



Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

Circuiti Elettrici Lineari

Sinusoidi e fasori

Sommario

- Motivazione
- Segnali sinusoidali
- Fasori
- Relazioni tra fasori di tensione e di corrente
- Impedenza e ammettenza
- KCL e KVL per i fasori
- Impedenze in serie e in parallelo
- Trasformazioni stella/triangolo per le impedenze

Motivazione

La distribuzione dell'energia elettrica avviene utilizzando tensioni e correnti che variano con legge sinusoidale.

Grazie all'analisi di Fourier, qualunque segnale variabile nel tempo può essere scomposto in una somma di contributi sinusoidali (serie di Fourier o integrale di Fourier)

Nomenclatura

Un **segnale sinusoidale** ha la forma della funzione seno o coseno.

Una corrente (tensione) sinusoidale è anche detta **corrente (tensione) alternata** (o ac dall'inglese *alternate current* che si contrappone a dc *direct current*)

Segnali sinusoidali

Data la funzione

$$v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

è sempre possibile scrivere

$$v(t) = C \cos (\omega t + \varphi)$$

Dimostrazione:

$$v(t) = C \cos (\omega t + \varphi) = C \cos \omega t \cos \varphi - C \sin \omega t \sin \varphi$$

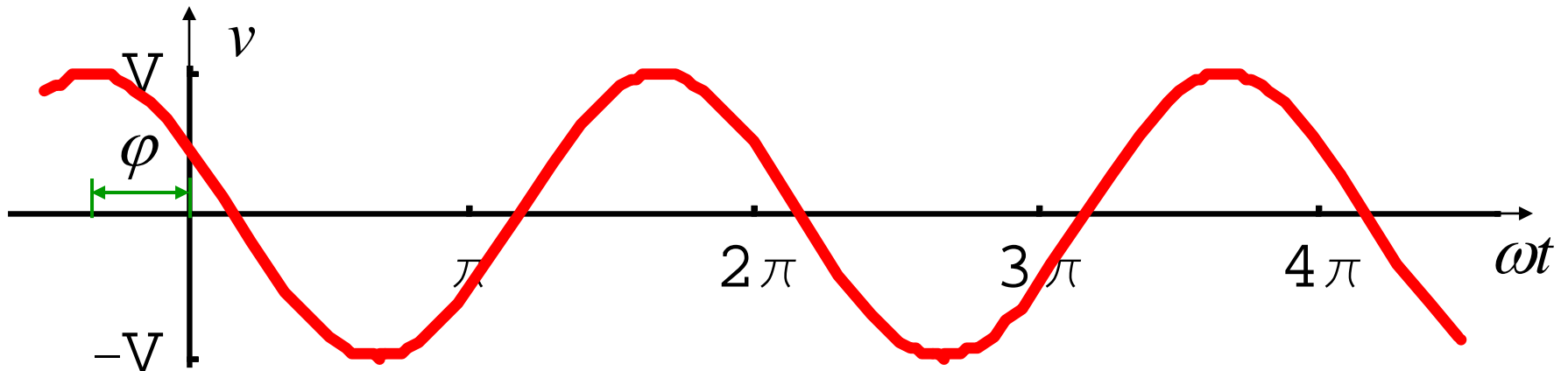
da cui

$$\begin{cases} C \cos \varphi = A \\ C \sin \varphi = -B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{B}{A}$$

Segnali sinusoidali

$$v(t) = V \cos(\omega t + \varphi)$$

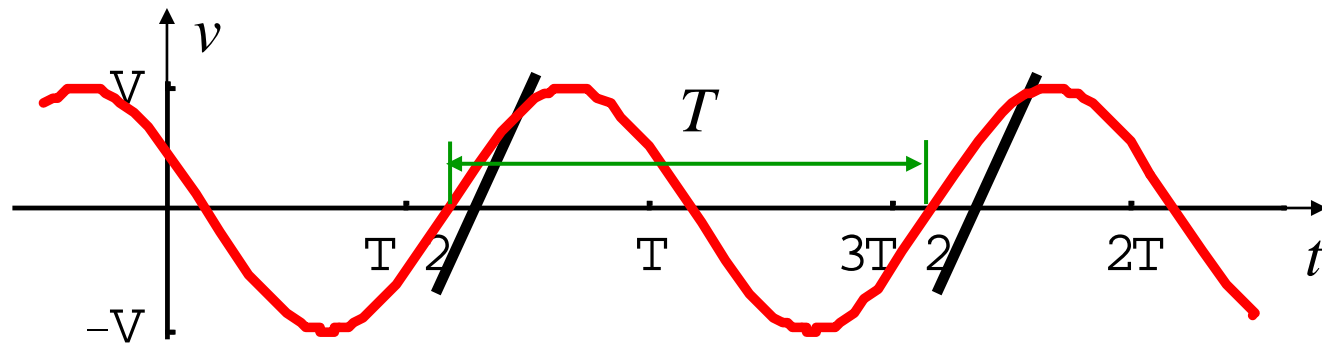
- V ampiezza della sinusoide
- ω frequenza angolare o pulsazione (rad/s)
- $\omega t + \varphi$ argomento della sinusoide
- φ fase della sinusoide



Segnali sinusoidali

Il **periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è tempo impiegato per compiere un ciclo

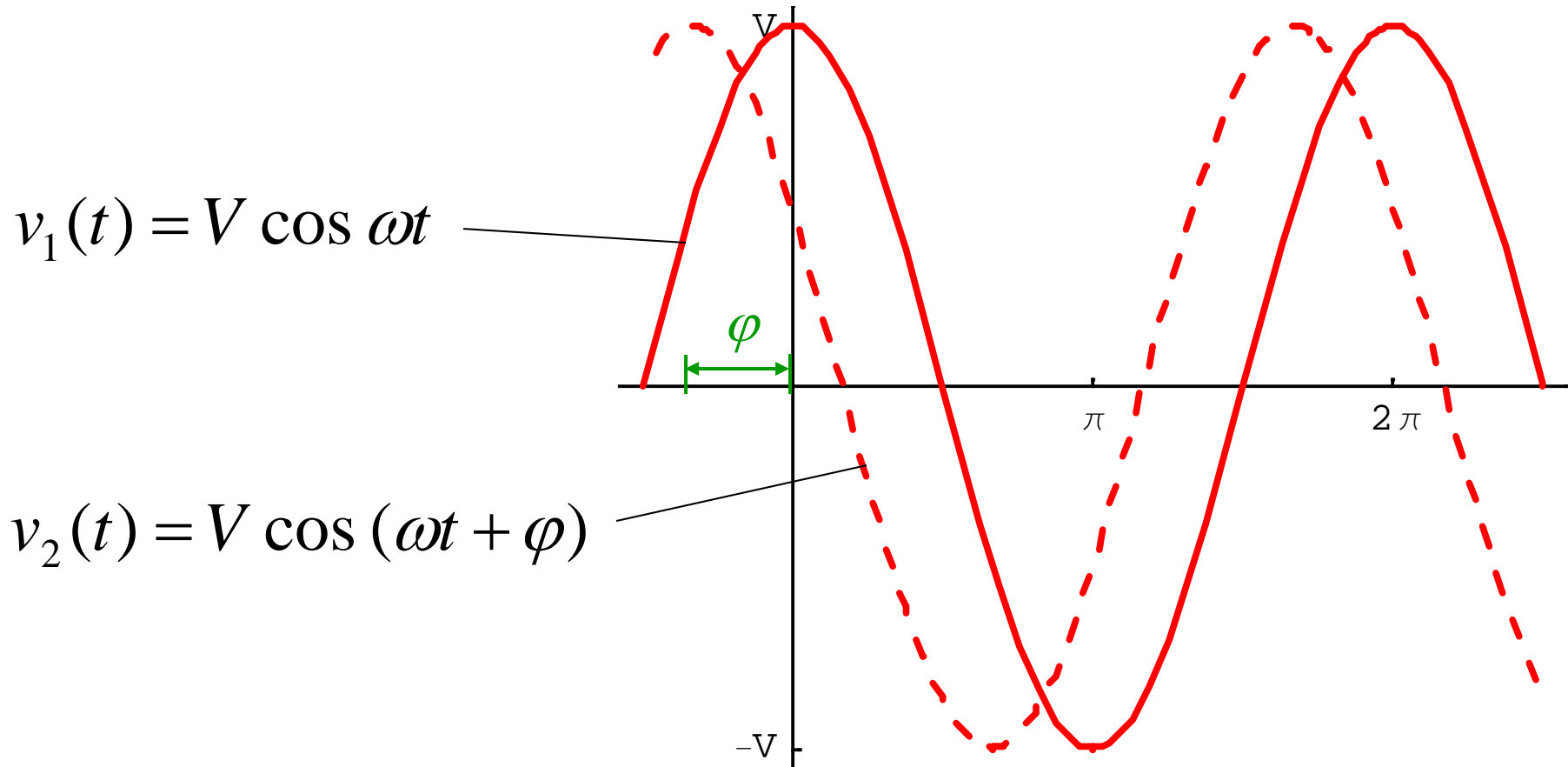
$$v(t) = V \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \Rightarrow v(t + nT) = v(t)$$



La **frequenza** $f = \frac{1}{T}$ è il numero di cicli per secondo e si

misura in Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). Si ha $\omega = 2\pi f$.

Segnali sinusoidali



$$v_1(t) = V \cos \omega t$$

$$v_2(t) = V \cos (\omega t + \varphi)$$

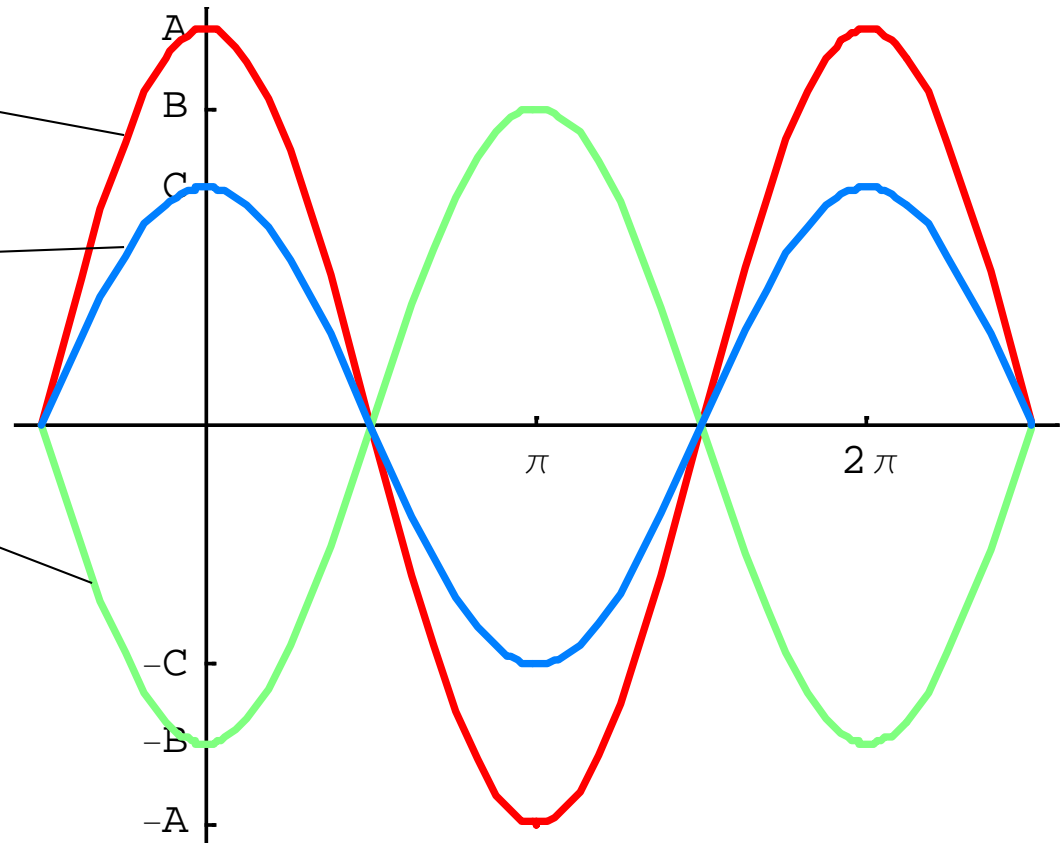
v_2 è in anticipo su v_1

Segnali sinusoidali

$$v_1(t) = A \cos \omega t$$

$$v_2(t) = C \cos \omega t$$

$$v_3(t) = B \cos (\omega t \pm \pi)$$



v_1 e v_2 sono **in fase**, v_1 e v_3 sono **in controfase**

Numeri complessi

Unità immaginaria: $j = \sqrt{-1}$

$z = x + j y$ forma rettangolare o cartesiana

$z = r e^{j\theta}$ forma esponenziale

$z = r \angle \theta$ forma polare

x parte reale di z

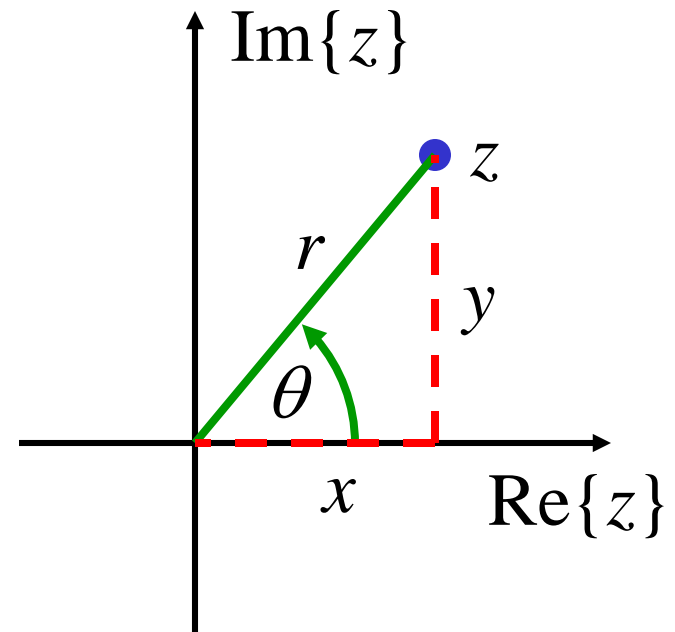
y parte immaginaria di z

r modulo di z

θ argomento di z

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg(y/x)$$



Proprietà dei numeri complessi

Dati $z = x + j y = r e^{j\theta}$, $z_1 = x_1 + j y_1 = r_1 e^{j\theta_1}$, $z_2 = x_2 + j y_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ si ha:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j (y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + j (y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

$$1/z = 1/r \angle -\theta$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \theta / 2$$

$$z^* = x - j y = r \angle -\theta = r e^{-j\theta}$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} = \frac{x}{x^2 + y^2} \neq \frac{1}{x}$$

$$\text{cioè } \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} \neq \frac{1}{\operatorname{Re}\{z\}}$$

Fasori

Poiché $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ (identità di Eulero) si ha:

$$\begin{aligned} v(t) &= V \cos(\omega t + \varphi) = V \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\} \\ &= \operatorname{Re}\{V e^{j\varphi} e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{V} e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

Il numero complesso $\mathbf{V} = V e^{j\varphi}$ è il **fasore** che corrisponde alla funzione $v(t)$ alla pulsazione ω (\mathbf{V} è indipendente da t)

Fasori

Il modulo e l'argomento del fasore rappresentano l'ampiezza e la fase della funzione sinusoidale:

funzione

$$v(t) = V \cos(\omega t + \varphi)$$

fasore

$$\mathbf{V} = V e^{j\varphi}$$

$$|\mathbf{V}| = V$$

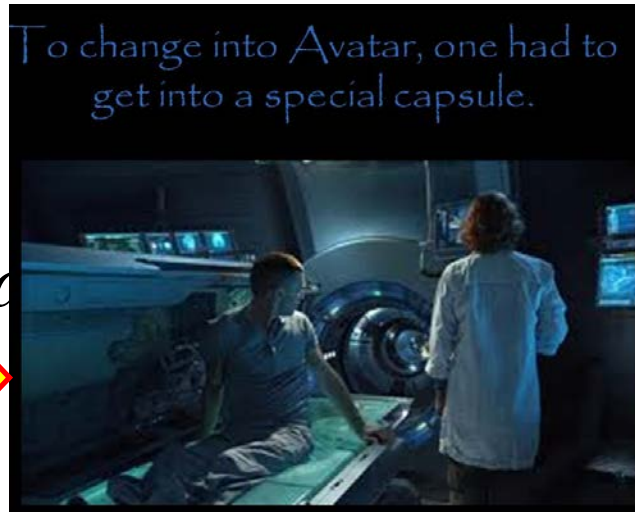
$$\arg\{\mathbf{V}\} = \varphi$$

Fasori



Il momento del fasore rappresenta l'ampiezza e la fase della funzione sinusoidale.

funzione



fasore



$\cos(\omega t)$

$$v = V e^{j\omega t + \phi}$$

$$|V|$$

$$\arg$$



Proprietà dei fasori: linearità

funzione	fasore
$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_1 e^{j\varphi_1}$
$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$	$\mathbf{V}_2 = V_2 e^{j\varphi_2}$
$v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t)$ a_1, a_2 costanti reali	$\mathbf{V} = a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \cdot \mathbf{V}_2$

dimostrazione

$$v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t) = a_1 \cdot V_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cdot V_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= \operatorname{Re}\{a_1 \cdot V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}\} + \operatorname{Re}\{a_2 \cdot V_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}\}$$

$$= \operatorname{Re}\{(a_1 \cdot V_1 e^{j\varphi_1} + a_2 \cdot V_2 e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{(a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \cdot \mathbf{V}_2) e^{j\omega t}\}$$

Proprietà dei fasori: derivazione

funzione	fasore
$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_1 e^{j\varphi_1}$
$v(t) = \frac{dv_1(t)}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega \mathbf{V}_1$

dimostrazione

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \{ V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} \} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dt} (V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}) \right\} = \operatorname{Re} \{ j\omega V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ j\omega \mathbf{V}_1 e^{j\omega t} \} \end{aligned}$$

Proprietà dei fasori: integrazione

funzione	fasore
$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_1 e^{j\varphi_1}$
$v(t) = \int v_1(t) dt$	$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega}$

dimostrazione

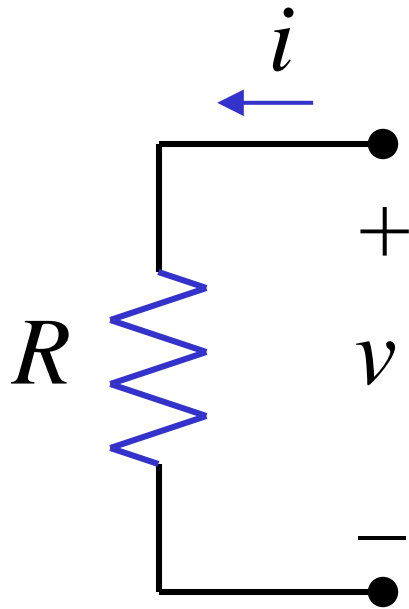
$$\begin{aligned} v(t) &= \int v_1(t) dt = \int V_1 \cos(\omega t + \varphi_1) dt = \int \operatorname{Re}\{V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}\} dt \\ &= \operatorname{Re}\left\{ \int V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} dt \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}}{j\omega} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega} e^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

Quando è possibile usare i fasori?

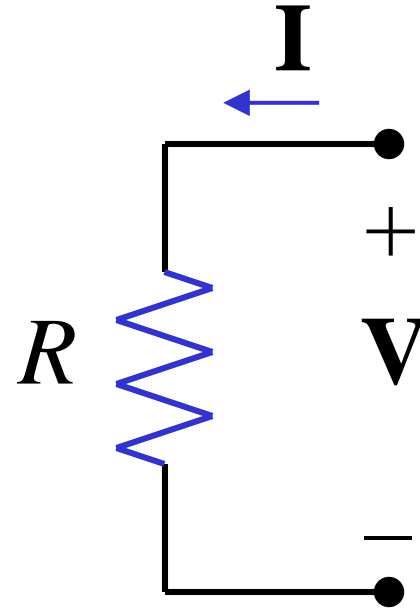
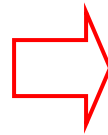
Un circuito può essere analizzato nel **dominio dei fasori** quando tutti i segnali (tensioni e correnti) sono sinusoidi alla stessa pulsazione ω .

Tutti i generatori indipendenti funzionano alla stessa pulsazione ω e il circuito include solo elementi lineari

Relazioni tra fasori di tensione e corrente

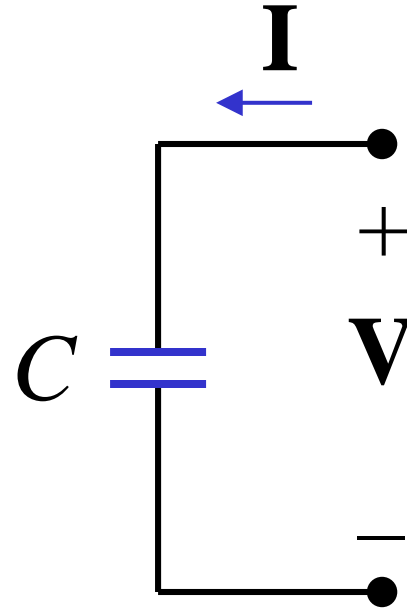
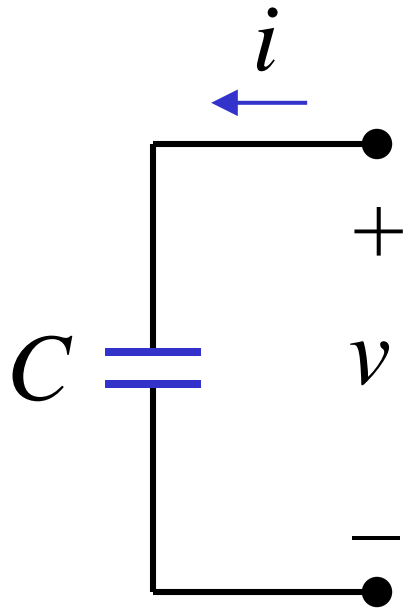


$$v = R \cdot i$$

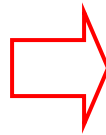


$$\mathbf{V} = R \cdot \mathbf{I}$$

Relazioni tra fasori di tensione e corrente

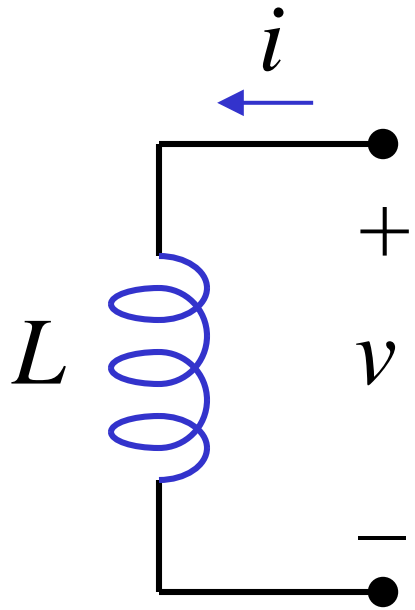


$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

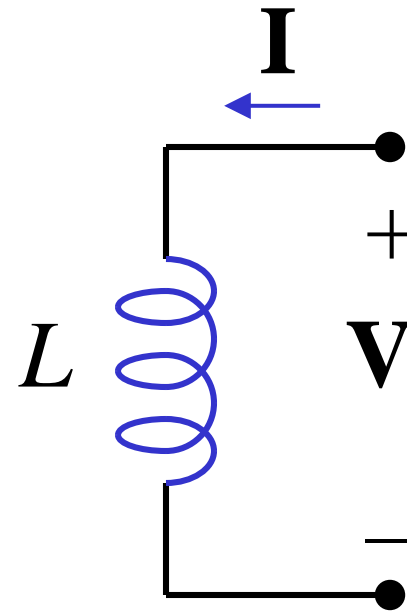
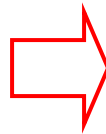


$$\mathbf{I} = j\omega C \cdot \mathbf{V}$$

Relazioni tra fasori di tensione e corrente



$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$



$$\mathbf{V} = j\omega L \cdot \mathbf{I}$$

Impedenza

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + jX = |\mathbf{Z}| \angle \theta_Z$$

$$R = \operatorname{Re}\{\mathbf{Z}\} \quad \text{resistenza}$$

$$X = \operatorname{Im}\{\mathbf{Z}\} \quad \text{reattanza}$$

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta_Z = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}$$

Ammetenza

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = G + jB = |\mathbf{Y}| \angle \theta_Y$$

$$G = \operatorname{Re}\{\mathbf{Y}\} \quad \text{conduttanza}$$

$$B = \operatorname{Im}\{\mathbf{Y}\} \quad \text{suscettanza}$$

$$|\mathbf{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{|\mathbf{Z}|}$$

$$\theta_Y = \operatorname{arctg} \frac{B}{G} = -\theta_Z$$

Relazioni fra impedenza e ammettenza

$$G + jB = \frac{1}{R + jX}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

Impedenza e ammettenza per R , L , C

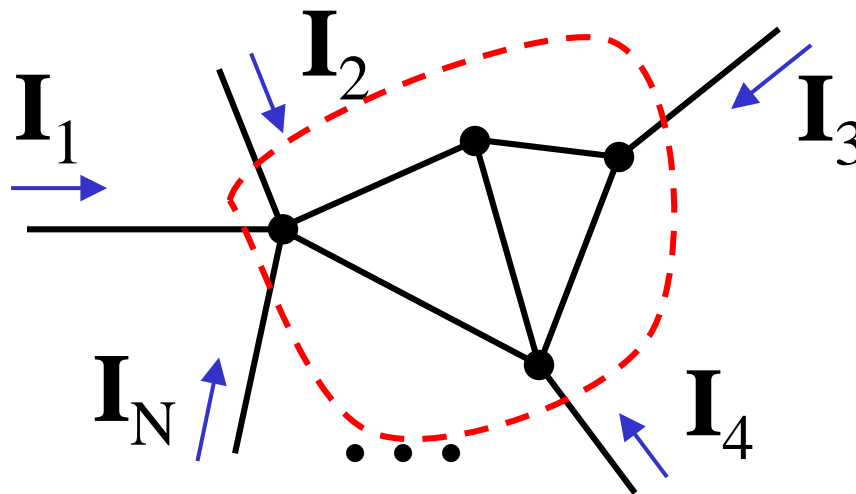
	impedenza	ammettenza
resistenza R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}$
capacità C	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$
induttanza L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega L}$

Legge di Ohm generalizzata

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \mathbf{I}$$

KCL per i fasori

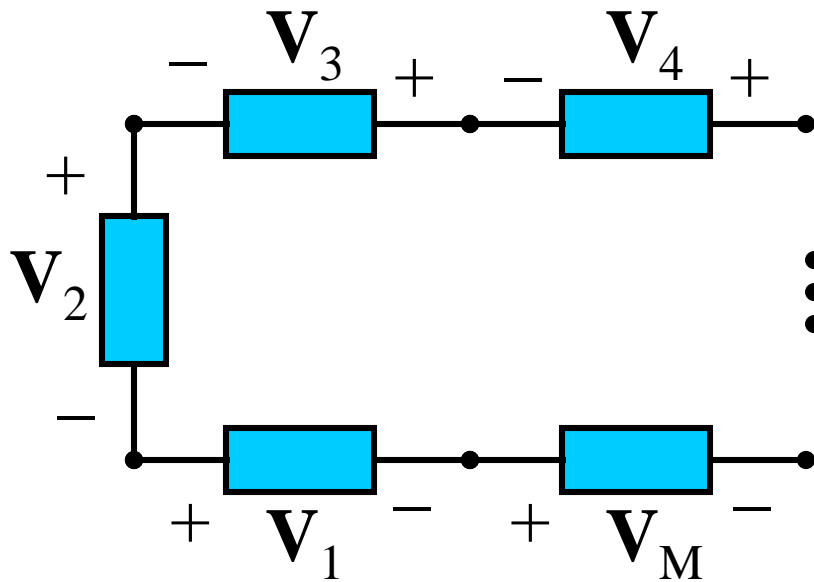
La somma algebrica dei fasori delle correnti che entrano in una superficie chiusa è zero



$$\sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n = 0$$

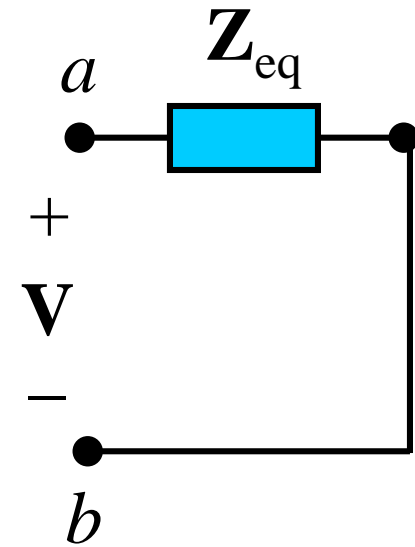
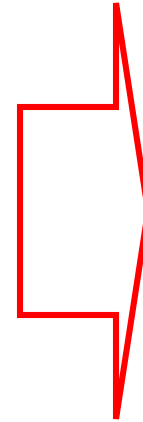
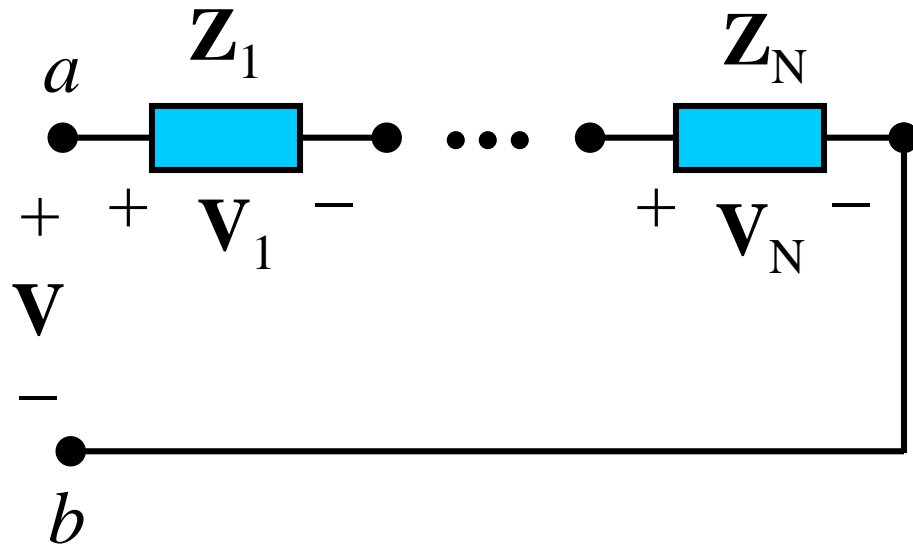
KVL per i fasori

La somma algebrica dei fasori delle tensioni lungo una maglia è zero



$$\sum_{m=1}^M \mathbf{V}_m = 0$$

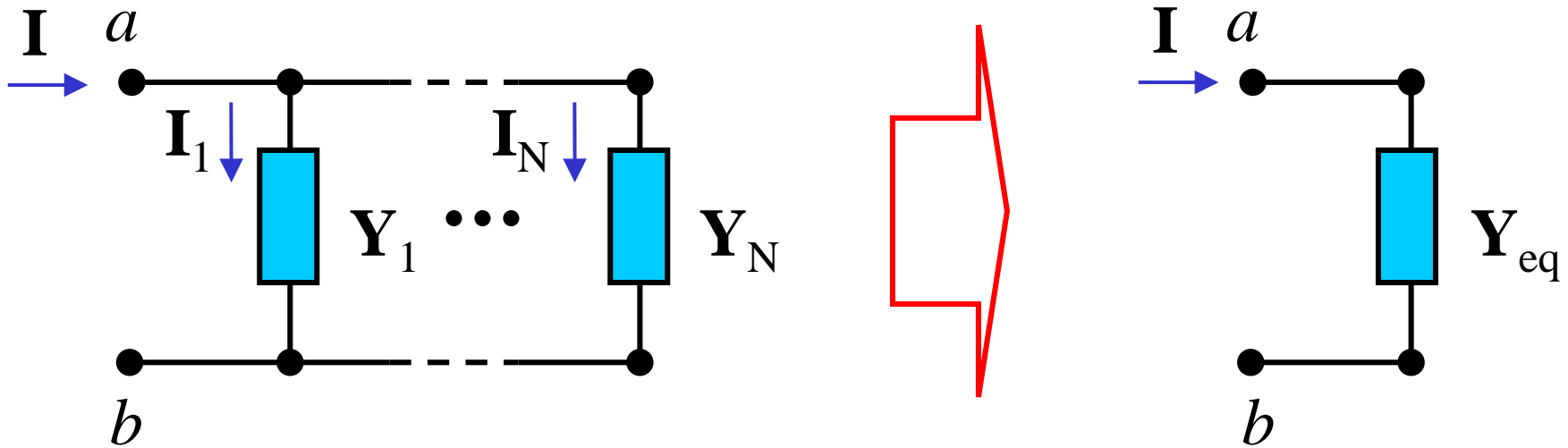
Impedenze in serie



$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{Z}_n$$

$$\mathbf{V}_n = \frac{\mathbf{Z}_n}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_N} \mathbf{V}$$

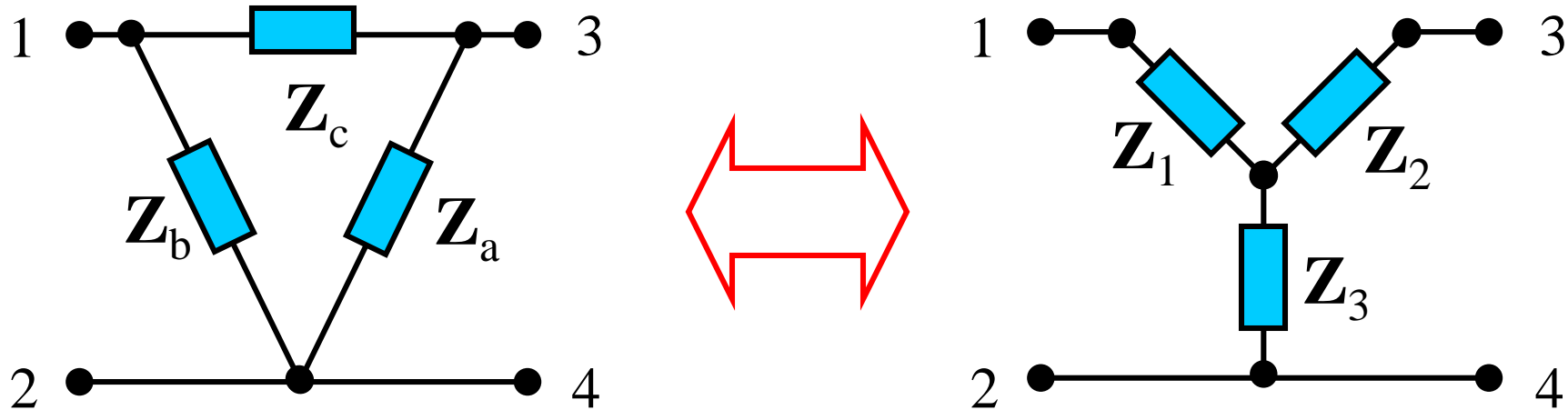
AmmetENZE in parallelo



$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{Y}_n$$

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{Y}_n}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_N} \mathbf{I}$$

Trasformazioni impedenze stella/triangolo



triangolo \Rightarrow stella

$$Z_1 = \frac{Z_b \cdot Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_2 = \frac{Z_c \cdot Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a \cdot Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

stella \Rightarrow triangolo

$$Z_a = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_1}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_2}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_3}$$