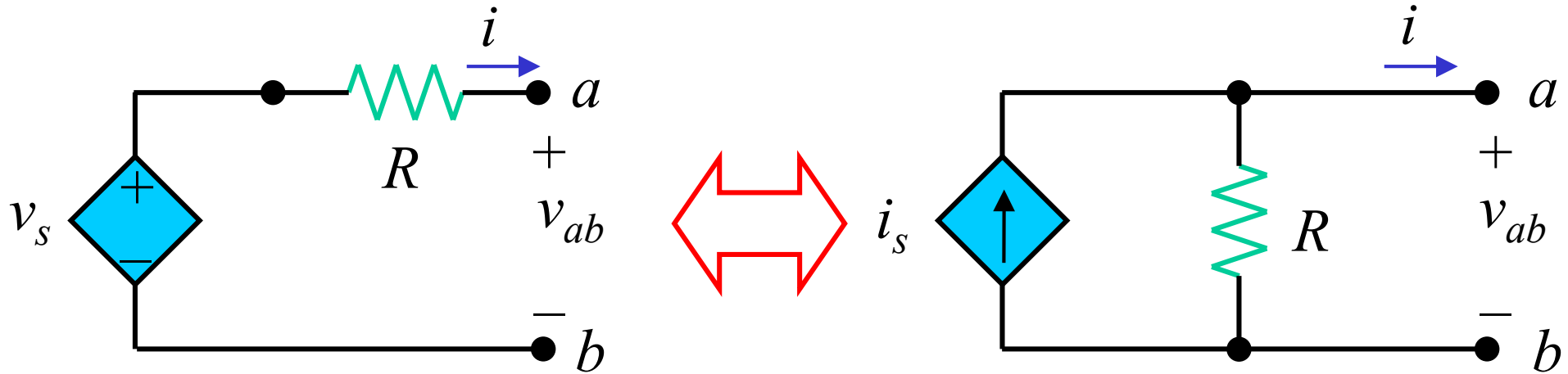
Trasformazione di generatori



$$v_s = R \cdot i_s$$

$$i_s = \frac{v_s}{R}$$

Trasformazione di generatori



$$v_s = R \cdot i_s$$

$$i_s = \frac{v_s}{R}$$