Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

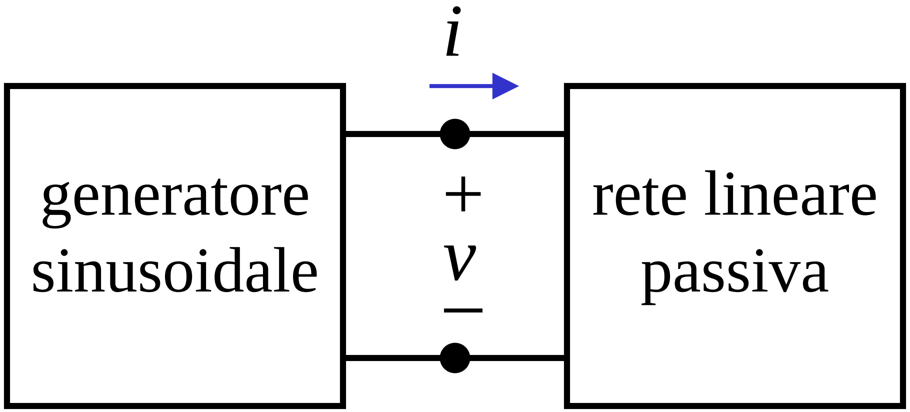
Circuiti Elettrici Lineari

Potenza in regime sinusoidale

Sommario

- Potenza istantanea in regime sinusoidale
- Potenza media
- Massimo trasferimento di potenza
- Valori efficaci
- Relazione tra potenza media e valori efficaci
- Potenza apparente e fattore di potenza
- Potenza complessa
- Conservazione della potenza complessa
- Rifasamento

Potenza istantanea in regime sinusoidale



$$v(t) = V\cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I\cos(\omega t + \theta_i)$$

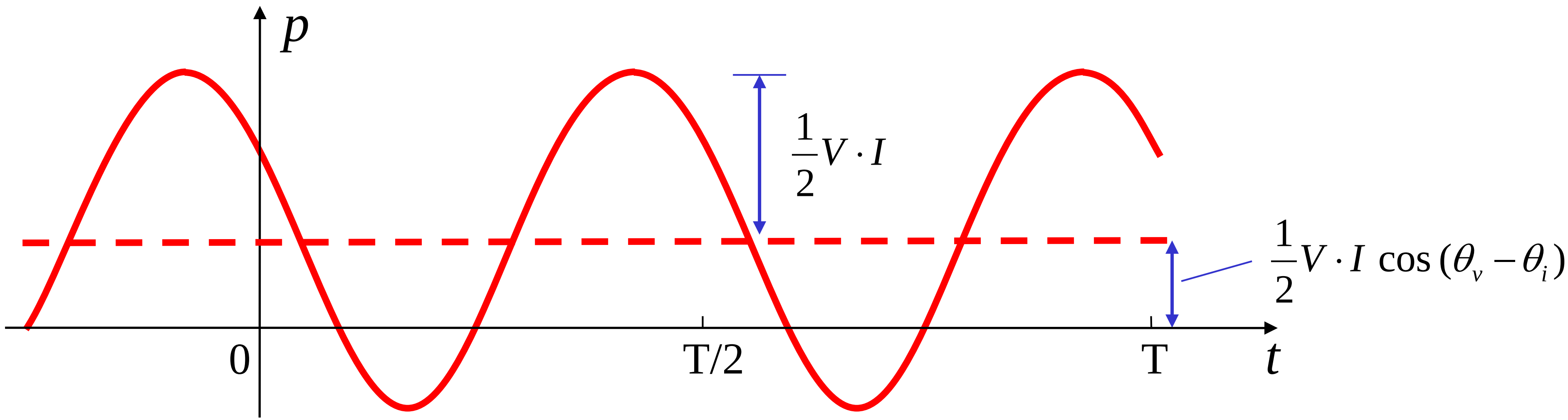
La potenza istantanea è:

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = V\cdot I\cos(\omega t + \theta_v)\cos(\omega t + \theta_i)$$

$$= \frac{1}{2}V\cdot I\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2}V\cdot I\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

Potenza istantanea in regime sinusoidale

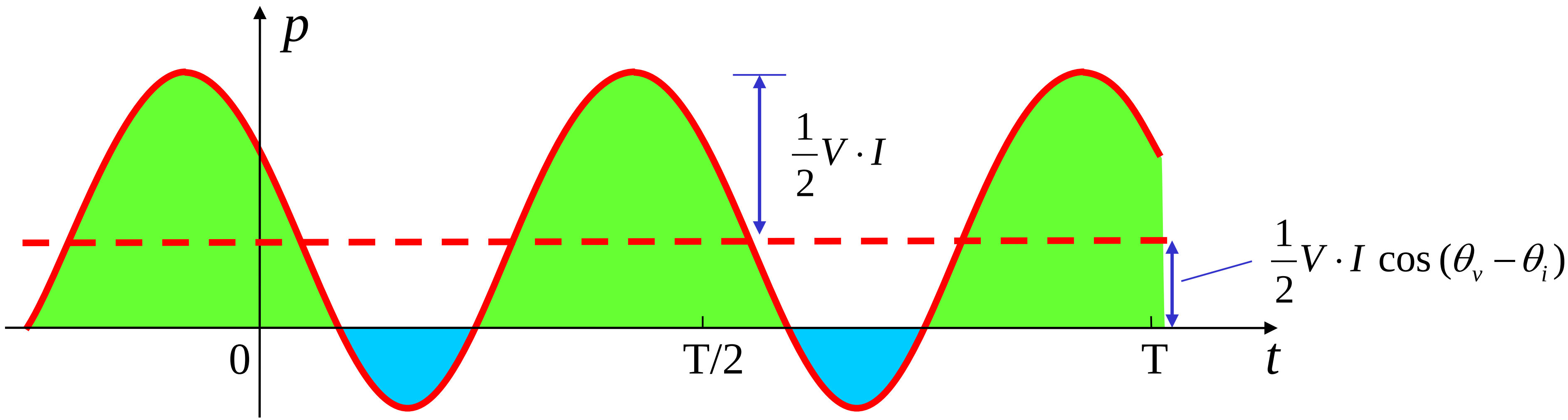
$$p(t) = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$



La potenza istantanea è periodica con periodo $T/2$

Potenza istantanea in regime sinusoidale

$$p(t) = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$



$p > 0$ potenza assorbita

$p < 0$ potenza erogata

Potenza media

Ogni qualvolta si osserva un fenomeno periodico per un tempo di gran lunga superiore al periodo (ad esempio l'assorbimento della luce da parte dell'occhio umano, l'energia assorbita da un utente, il riscaldamento a microonde, ecc.) non è rilevante il valore che la potenza assume istante per istante, ma piuttosto il valore medio della potenza nel tempo:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

Potenza media

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{ \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \right\} dt$$

poiché

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)\, dt = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} V \cdot I \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\, dt = 0$$

si ha

$$\boxed{P = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

Potenza media

Considerando i fasori di tensione ($\mathbf{V} = V\angle\theta_v$) e corrente ($\mathbf{I} = I\angle\theta_i$) si ha:

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}V\cdot I\ \angle(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{1}{2}V\cdot I\ \left(\cos(\theta_v - \theta_i) + j\sin(\theta_v - \theta_i)\right)$$

da cui

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^*\right\} = \frac{1}{2}V\cdot I\ \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

Potenza media

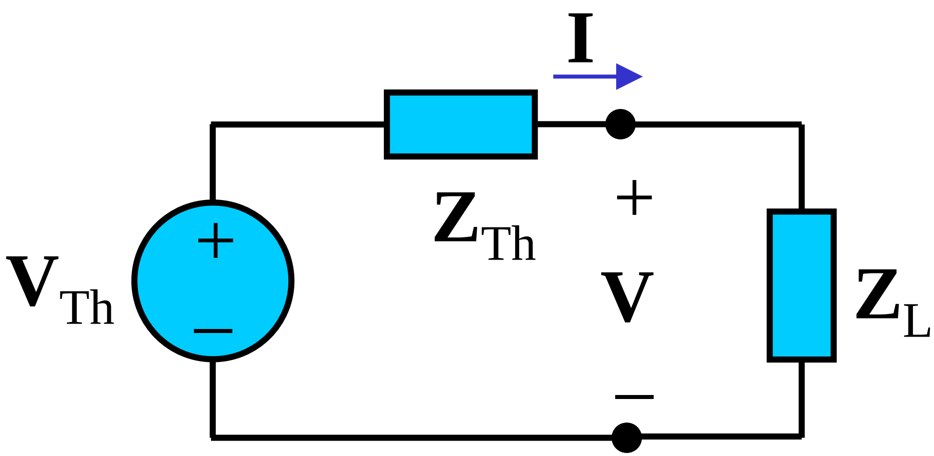
Se $\theta_v = \theta_i$ (tensione e corrente in fase $\rightarrow$ carico resistivo) si ha:

$$P = \frac{1}{2} V \cdot I \, \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} V \cdot I = \frac{1}{2} R \cdot I^2 = \frac{1}{2} R \cdot |\mathbf{I}|^2$$

Se $\theta_v - \theta_i = \pm 90$ (tensione e corrente in quadratura $\rightarrow$ carico reattivo) si ha:

$$P = \frac{1}{2} V \cdot I \, \cos(\theta_v - \theta_i) = 0$$

Potenza media assorbita da un carico



$$\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}} = R_{\mathrm{Th}} + j\,X_{\mathrm{Th}}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{L}} + j\,X_{\mathrm{L}}$$

La potenza media assorbita dal carico $\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}$ è:

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^{*}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{I}^{*}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}\right\}|\,\mathbf{I}\,|^{2} = \frac{R_{\mathrm{L}}}{2}|\,\mathbf{I}\,|^{2}$$

$$= \frac{R_{\mathrm{L}}}{2}\left|\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}}{\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}}+\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}}\right|^{2} = \frac{|\,\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}\,|^{2}\,R_{\mathrm{L}}\,/\,2}{(R_{\mathrm{Th}}+R_{\mathrm{L}})^{2}+(X_{\mathrm{Th}}+X_{\mathrm{L}})^{2}}$$

Massimo trasferimento di potenza media

Per quale valore di $\mathbf{Z}_{\mathrm{L}}$ si ha il massimo trasferimento di potenza media?

$$P = \frac{|\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}|^2 R_{\mathrm{L}} / 2}{(R_{\mathrm{Th}} + R_{\mathrm{L}})^2 + (X_{\mathrm{Th}} + X_{\mathrm{L}})^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_{\mathrm{L}}} = -\frac{|\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}|^2 R_{\mathrm{L}} (X_{\mathrm{Th}} + X_{\mathrm{L}})}{\left[(R_{\mathrm{Th}} + R_{\mathrm{L}})^2 + (X_{\mathrm{Th}} + X_{\mathrm{L}})^2\right]^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_{\mathrm{L}}} = \frac{|\mathbf{V}_{\mathrm{Th}}|^2 \left[(R_{\mathrm{Th}} + R_{\mathrm{L}})^2 + (X_{\mathrm{Th}} + X_{\mathrm{L}}) - 2R_{\mathrm{L}}(R_{\mathrm{Th}} + R_{\mathrm{L}})\right]}{2\left[(R_{\mathrm{Th}} + R_{\mathrm{L}})^2 + (X_{\mathrm{Th}} + X_{\mathrm{L}})^2\right]^2} = 0$$

$$\boxed{R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{Th}} \qquad X_{\mathrm{L}} = -X_{\mathrm{Th}}}$$

Massimo trasferimento di potenza media

In regime sinusoidale, il massimo trasferimento di potenza media si ha quando

$$R_\mathrm{L} = R_\mathrm{Th},\ X_\mathrm{L} = -X_\mathrm{Th} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_\mathrm{L} = \mathbf{Z}^*_\mathrm{Th}$$

e la potenza media fornita al carico è

$$P_\mathrm{max} = \frac{|\mathbf{V}_\mathrm{Th}|^2}{8R_\mathrm{Th}}$$

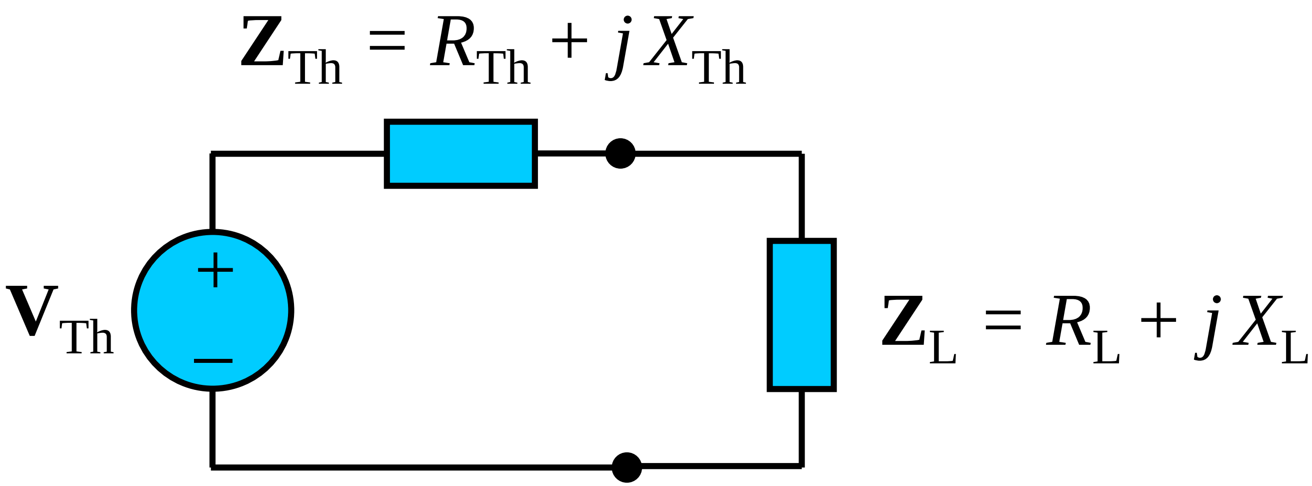
Quando $\mathbf{Z}_\mathrm{L} = \mathbf{Z}^*_\mathrm{Th}$ si dice che il carico è adattato al generatore

Massimo trasferimento di potenza media

La potenza fornita al carico adattato ($\mathbf{Z}_\mathrm{L} = \mathbf{Z}^*_\mathrm{Th}$) prende anche il nome di potenza disponibile

$$P_\mathrm{d} = P_\mathrm{max} = \frac{|\,\mathbf{V}_\mathrm{Th}\,|^2}{8R_\mathrm{Th}}$$

Potenza media erogata ad un carico $\mathbf{Z}_\mathrm{L}$

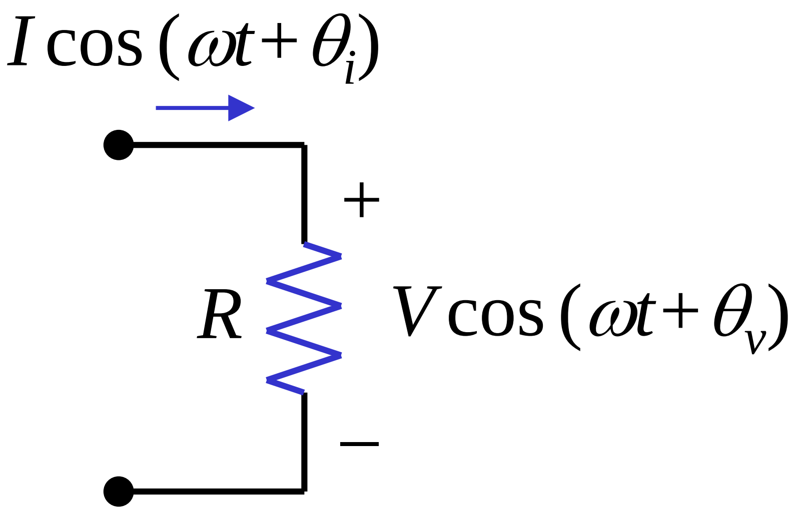


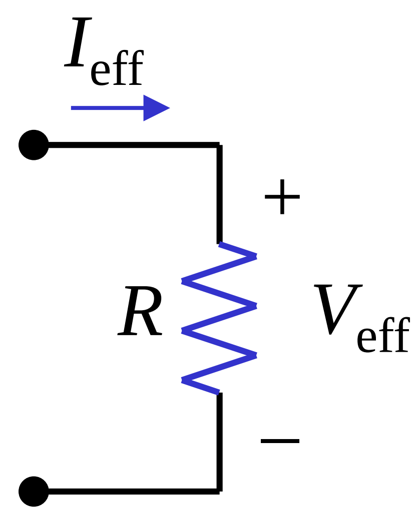
Tenendo conto dell'espressione della potenza disponibile, si ottiene:

$$P = \frac{4R_\mathrm{Th}R_\mathrm{L}}{\left|\mathbf{Z}_\mathrm{Th} + \mathbf{Z}_\mathrm{L}\right|^2} P_\mathrm{d} = \frac{4G_\mathrm{Th}G_\mathrm{L}}{\left|\mathbf{Y}_\mathrm{Th} + \mathbf{Y}_\mathrm{L}\right|^2} P_\mathrm{d}$$

Valori efficaci

Il valore efficace di una corrente (tensione) periodica è la corrente (tensione) costante in grado di fornire ad un resistore la stessa potenza della corrente (tensione) periodica





Valore efficace della corrente

Si ha: $$P = \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot i^2(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot I^2 \cos^2(\omega t + \theta_i)\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot I^2 \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)}{2}\, dt = \frac{1}{2} R \cdot I^2$$

ma anche: $$P = R \cdot I_{\mathrm{eff}}^2$$

e quindi:

$$\boxed{I_{\mathrm{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}}$$

Valore efficace della tensione

Si ha:
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2}{R}\cos^2(\omega t + \theta_v)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2}{R}\frac{1+\cos(2\omega t + 2\theta_v)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{V^2}{R}$$

ma anche:
$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R}$$

e quindi:
$$\boxed{V_{\text{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}}}$$

Potenza media e valori efficaci

$$P = \frac{1}{2} V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Potenza apparente e fattore di potenza

$$P = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$S = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ è detta **potenza apparente** e si misura in VA (voltampere)

$\text{pf} = P/S = \cos(\theta_v - \theta_i)$ è il **fattore di potenza**

Fasori efficaci

Definendo i fasori efficaci:

$$\mathbf{V}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}} = V_{\text{eff}} \angle \theta_v \qquad \mathbf{I}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} = I_{\text{eff}} \angle \theta_i$$

si ha:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}}{\mathbf{I}_{\text{eff}}} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \angle (\theta_v - \theta_i)$$

Fattore di potenza

Il fattore di potenza è il coseno dello sfasamento tra la tensione e la corrente e coincide con il coseno dell'argomento dell'impedenza:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V\angle\theta_v}{I\angle\theta_i} = \frac{V}{I}\angle(\theta_v - \theta_i)$$

- carico resistivo $\Rightarrow$ $\theta_v - \theta_i = 0 \Rightarrow \mathrm{pf} = 1$
  La potenza media coincide con la potenza apparente
- carico reattivo $\Rightarrow$ $\theta_v - \theta_i = \pm 90° \Rightarrow \mathrm{pf} = 0$
  La potenza media è nulla

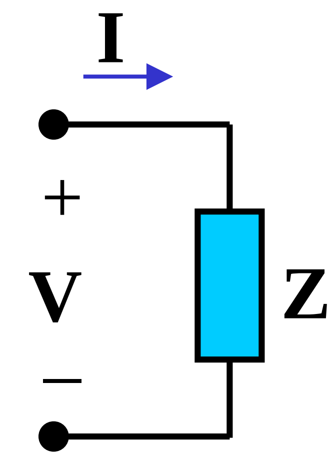
Potenza complessa

La potenza complessa è:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}V\cdot I\,\left(\cos(\theta_v-\theta_i)+j\sin(\theta_v-\theta_i)\right)$$

$$= \mathbf{V}_{\text{eff}}\cdot\mathbf{I}^*_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\left(\cos(\theta_v-\theta_i)+j\sin(\theta_v-\theta_i)\right)$$

Poiché $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{I}$ e $\mathbf{V}_{\text{eff}} = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{I}_{\text{eff}}$ si ha:



$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{Z}\cdot|\mathbf{I}|^2 = \mathbf{Z}\cdot|\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}|^2}{\mathbf{Z}^*} = \frac{|\mathbf{V}_{\text{eff}}|^2}{\mathbf{Z}^*}$$

Potenza complessa

Poiché $\mathbf{Z} = R + jX$ si ha:

$$\mathbf{S} = (R + jX) \cdot |\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 = P + jQ$$

Vale anche:

$$\mathbf{S} = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \left(\cos(\theta_v - \theta_i) + j \sin(\theta_v - \theta_i) \right)$$

e quindi:

$P = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$ potenza reale o attiva

$Q = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i)$ potenza reattiva

Potenza complessa

$P = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$ è la potenza media fornita al carico. Questa è l'unica potenza utile ed è anche la potenza che il carico realmente dissipa. Si misura in *watt* (W).

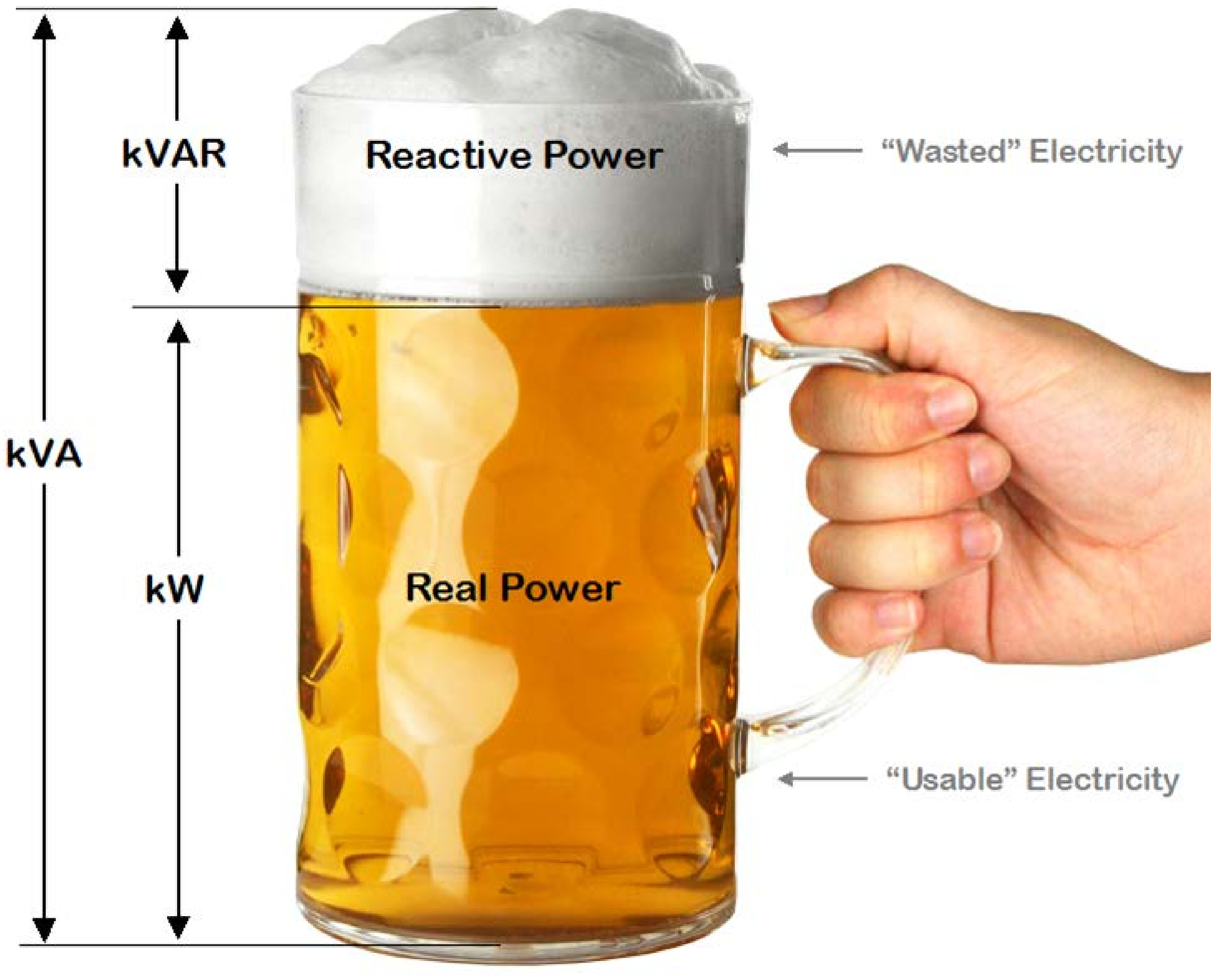
$Q = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i)$ misura lo scambio di energia fra il generatore e la parte reattiva del carico. Si misura in *volt-ampere reattivi* (VAR).

$Q = 0$ per carichi resistivi
$Q < 0$ per carichi capacitivi ($\theta_v < \theta_i$)
$Q > 0$ per carichi induttivi ($\theta_v > \theta_i$)

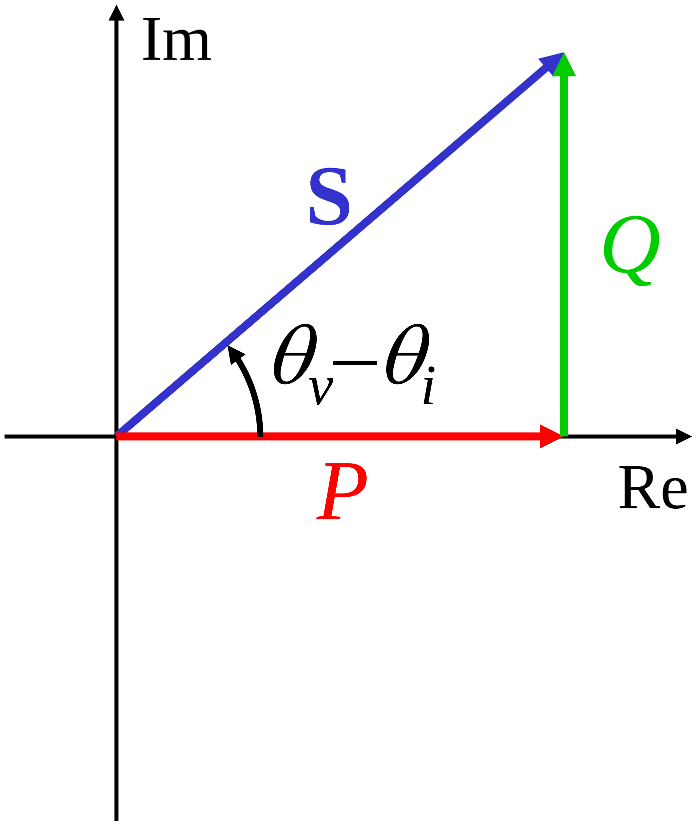
Potenza complessa: riassunto

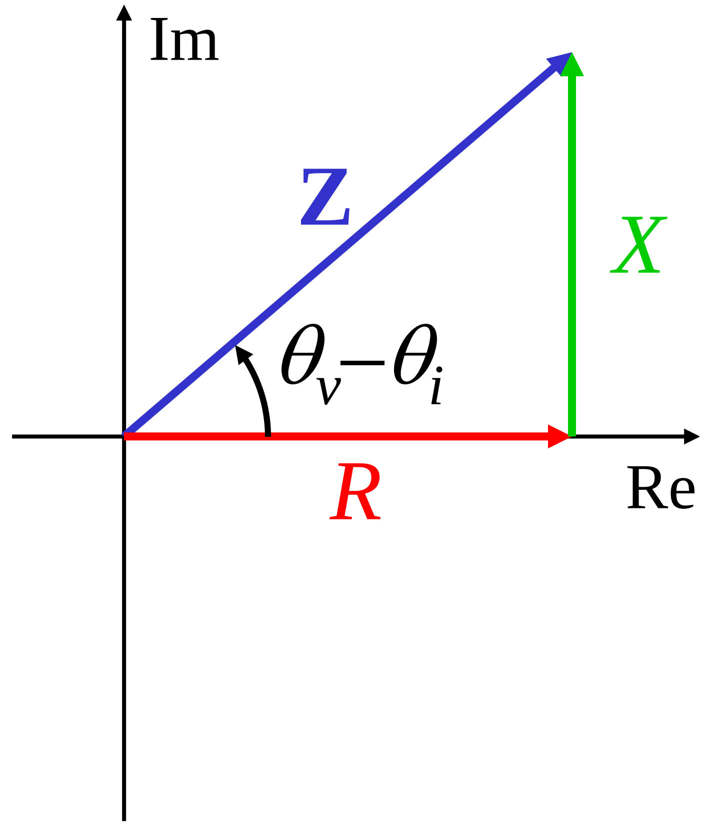
$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{I}^* = P + jQ = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \angle(\theta_v - \theta_i)$	potenza complessa
$S = \lvert \mathbf{S} \rvert = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2}$	potenza apparente
$P = \text{Re}\{\mathbf{S}\} = S \cos(\theta_v - \theta_i)$	potenza reale o attiva
$Q = \text{Im}\{\mathbf{S}\} = S \sin(\theta_v - \theta_i)$	potenza reattiva
$\frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)$	fattore di potenza

Potenza complessa: riassunto

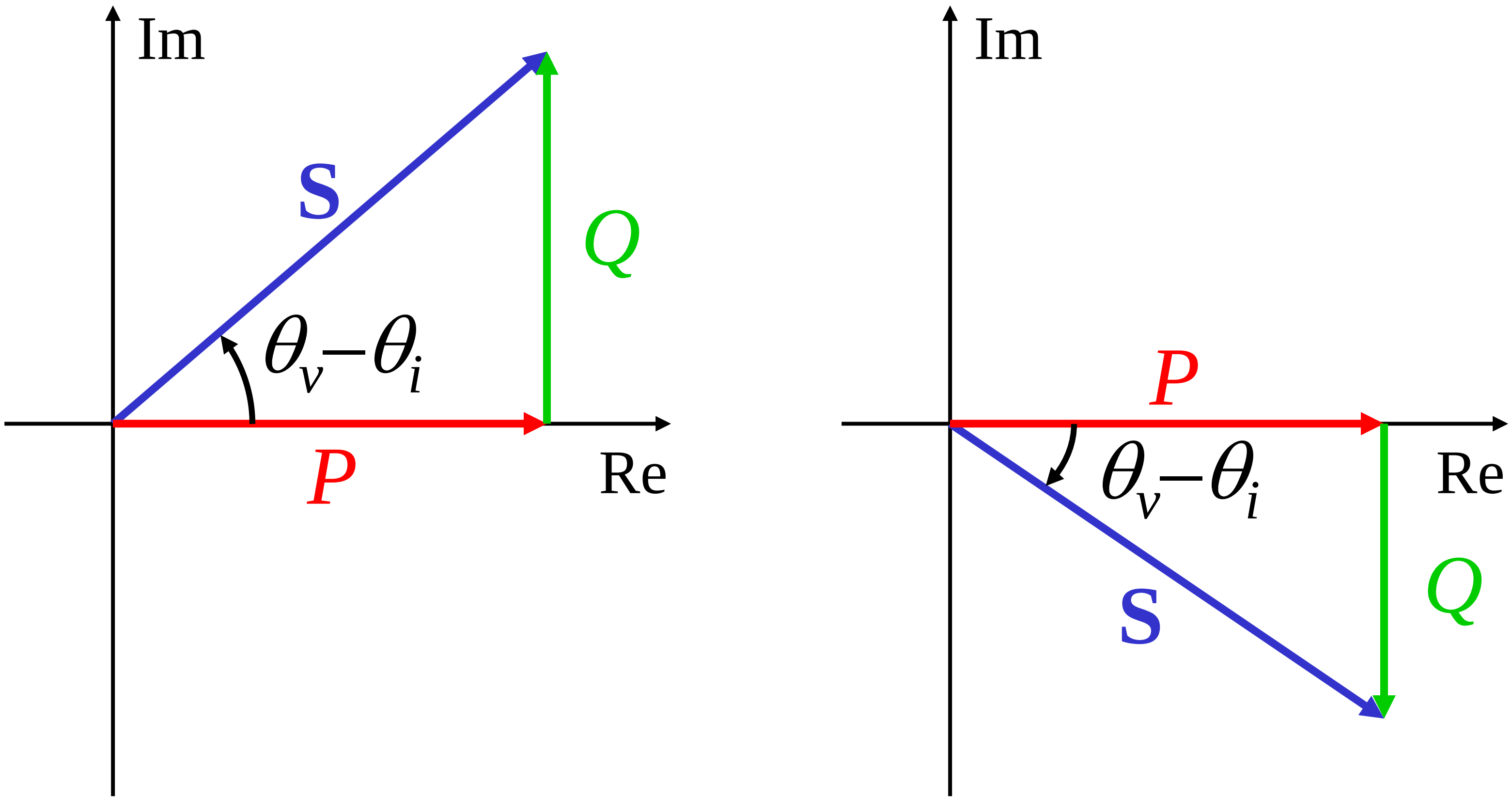


Triangolo delle potenze





Triangolo delle potenze



Carico induttivo $Q > 0$ Carico capacitivo $Q < 0$

Conservazione della potenza complessa

In un circuito, la potenza complessa, la potenza reale e la potenza reattiva si conservano

Se il circuito include N elementi, con la convenzione degli utilizzatori si ha:

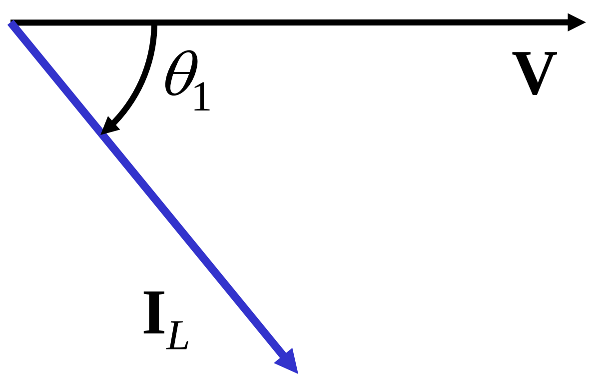
$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{S}_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{N} P_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{N} Q_n = 0$$

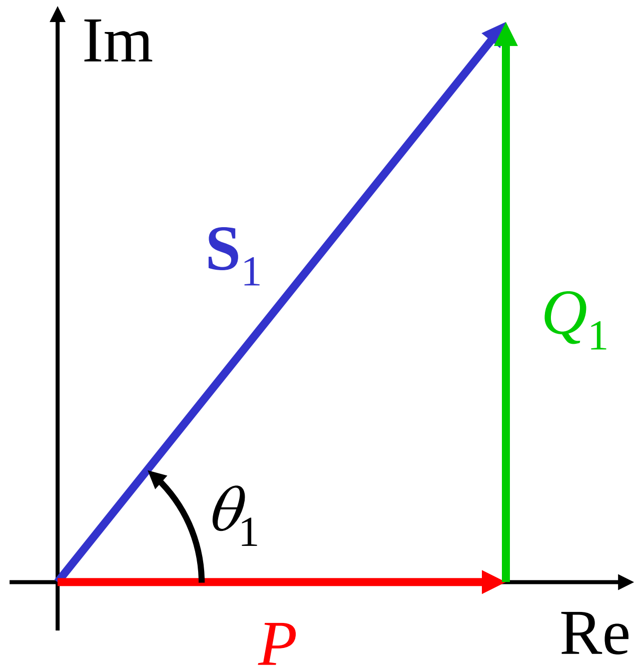
In generale, la legge di conservazione non vale per le potenze apparenti:

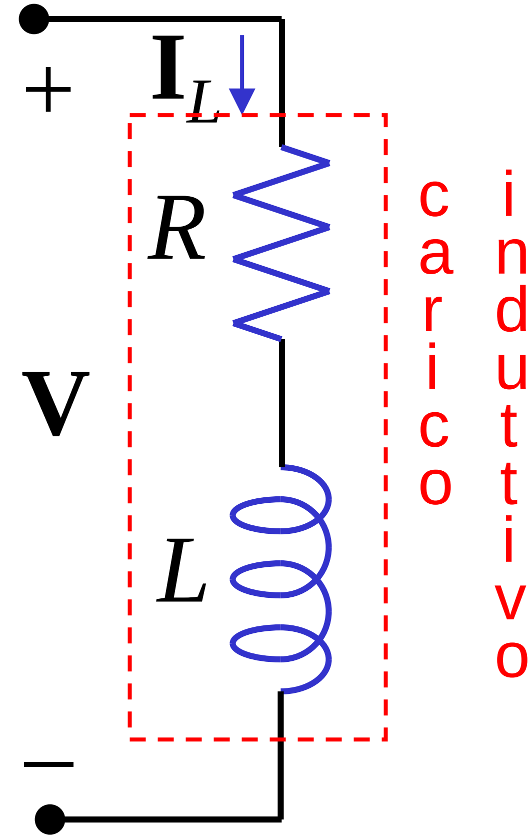
$$\sum_{n=1}^{N} S_n = \sum_{n=1}^{N} |\mathbf{S}_n| \neq 0$$

Rifasamento

Molti carichi domestici e industriali sono di tipo induttivo. Essi hanno quindi un fattore di potenza $\mathrm{pf} > 0$.

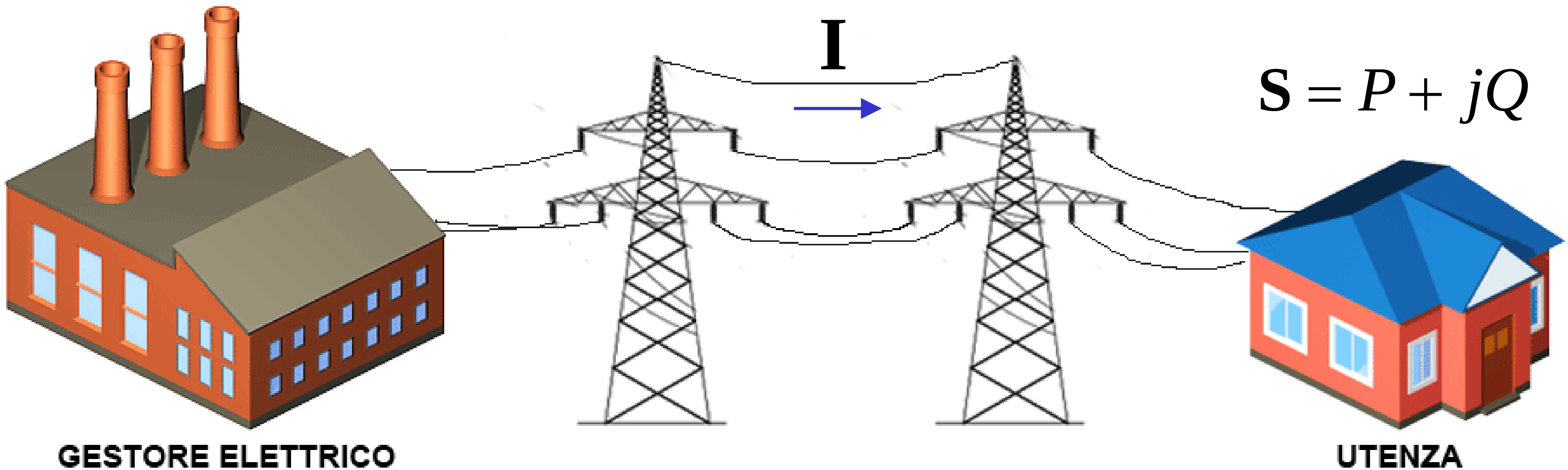






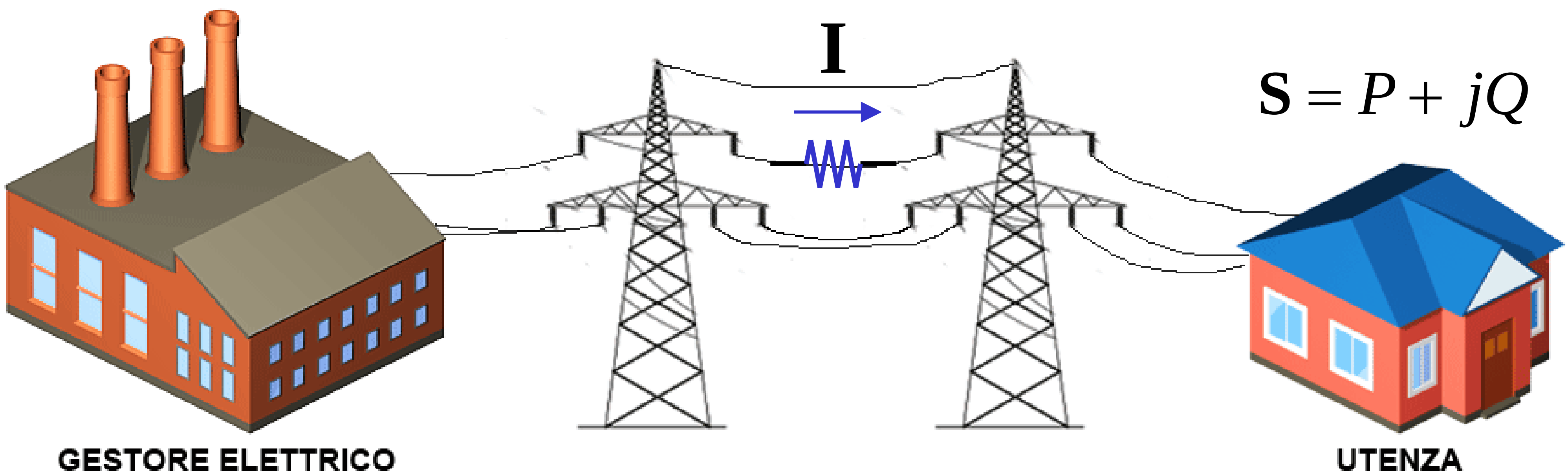
Rifasamento

Trasferire la potenza $P+jQ$ implica una corrente $\mathbf{I}$ lungo i fili di collegamento più intensa che non nel caso della sola potenza P.



Rifasamento

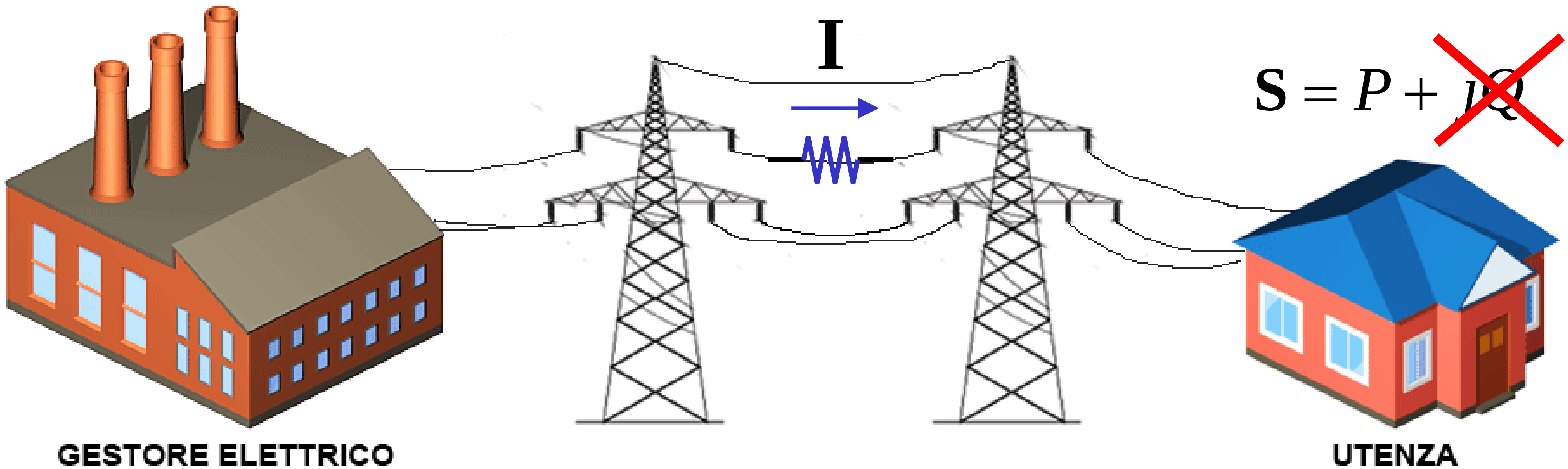
Maggiore è $|\mathbf{I}|$ e maggiore è la potenza persa a causa della resistenza dei fili: $P_{dissipata}=R_{filo}\,|\mathbf{I}|^2/2$



Rifasamento

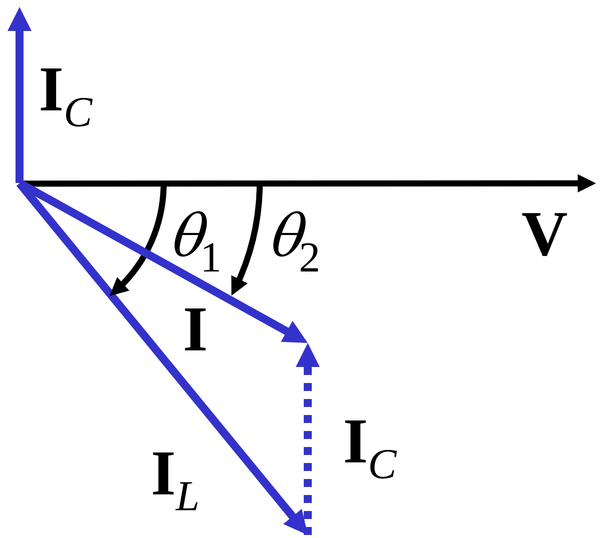
Maggiore è $|\mathbf{I}|$ e maggiore è la potenza persa a causa della resistenza dei fili: $P_{dissipata} = R_{filo}\,|\mathbf{I}|^2/2$

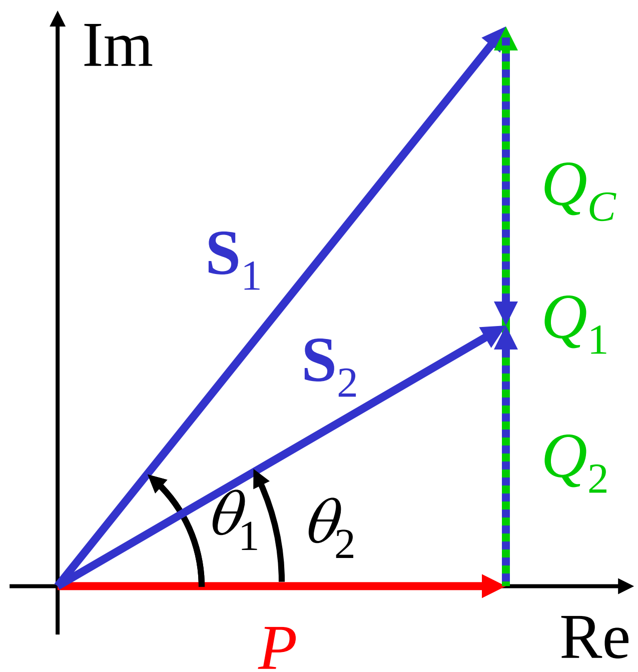
Situazione ottima: $Q=0 \;\Rightarrow\; pf=1$

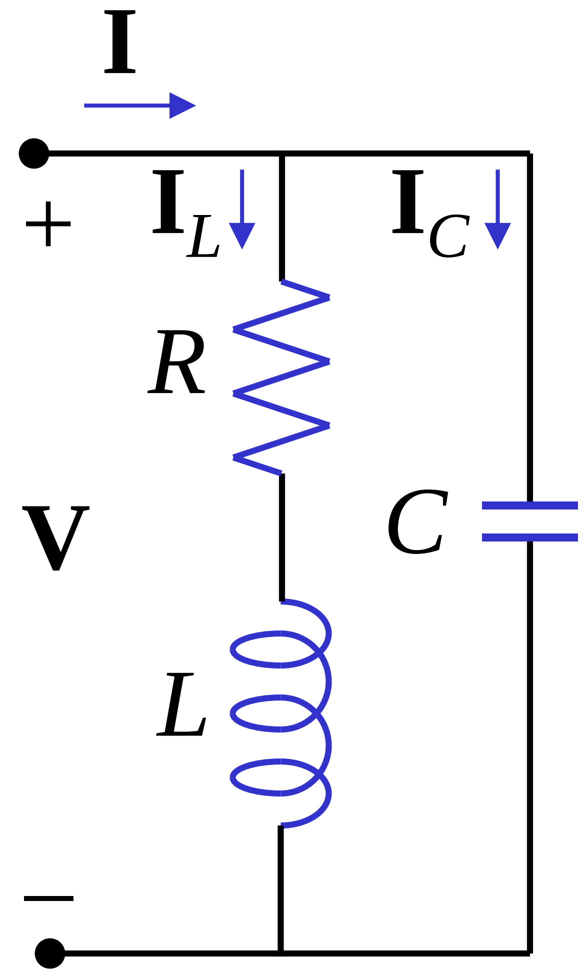


Rifasamento

Il fattore di potenza può essere massimizzato introducendo una capacità in parallelo al carico.







Rifasamento

Per il carico induttivo originale si ha:

$$P = S_1 \cos\theta_1 \qquad\qquad Q_1 = S_1 \sin\theta_1 = P\,\mathrm{tg}\,\theta_1$$

Per aumentare il fattore di potenza da $\cos\theta_1$ a $\cos\theta_2$ senza alterare la potenza reale ($P = S_2 \cos\theta_2$) si deve avere

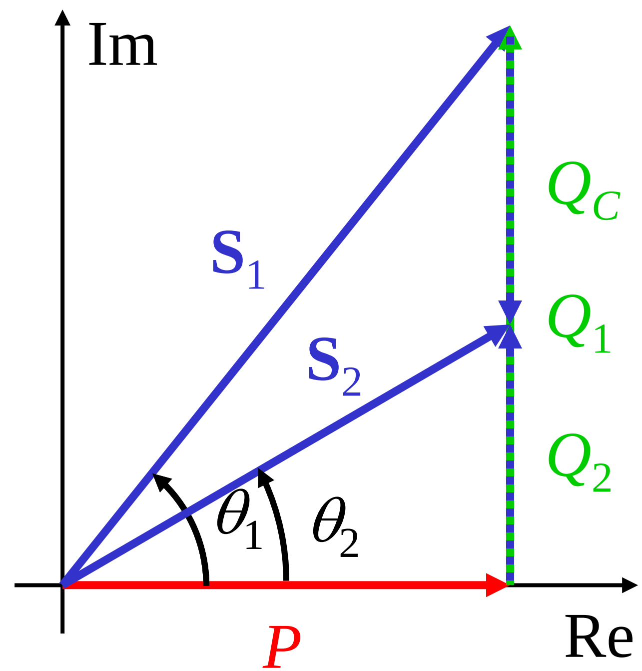
$$Q_2 = S_2 \sin\theta_2 = P\,\mathrm{tg}\,\theta_2$$

da cui

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P\,(\mathrm{tg}\,\theta_1 - \mathrm{tg}\,\theta_2)$$

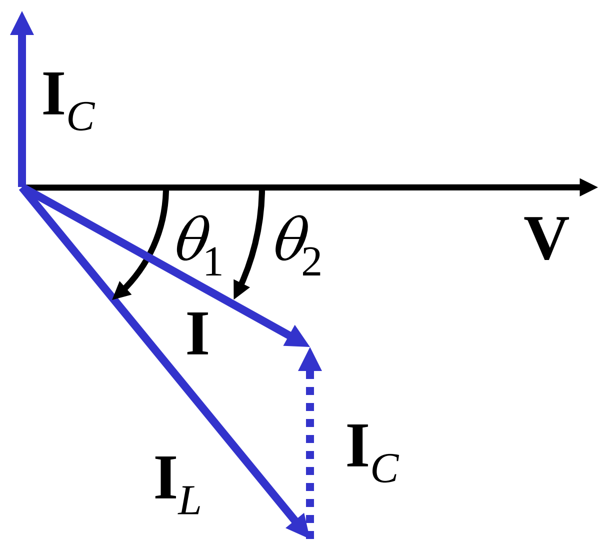
Ricordando che $Q_C = V^2_{\mathrm{eff}}/X_C = \omega C V^2_{\mathrm{eff}}$ si ottiene

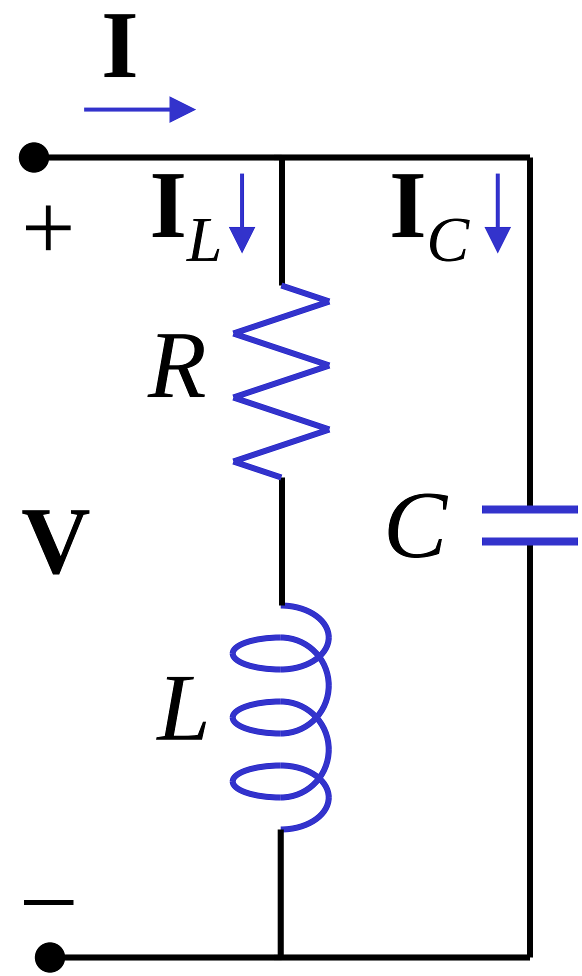
$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{\mathrm{eff}}^2} = \frac{P(\mathrm{tg}\,\theta_1 - \mathrm{tg}\,\theta_2)}{\omega V_{\mathrm{eff}}^2}$$



Rifasamento

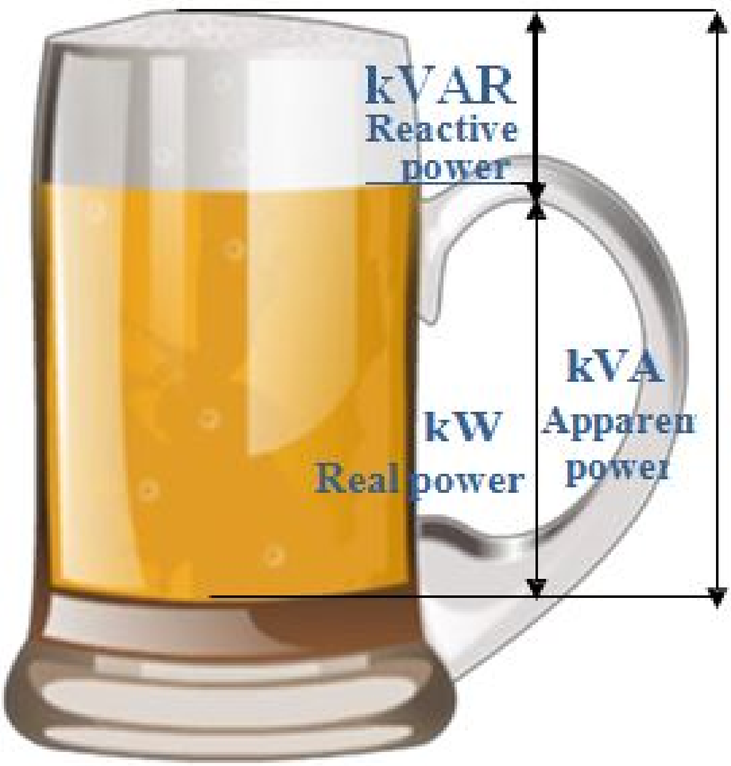
Il rifasamento riduce l'ampiezza della corrente in ingresso al carico ($|\mathbf{I}| < |\mathbf{I}_L|$) a parità di potenza reale assorbita.





Rifasamento

Rifasamento



Beer *= Active Power or Real Power (kW)*

Foam *= Reactive Power (Loss) (kVAR)*

Glass Capacity *= Apparent Power (Total) (kVA)*

$$\textit{Power Factor} = \frac{\text{Beer (KW)}}{\text{Mug Capacity (kVA)}}$$

Capacitors *help decrease the Foam (kVAR), freeing up Beer Glass Capacity so you don't need to buy a larger mug and/or so you can pay less for your beer.*