



Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

Circuiti Elettrici Lineari

Circuiti del secondo ordine

Sommario

- Definizione
- Circuito RLC serie autonomo
- Tre casi: sovrasmorzato, a smorzamento critico, sottosmorzato
- Circuito RLC parallelo autonomo
- Risposta al gradino di un circuito RLC serie
- Risposta al gradino di un circuito RLC parallelo
- Risposta completa di un circuito del secondo ordine

Circuiti del secondo ordine

Un **circuito del secondo ordine** è caratterizzato da un'equazione differenziale del secondo ordine

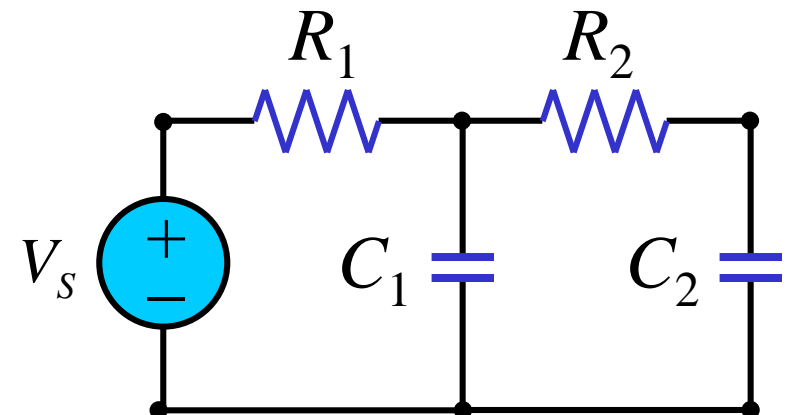
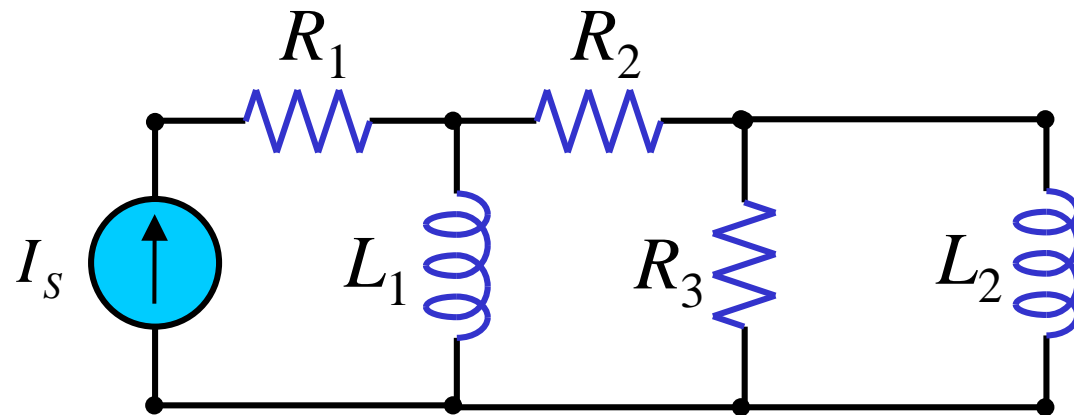
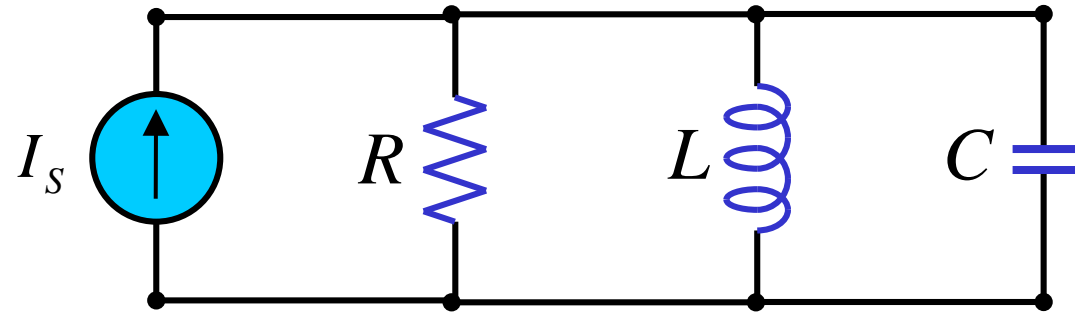
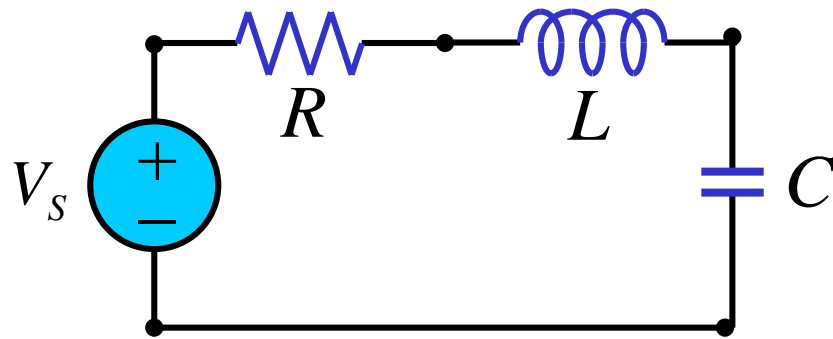
I circuiti del secondo ordine contengono una o più resistenze e due elementi dinamici (L e/o C)

Circuiti del secondo ordine

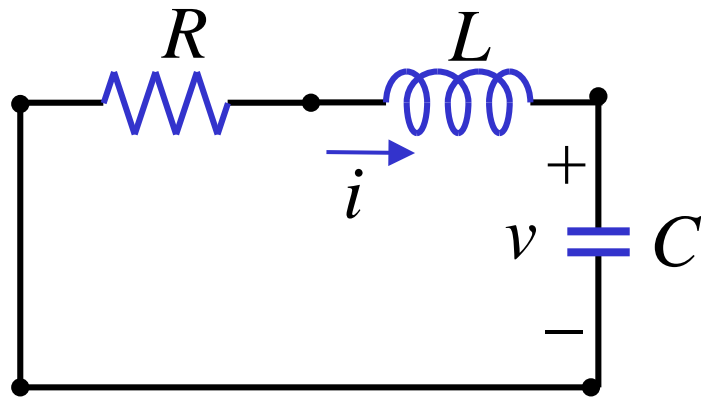
L'eccitazione può essere di due tipi

- **autonoma**: il circuito **non comprende generatori indipendenti** ed evolve nel tempo a partire dalle condizioni iniziali sugli elementi dinamici
- **forzata**: il circuito **comprende generatori indipendenti** che ne determinano il comportamento nel tempo

Circuiti del secondo ordine: esempi



Circuito *RLC* serie autonomo



Ipotesi:

$$i(0) = I_0$$

$$v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i \cdot dt = V_0$$

$$\begin{aligned} i(t) &= ? \\ v(t) &= ? \end{aligned} \quad (\text{per } t > 0)$$

Circuito RLC serie autonomo

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \cdot dt = 0$$

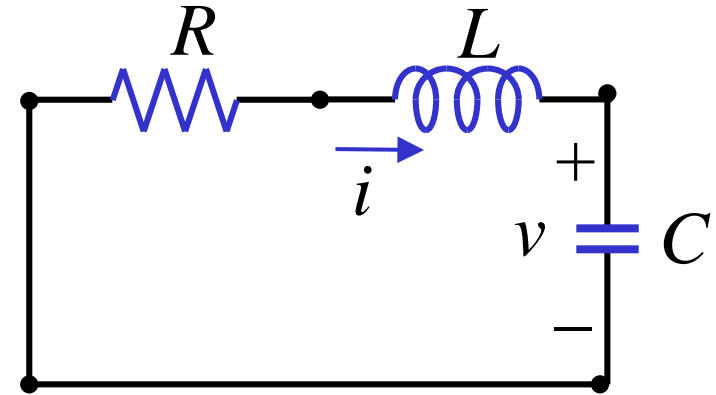
Derivando rispetto al tempo e riordinando si ha:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Condizioni iniziali:

$$R \cdot i(0) + L \cdot \frac{di(0)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i \cdot dt}_{V_0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$i(0) = I_0$$
$$\frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L} (R \cdot I_0 + V_0)$$



Circuito *RLC* serie autonomo

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Ponendo $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si ha:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0$$

Soluzione equazione di secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0$$

Verifichiamo se esiste una soluzione del tipo $i = Ae^{st}$

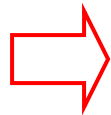
Sostituendo si ottiene:

$$As^2 e^{st} + 2\alpha \cdot Ase^{st} + \omega_0^2 \cdot Ae^{st} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ae^{st} (s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2) = 0$$

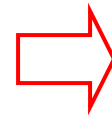
$$Ae^{st} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2 = 0$$

Soluzione equazione di secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0$$



$$i = Ae^{st}$$



$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2 = 0$$

Le radici sono:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

e quindi si hanno due soluzioni possibili: $i_1 = A_1 e^{s_1 t}$ e $i_2 = A_2 e^{s_2 t}$

Poiché l'equazione differenziale è lineare, qualunque combinazione di i_1 e i_2 è anch'essa una soluzione:

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Soluzione equazione di secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Tre diversi casi:

1. se $\alpha > \omega_0$ si ha il caso **sovrasmorzato**
2. se $\alpha = \omega_0$ si ha il caso di **smorzamento critico**
3. se $\alpha < \omega_0$ si ha il caso **sottosmorzato**

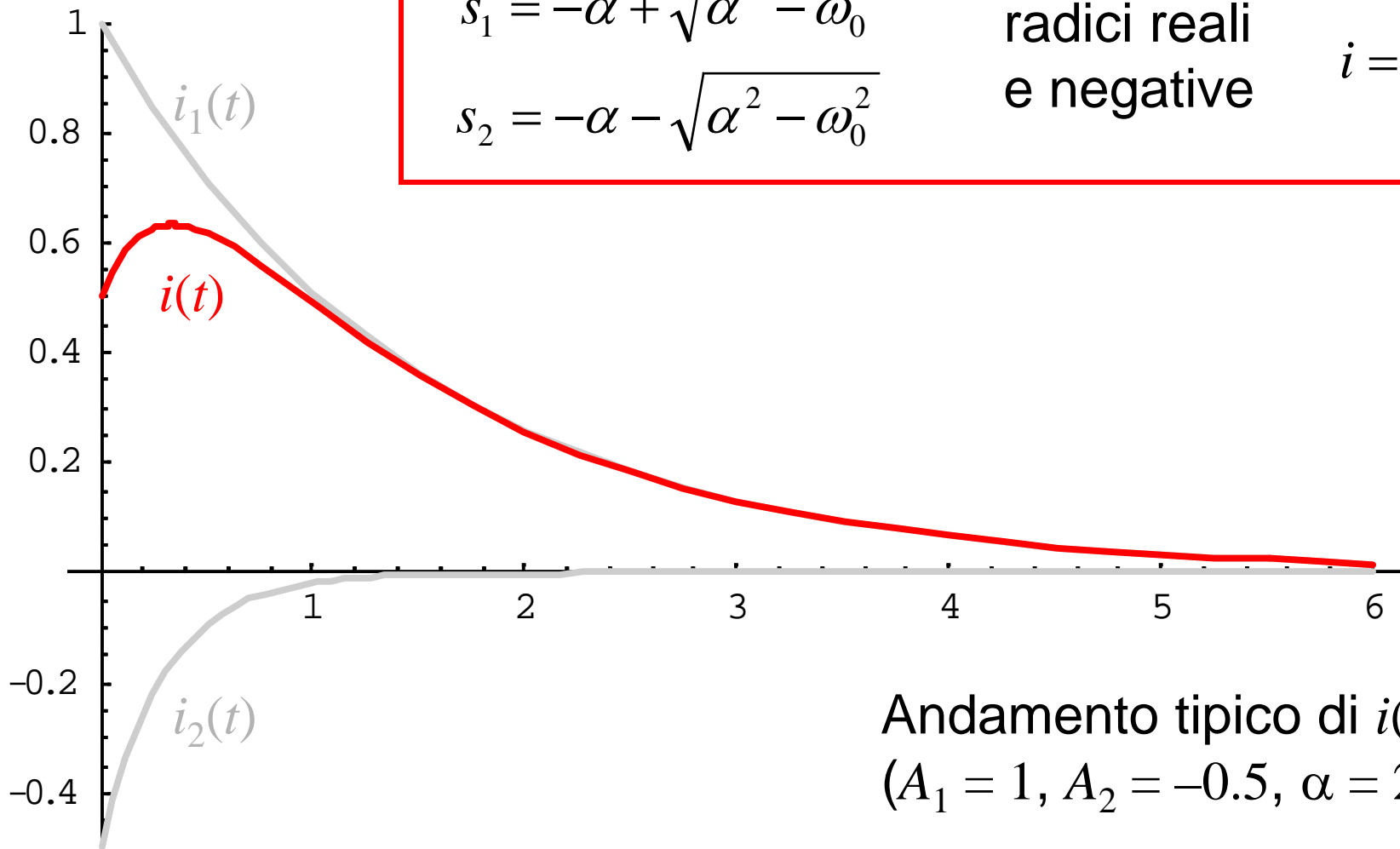
Caso sovrasmorzato ($\alpha > \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

radici reali
e negative

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



Andamento tipico di $i(t)$

$$(A_1 = 1, A_2 = -0.5, \alpha = 2, \omega_0 = 1.5)$$

Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$$

radici reali
negative e
coincidenti

$$i = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = A_3 e^{-\alpha t}$$

Non possono essere soddisfatte contemporaneamente le due condizioni iniziali con la scelta della sola costante A_3

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{di}{dt} + \alpha^2 \cdot i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i \right) + \alpha \cdot \left(\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i \right) = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i = f \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dt} + \alpha \cdot f = 0$$

Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)

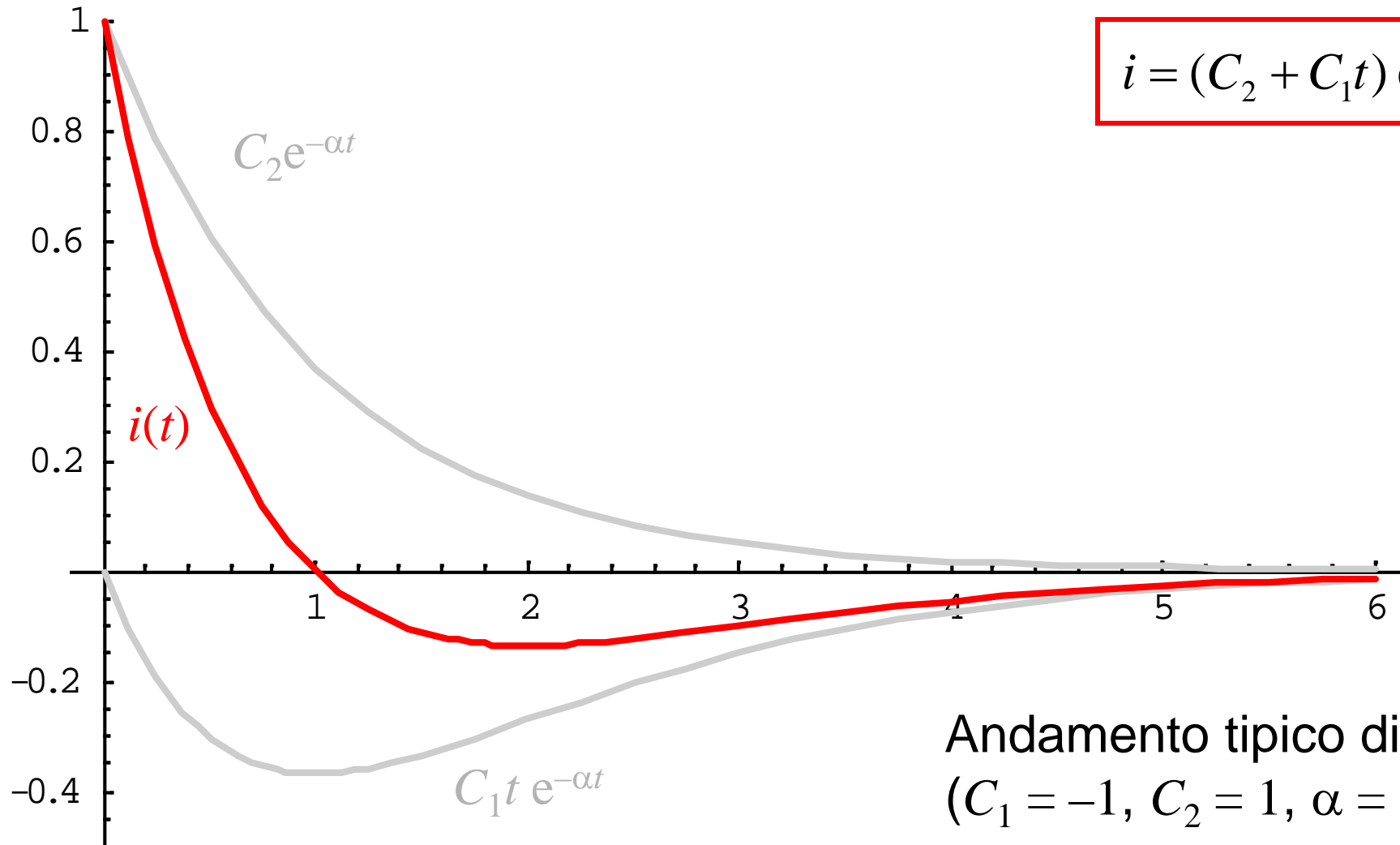
$$\frac{df}{dt} + \alpha \cdot f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = C_1 e^{-\alpha t}$$

$$\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i = f \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha \cdot i = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (e^{\alpha t} i) = C_1$$

La soluzione è $e^{\alpha t} i = C_1 t + C_2$ da cui:

$$i = (C_2 + C_1 t) e^{-\alpha t}$$

Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)



$$i = (C_2 + C_1 t) e^{-\alpha t}$$

Andamento tipico di $i(t)$
($C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $\alpha = 1$)

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + j\omega_d & \text{radici} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_d & \text{complesse} \\ & & \text{e coniugate} \end{aligned} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

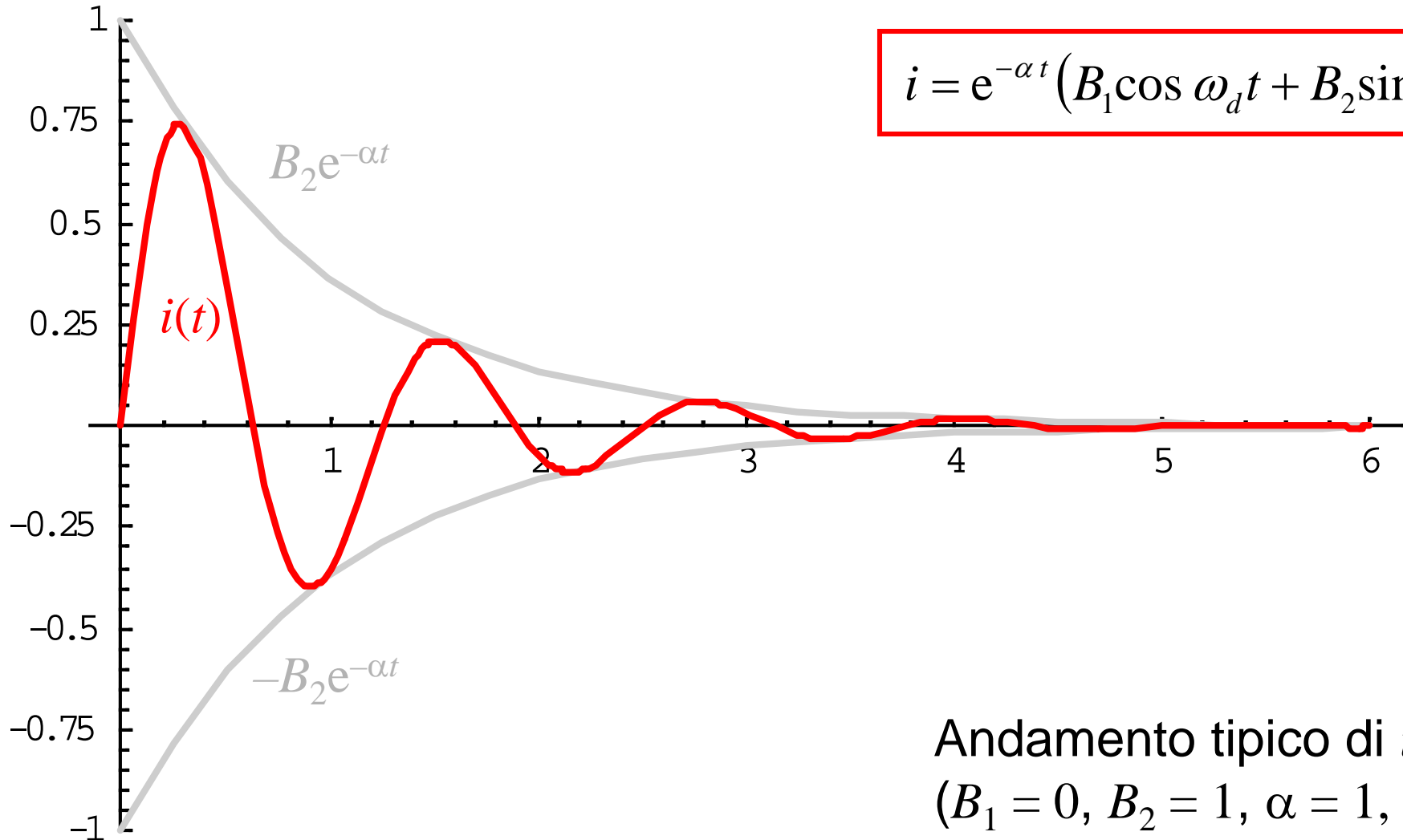
$$i = A_1 e^{-\alpha t + j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t - j\omega_d t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{+j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

Ricordando che $e^{+j\omega_d t} = \cos \omega_d t + j \sin \omega_d t$ e $e^{-j\omega_d t} = \cos \omega_d t - j \sin \omega_d t$ si ha:

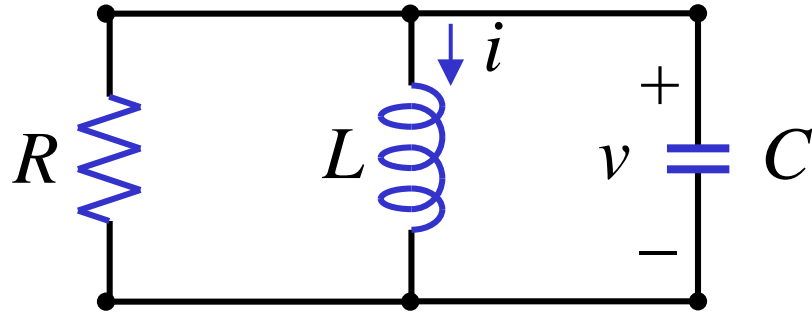
$$\begin{aligned} i &= e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + jA_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t - jA_2 \sin \omega_d t) \\ &= e^{-\alpha t} ((A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t) \end{aligned}$$

$$i = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)



Circuito RLC parallelo autonomo



Ipotesi:

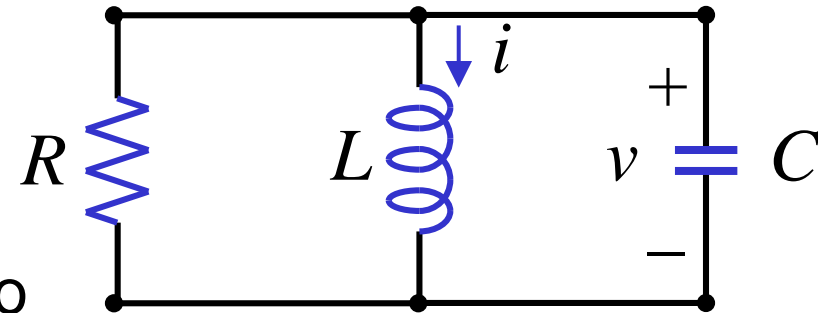
$$v(0) = V_0$$

$$i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v \cdot dt = I_0$$

$$\begin{aligned} v(t) &= ? \\ i(t) &= ? \end{aligned} \quad (\text{per } t > 0)$$

Circuito RLC parallelo autonomo

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v \cdot dt + C \cdot \frac{dv}{dt} = 0$$



Derivando rispetto al tempo e riordinando si ha:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Condizioni iniziali:

$$\frac{v(0)}{R} + \frac{1}{L} \underbrace{\int_{-\infty}^0 v \cdot dt}_{I_0} + C \cdot \frac{dv(0)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v(0) = V_0$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{V_0 + R \cdot I_0}{RC}$$

Circuito RLC parallelo autonomo

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Ponendo $\alpha = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si ha:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = 0$$

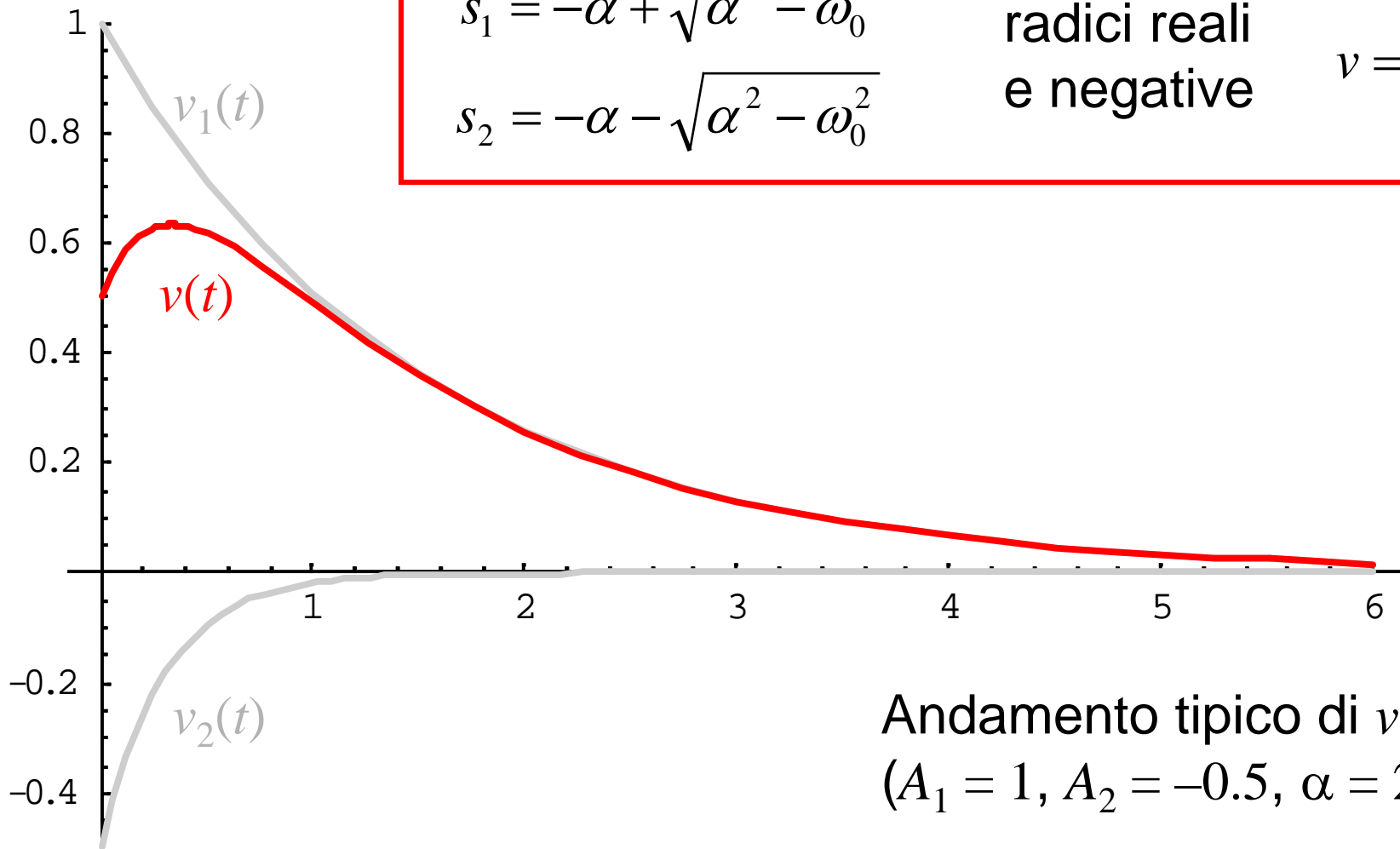
Caso sovrasmorzato ($\alpha > \omega_0$)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

radici reali
e negative

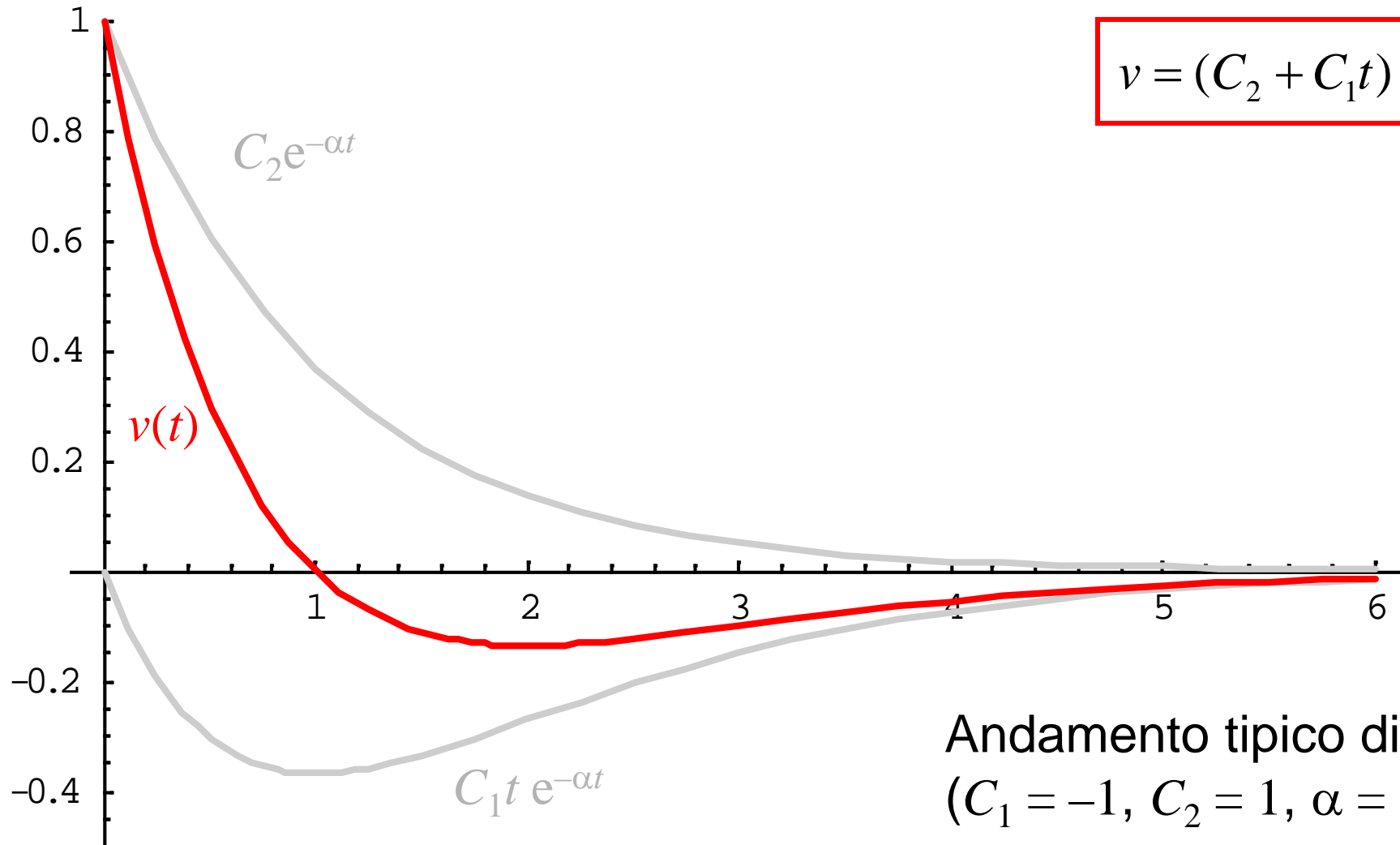
$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



Andamento tipico di $v(t)$

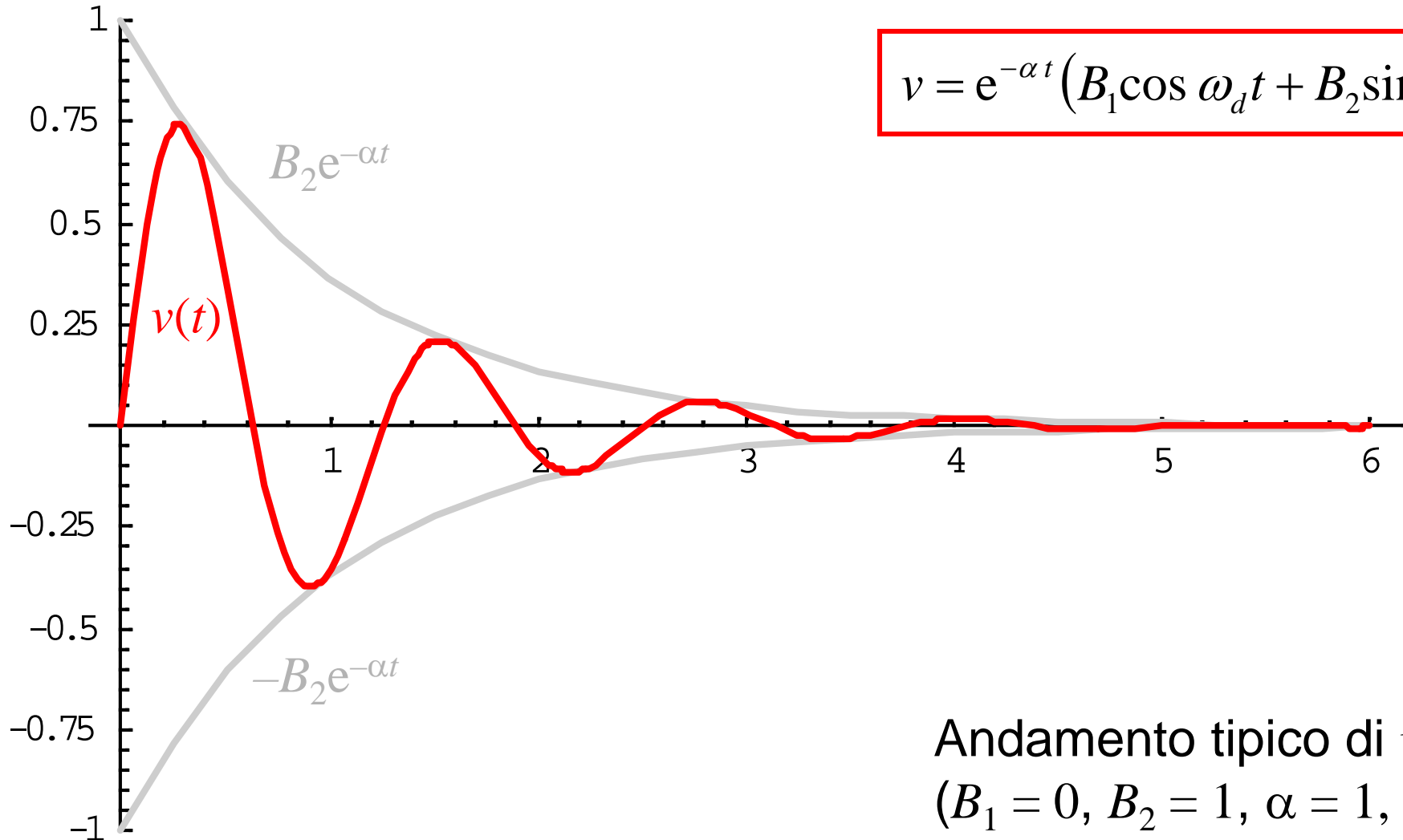
$$(A_1 = 1, A_2 = -0.5, \alpha = 2, \omega_0 = 1.5)$$

Caso a smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$)

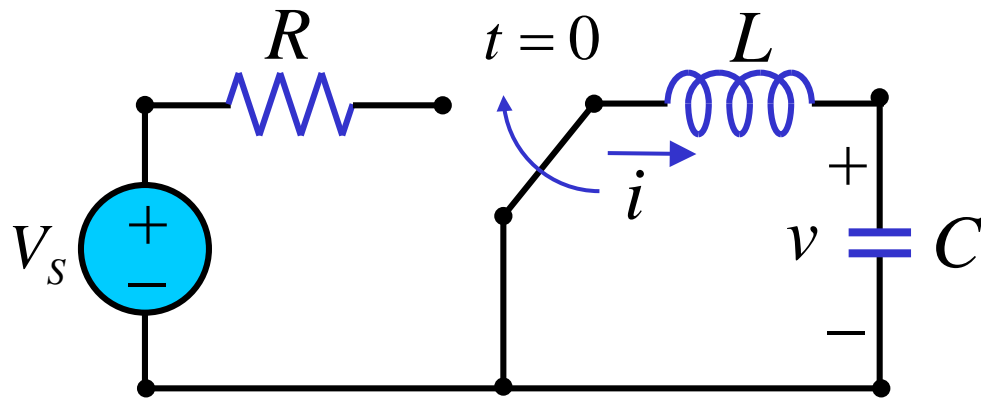


$$v = (C_2 + C_1 t) e^{-\alpha t}$$

Caso sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$)



Risposta al gradino di un circuito RLC serie



Ipotesi:

$$i(0) = I_0$$

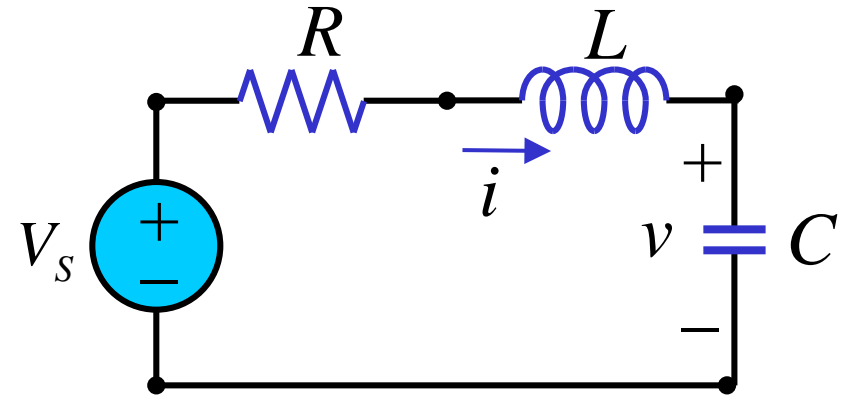
$$v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i \cdot dt = V_0$$

$$\begin{aligned} i(t) &= ? \\ v(t) &= ? \end{aligned} \quad (\text{per } t > 0)$$

Risposta al gradino di un circuito RLC serie

Per $t > 0$

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + v = V_s$$



Poiché $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$ si ha:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 (v - V_s)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{d(v - V_s)}{dt} + \frac{v - V_s}{LC} = 0$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 (v - V_s)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{d(v - V_s)}{dt} + \omega_0^2 \cdot (v - V_s) = 0$$

Risposta al gradino di un circuito RLC serie

$$\frac{d^2(v - V_S)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{d(v - V_S)}{dt} + \omega_0^2 \cdot (v - V_S) = 0$$

$\alpha > \omega_0$: caso **sovrasmorzato**

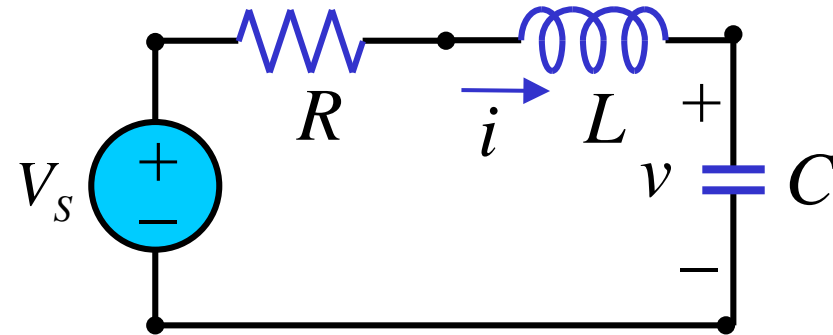
$$v = V_S + A_1 e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t}$$

$\alpha = \omega_0$: caso di **smorzamento critico**

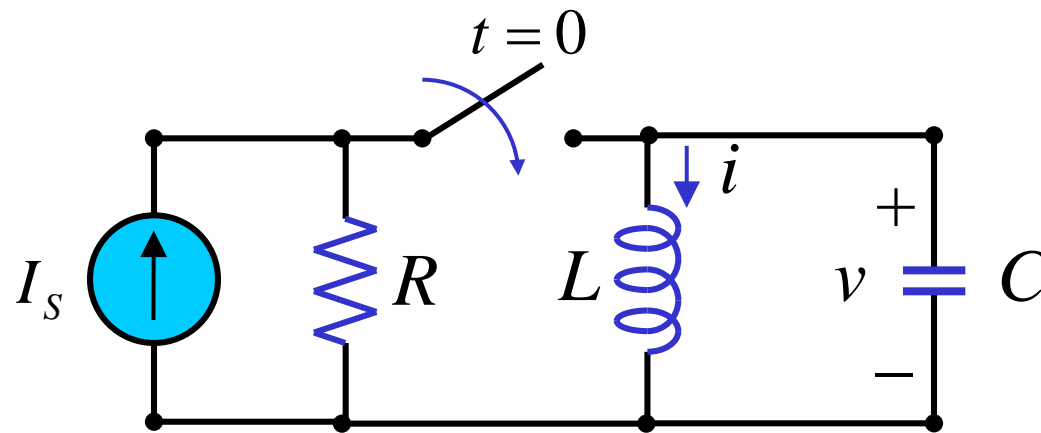
$$v = V_S + (C_2 + C_1 t) e^{-\alpha t}$$

$\alpha < \omega_0$: caso **sottosmorzato**

$$v = V_S + e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad \left(\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \right)$$



Risposta al gradino di un RLC parallelo



Ipotesi:

$$v(0) = V_0$$

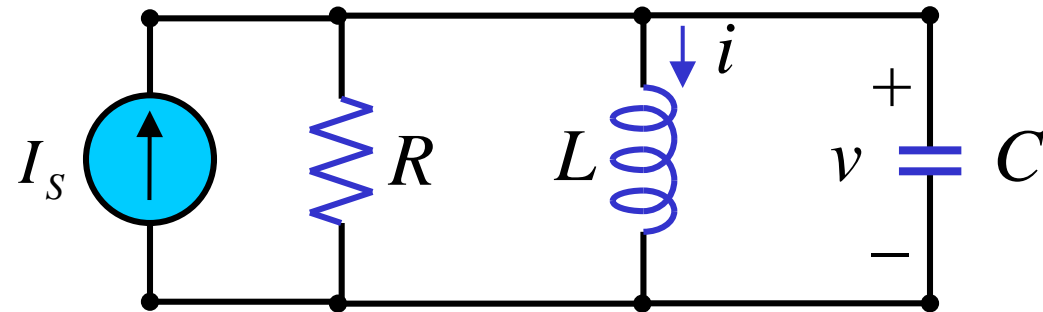
$$i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v \cdot dt = I_0$$

$$\begin{aligned} v(t) &= ? \\ i(t) &= ? \end{aligned} \quad (\text{per } t > 0)$$

Risposta al gradino di un RLC parallelo

Per $t > 0$

$$C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = I_S$$



Poiché $v = L \cdot \frac{di}{dt}$ si ha:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_S}{LC} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 (i - I_S)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{d(i - I_S)}{dt} + \frac{i - I_S}{LC} = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 (i - I_S)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{d(i - I_S)}{dt} + \omega_0^2 \cdot (i - I_S) = 0$$

Risposta al gradino di un RLC parallelo

$$\frac{d^2(i - I_S)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{d(i - I_S)}{dt} + \omega_0^2 \cdot (i - I_S) = 0$$

$\alpha > \omega_0$: caso **sovrasmorzato**

$$i = I_S + A_1 e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t}$$

$\alpha = \omega_0$: caso di **smorzamento critico**

$$i = I_S + (C_2 + C_1 t) e^{-\alpha t}$$

$\alpha < \omega_0$: caso **sottosmorzato**

$$i = I_S + e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad \left(\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \right)$$

Risposta completa di circuiti del II ordine/1

La **risposta completa** di un circuito del secondo ordine è sempre del tipo:

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0^-) & t < t_0 \\ x(\infty) + x_n(t) & t > t_0 \end{cases}$$

dove x rappresenta indifferentemente la tensione o la corrente sul condensatore o sull'induttanza e t_0 è l'istante in cui commuta l'interruttore. Si richiede:

- la determinazione della **risposta naturale** x_n del circuito;
- i **valori iniziali** $x(t_0^-)$, $x(t_0^+)$ e $dx(t_0^+)/dt$;
- il **valore a regime** $x(\infty)$;

Risposta completa di circuiti del II ordine/2

La **risposta naturale** x_n si calcola considerando il circuito per $t > t_0$, spegnendo tutti i generatori indipendenti e scrivendo l'equazione del II ordine per x_n :

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dx_n}{dt} + \omega_0^2 \cdot x_n = 0$$

$\alpha > \omega_0$ (sovrasmorzato): $x_n = A_1 e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})(t-t_0)} + A_2 e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})(t-t_0)}$

$\alpha = \omega_0$ (smorzamento critico): $x_n = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha(t-t_0)}$

$\alpha < \omega_0$ (sottosmorzato): $x_n = e^{-\alpha(t-t_0)} (A_1 \cos \omega_d (t-t_0) + A_2 \sin \omega_d (t-t_0))$
($\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$)

Risposta completa di circuiti del II ordine/3

per $t < t_0$:

$$x(t) = x(t_0^-)$$

per $t > t_0$:

$$x(t) = \begin{cases} x(\infty) + A_1 e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})(t-t_0)} + A_2 e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})(t-t_0)} & \alpha > \omega_0 \\ x(\infty) + (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha(t-t_0)} & \alpha = \omega_0 \\ x(\infty) + e^{-\alpha(t-t_0)} (A_1 \cos \omega_d (t-t_0) + A_2 \sin \omega_d (t-t_0)) & \alpha < \omega_0 \end{cases}$$

Utilizzando i valori di $x(t_0^+)$ e $dx(t_0^+)/dt$ si calcolano le costanti A_1 e A_2 .