



Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

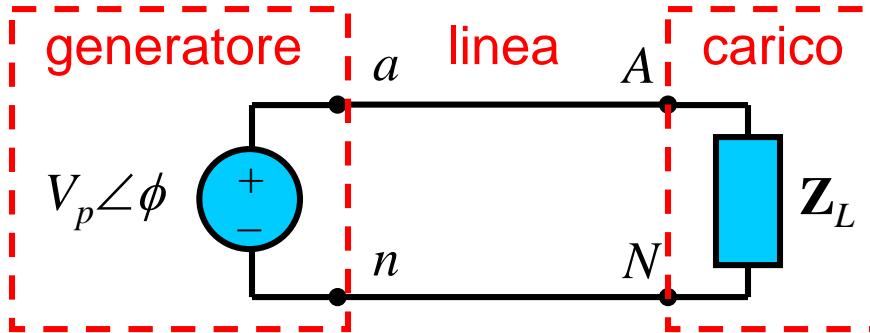
Circuiti Elettrici Lineari

Circuiti trifase

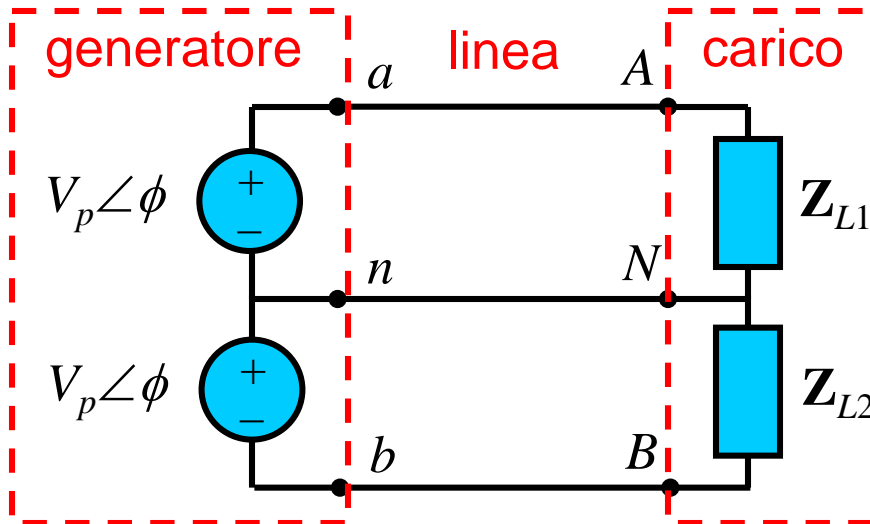
Sommario

- Sistemi monofase, polifase, trifase
- Generatore trifase, configurazione stella e triangolo
- Tensioni di fase e tensioni di linea
- Carico trifase, configurazione stella e triangolo
- Collegamento generatore carico: caso Y-Y
- Potenza in un sistema trifase bilanciato
- Configurazione Y-Y sbilanciata
- Vantaggi nella distribuzione dell'energia

Sistemi monofase

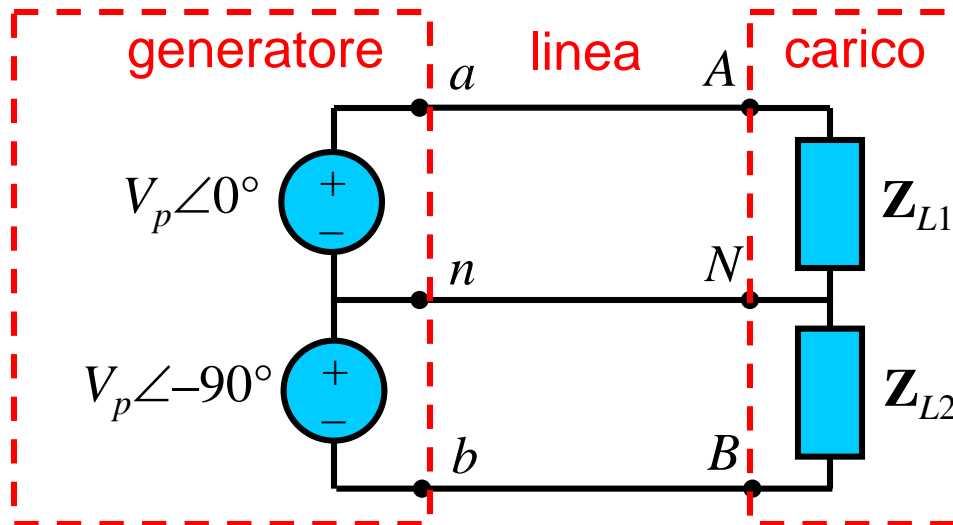


Sistema monofase a due fili



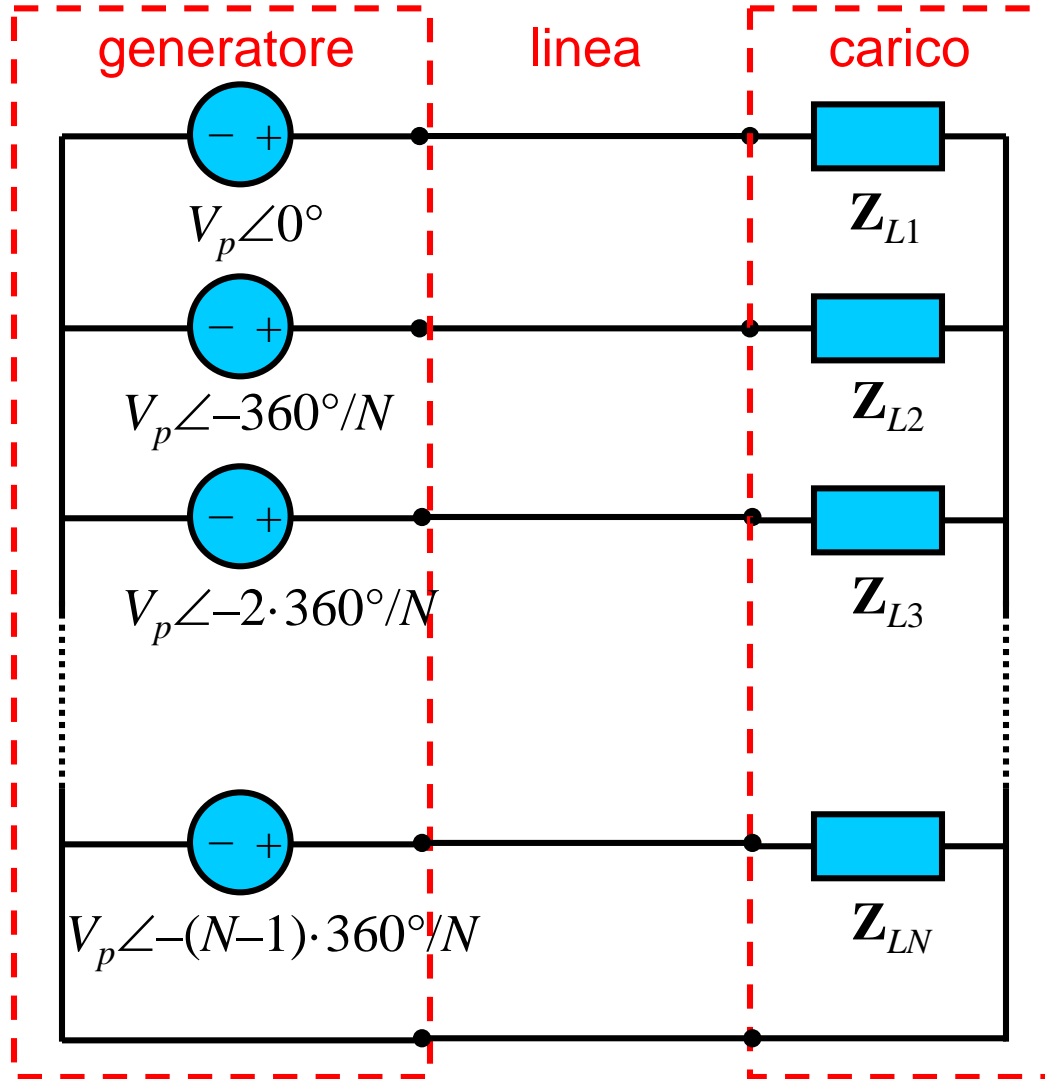
Sistema monofase a tre fili

Sistemi polifase



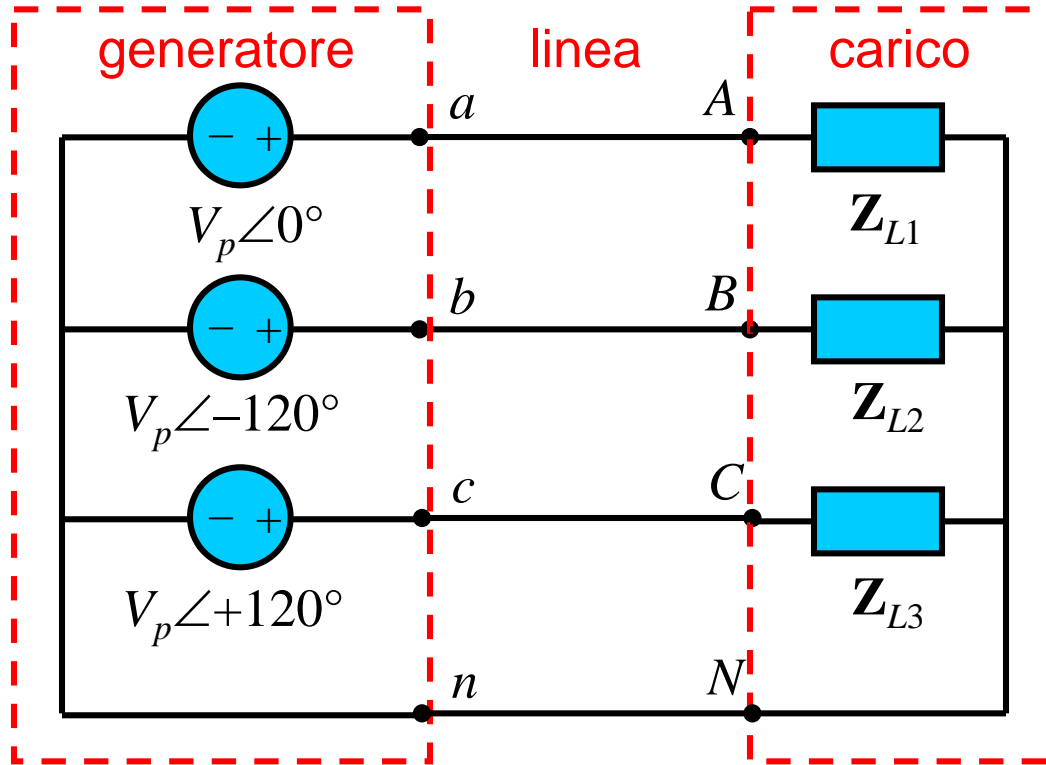
Sistema
bifase a
tre fili

Sistemi polifase

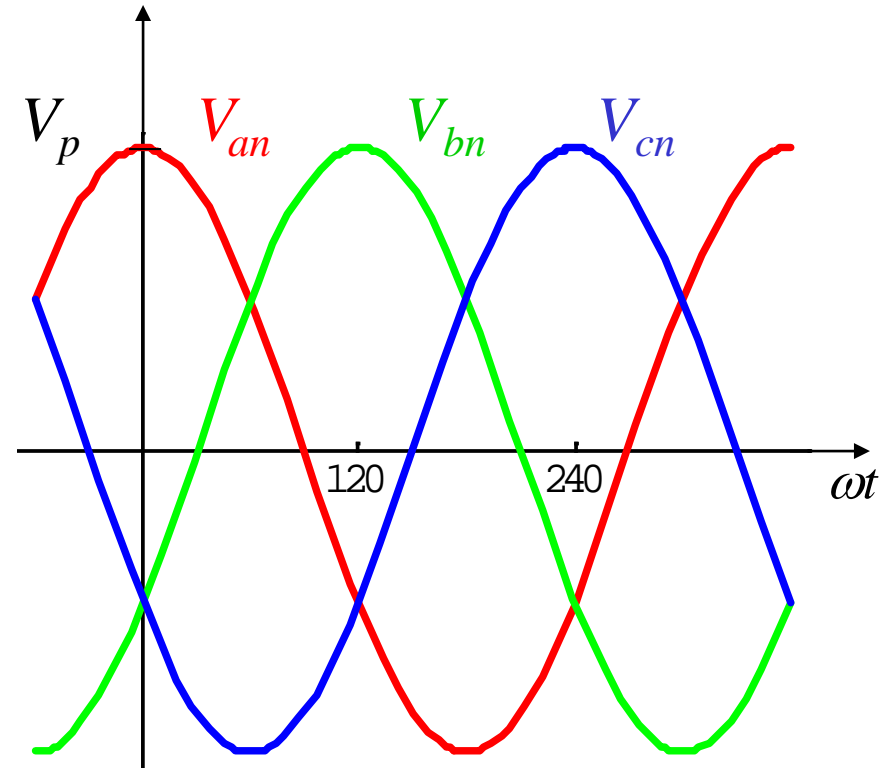


Sistema
a N fasi

Sistemi trifase



Sistema trifase a quattro fili

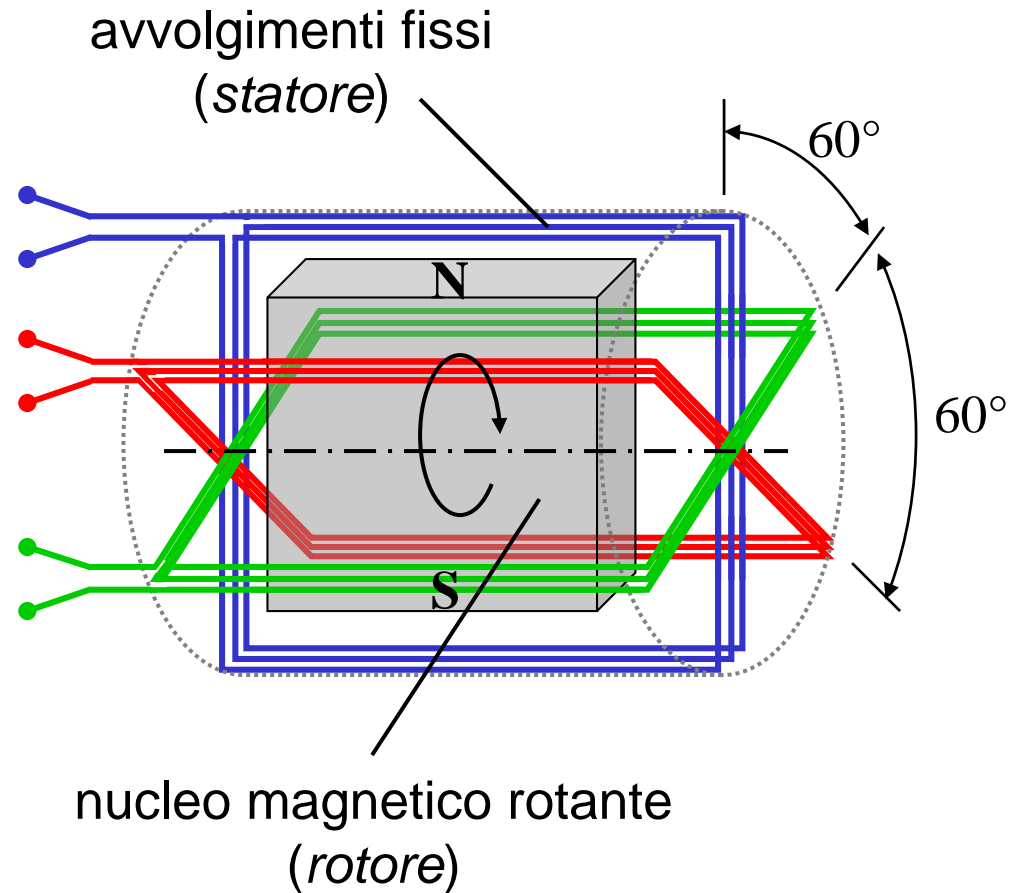
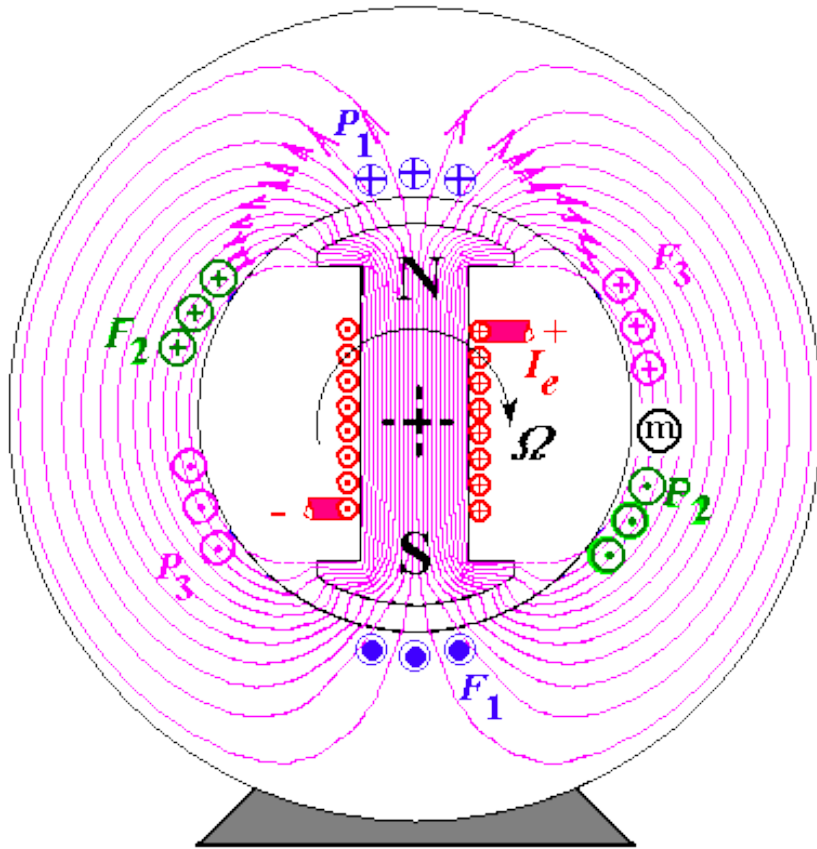


$$V_{an} = V_p \cos \omega t$$

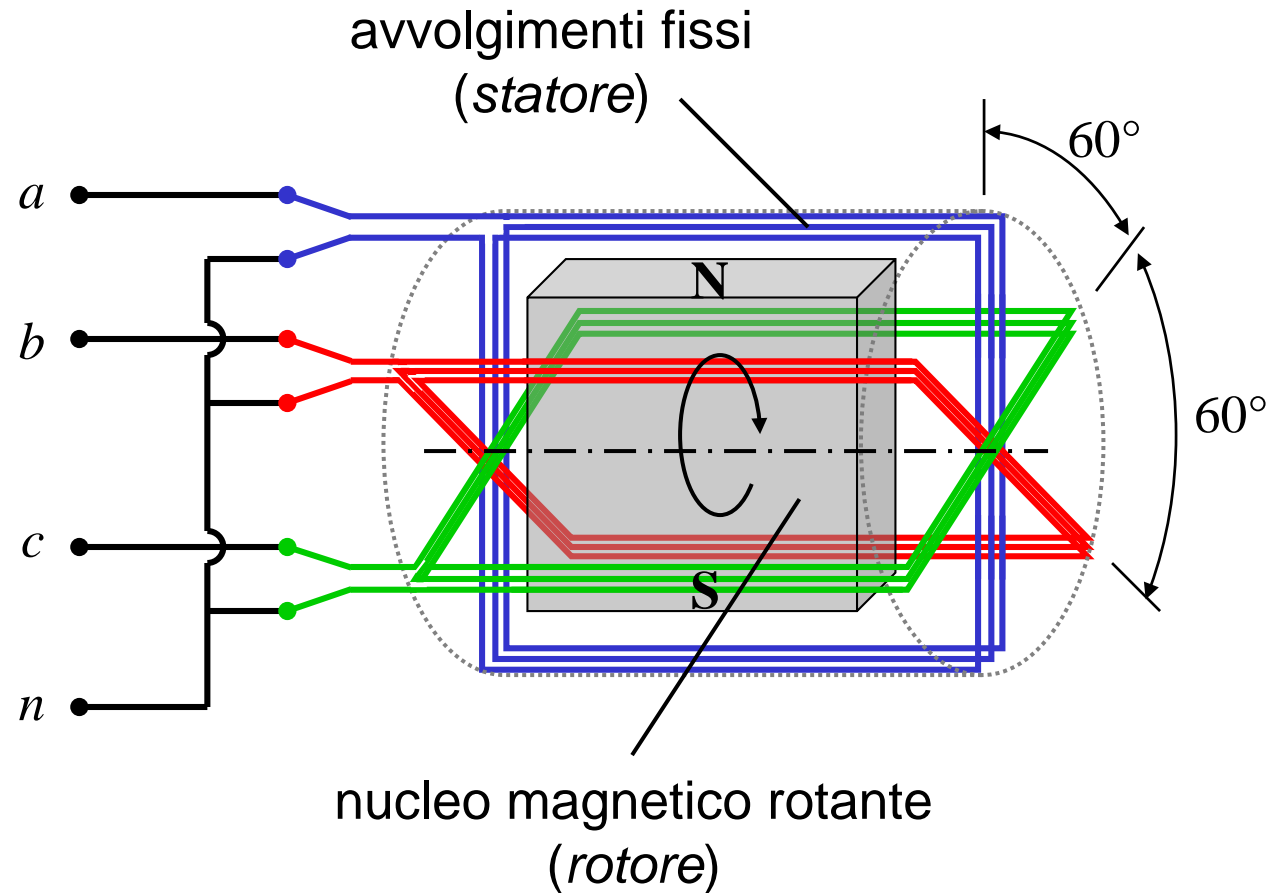
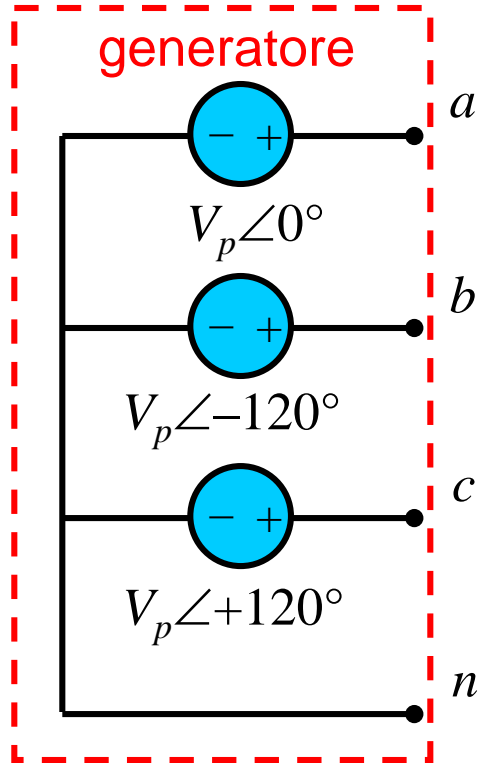
$$V_{bn} = V_p \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$V_{cn} = V_p \cos(\omega t + 120^\circ) = V_p \cos(\omega t - 240^\circ)$$

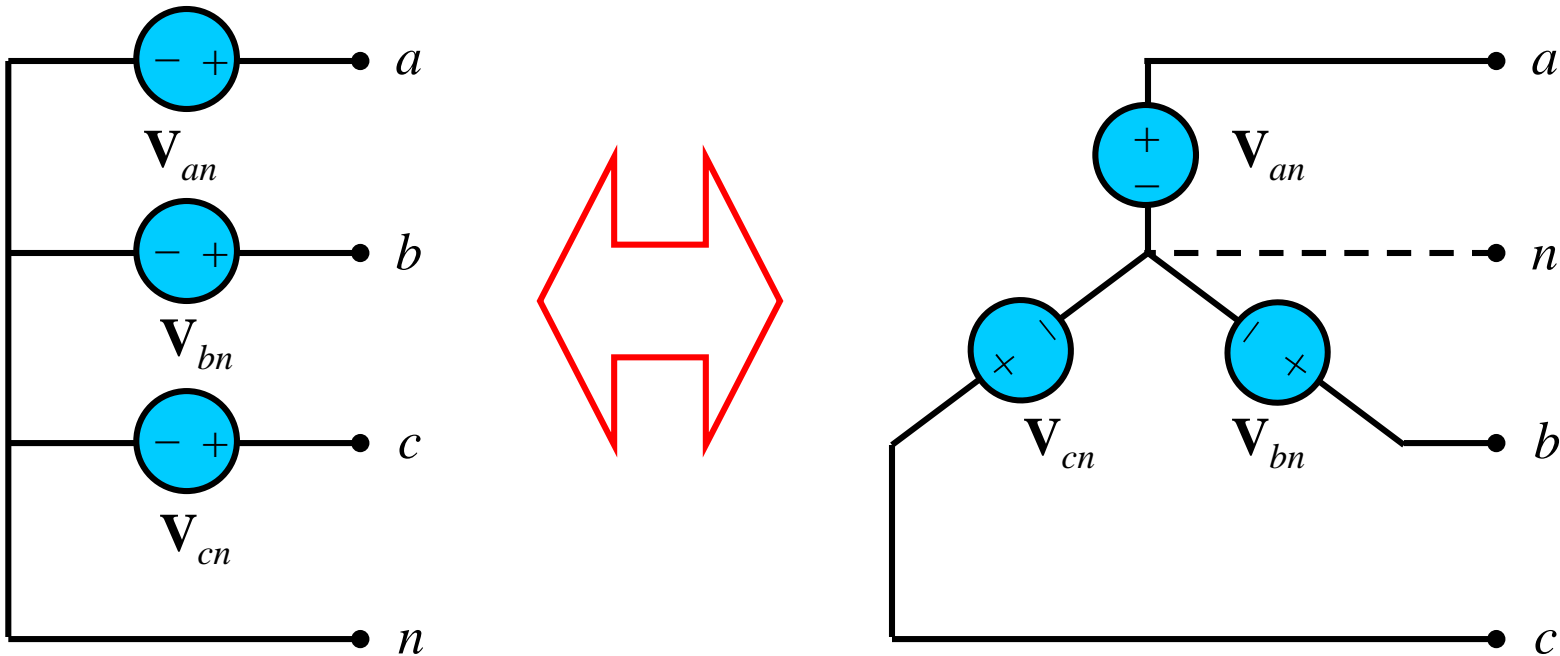
Generatore trifase



Generatore in configurazione a stella



Generatore in configurazione a stella



Le **tensioni di fase bilanciate** hanno lo stesso modulo e sfasamenti reciproci di 120° :

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}| \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

Generatore in configurazione a stella

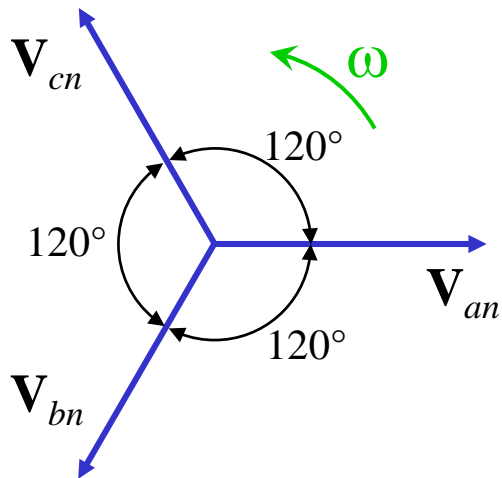
Si possono avere due casi:

**SEQUENZA *abc* o
SEQUENZA POSITIVA:**

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ$$

$$\mathbf{V}_{cn} = V_p \angle -240^\circ = V_p \angle +120^\circ$$

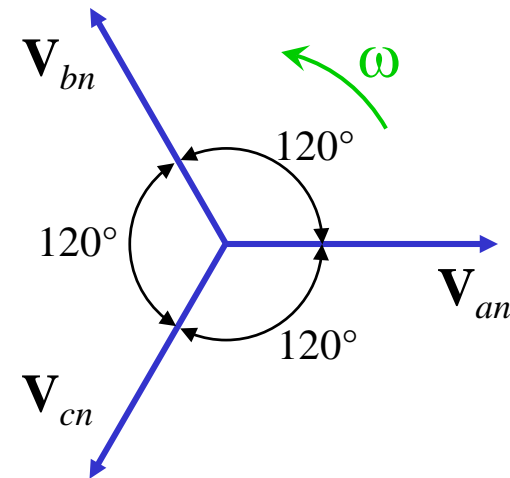


**SEQUENZA *acb* o
SEQUENZA NEGATIVA:**

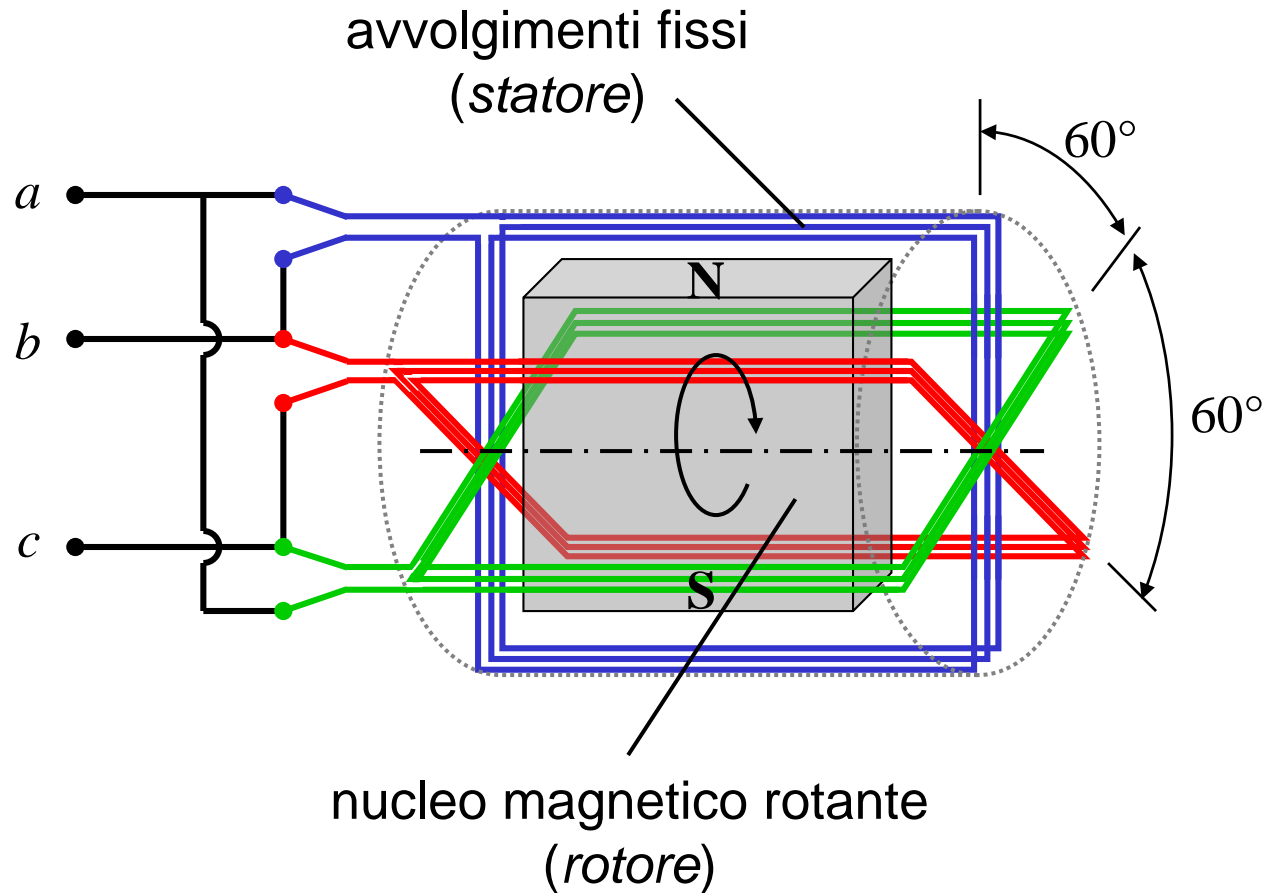
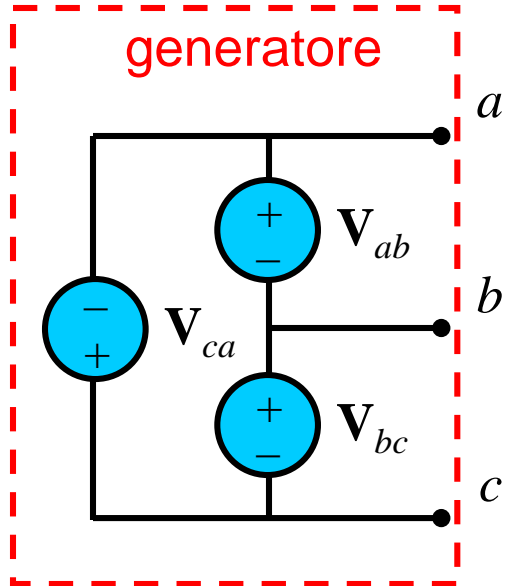
$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{cn} = V_p \angle -120^\circ$$

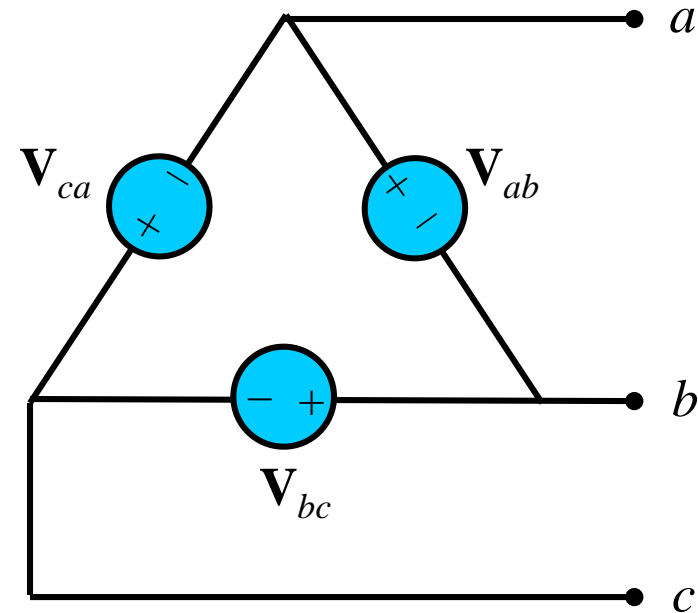
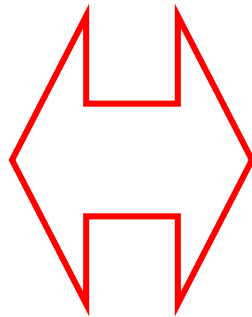
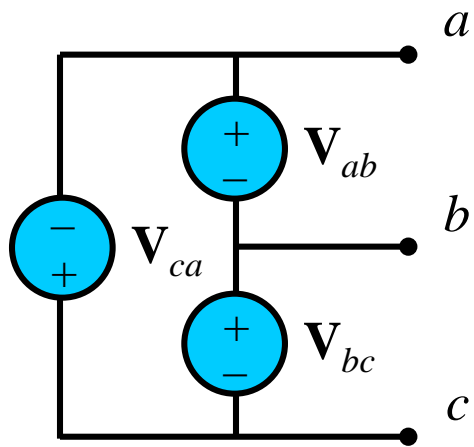
$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -240^\circ = V_p \angle +120^\circ$$



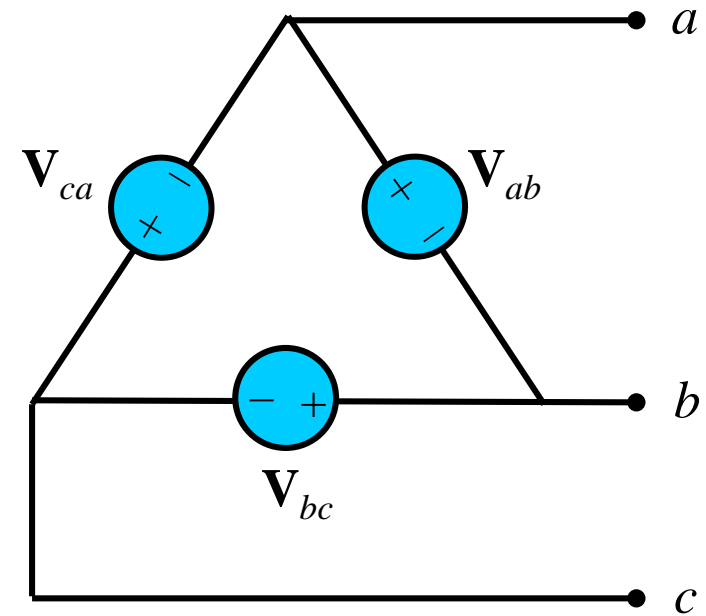
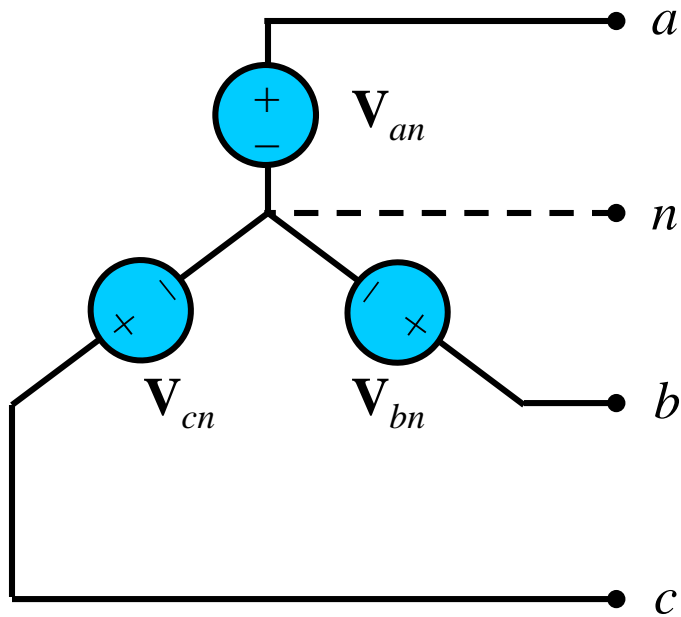
Generatore in configurazione a triangolo



Generatore in configurazione a triangolo



Generatori: relazione fra tensioni



V_{an} , V_{bn} e V_{cn} sono dette **tensioni di fase**

V_{ab} , V_{bc} e V_{ca} sono dette **tensioni di linea**

Generatori: relazione fra tensioni

Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ \\ &= V_p \left(1 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ = V_L \angle 30^\circ\end{aligned}$$

Analogamente:

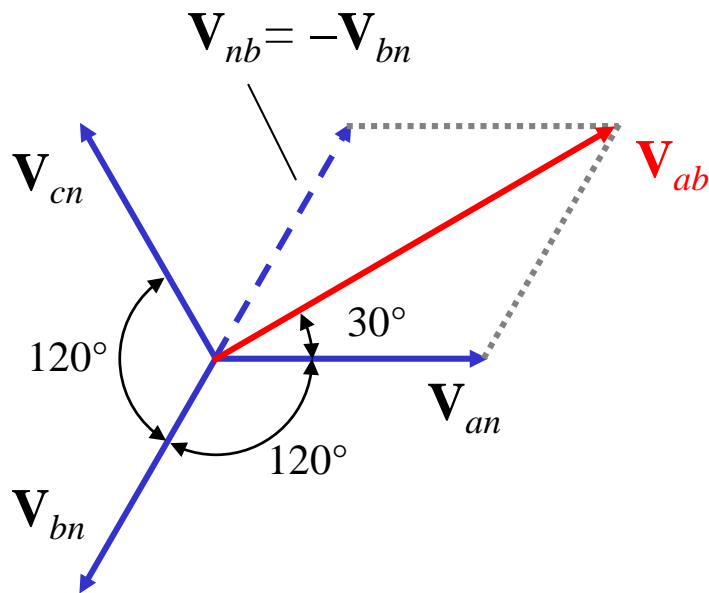
$$\mathbf{V}_{bc} = V_L \angle -90^\circ \quad \mathbf{V}_{ca} = V_L \angle -210^\circ$$

Le **tensioni di linea sono bilanciate** (se lo sono quelle di fase), e cioè hanno lo stesso modulo e sfasamenti di 120° :

$$|\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}| \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca} = 0$$

Generatori: relazione fra tensioni

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} + (-\mathbf{V}_{bn})$$

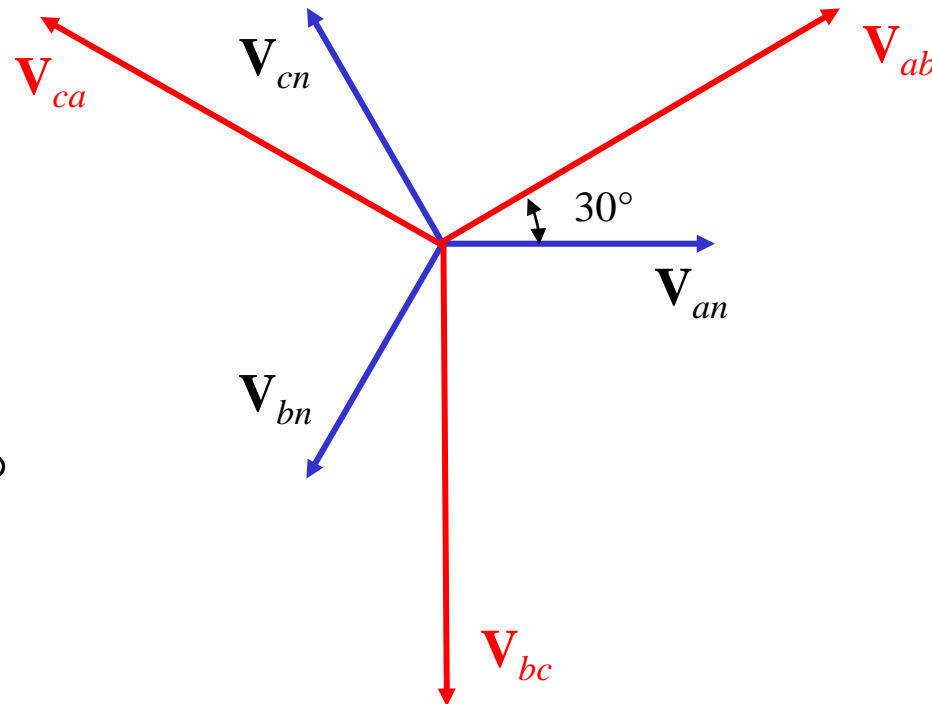


Generatori: relazione fra tensioni

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ$$

$$\mathbf{V}_{cn} = V_p \angle -240^\circ$$



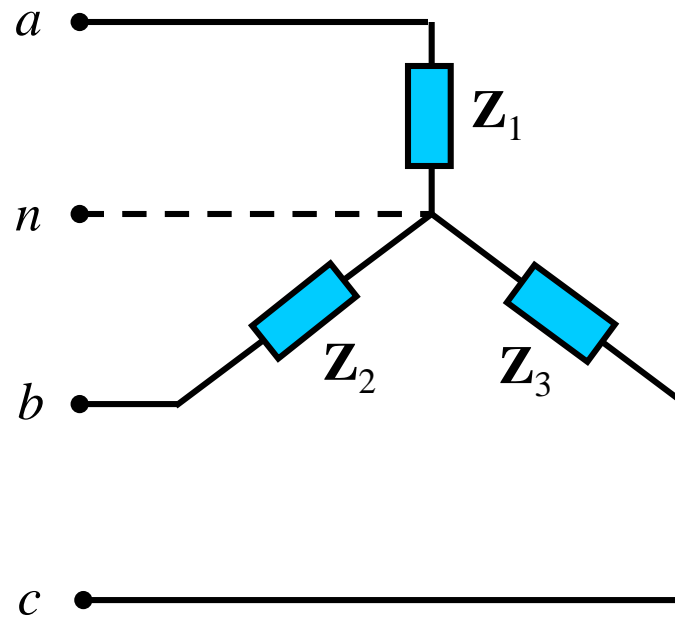
$$\mathbf{V}_{ab} = V_L \angle 30^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bc} = V_L \angle -90^\circ$$

$$\mathbf{V}_{ca} = V_L \angle -210^\circ$$

$$V_L = \sqrt{3} V_p$$

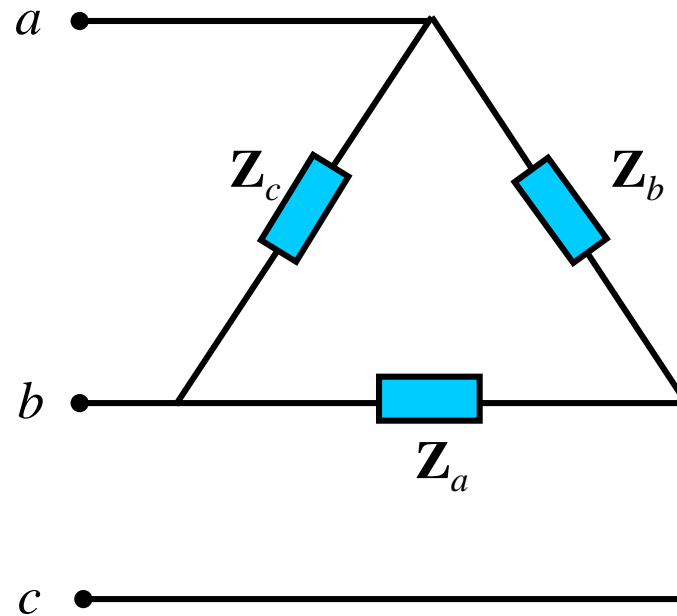
Carico in configurazione a stella



Il **carico è bilanciato** se le impedenze di fase sono uguali in modulo e argomento:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_Y$$

Carico in configurazione a triangolo



Se il carico è bilanciato si ha:

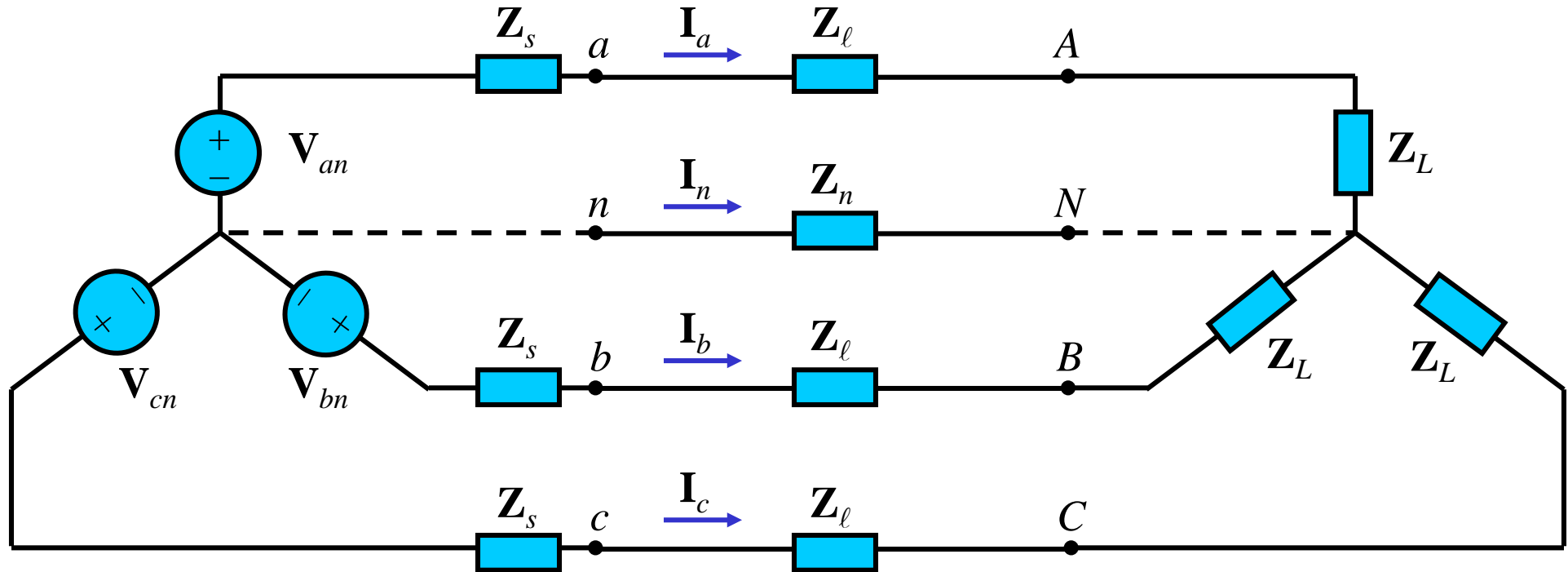
$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_\Delta = 3 \mathbf{Z}_Y$$

Collegamento fra generatore e carico

Si possono avere quattro diverse configurazioni:

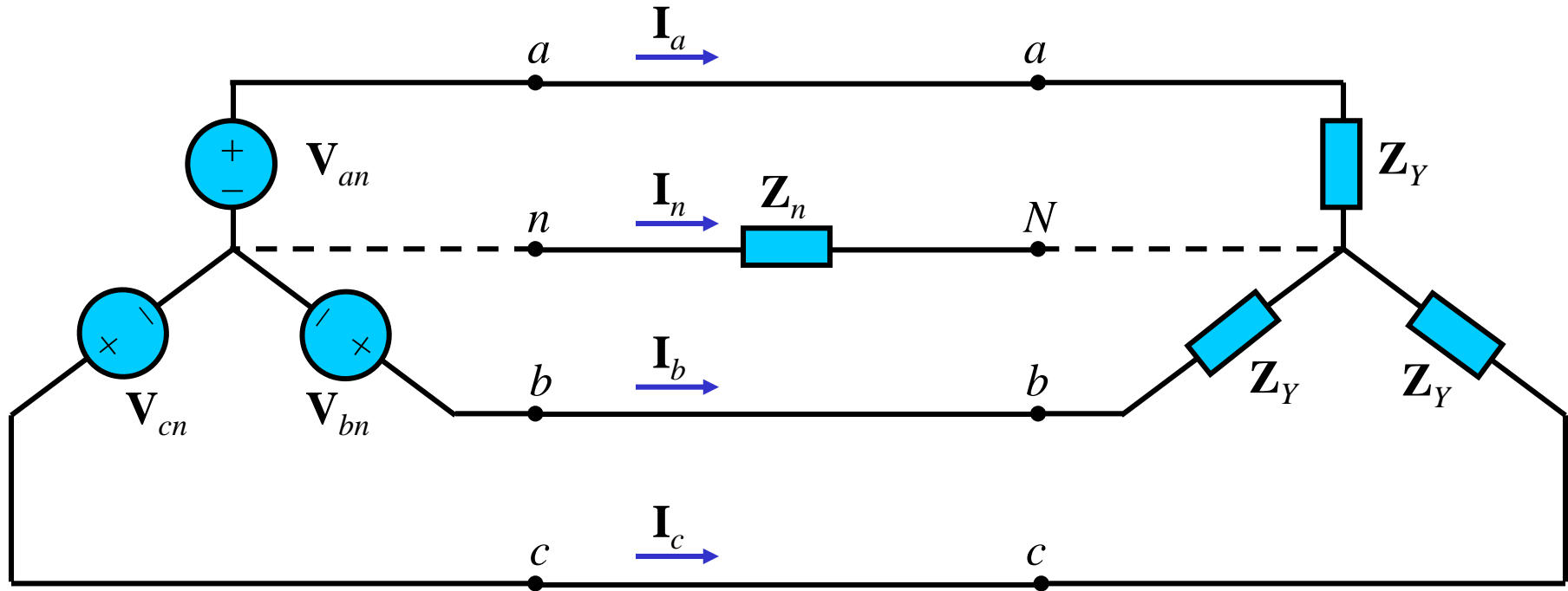
- collegamento Y-Y (generatore a stella con carico a stella)
- collegamento Y- Δ (generatore a stella con carico a triangolo)
- collegamento Δ - Δ (generatore a triangolo con carico a triangolo)
- collegamento Δ -Y (generatore a triangolo con carico a stella)

Configurazione Y-Y bilanciata



Tipicamente $Z_\ell \ll Z_L$ e $Z_n \ll Z_L$

Configurazione Y-Y bilanciata



$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_\ell + \mathbf{Z}_L$$

Configurazione Y-Y bilanciata

KVL alle tre maglie:

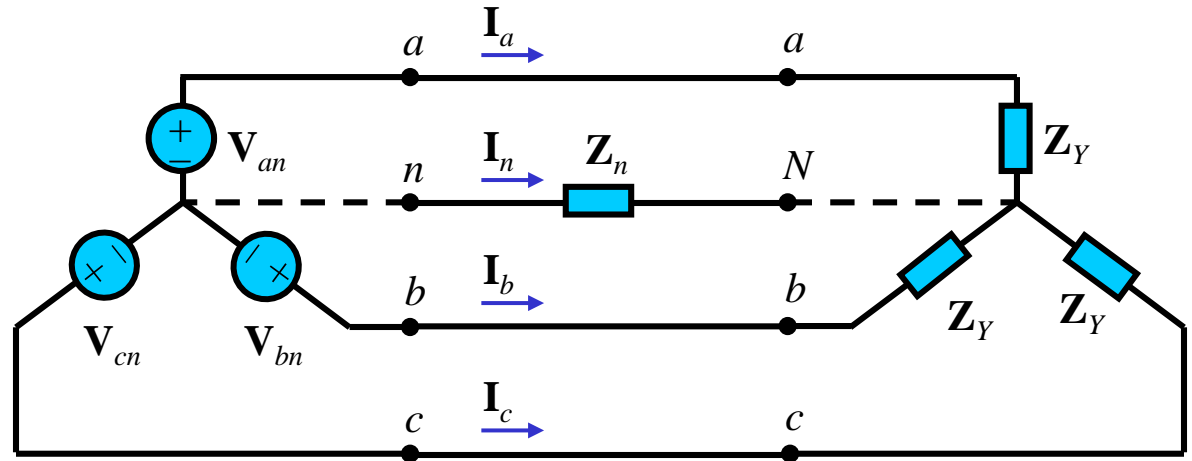
$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{Z}_Y \mathbf{I}_a - \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{Z}_Y \mathbf{I}_b - \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{V}_{cn} = \mathbf{Z}_Y \mathbf{I}_c - \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n$$

Inoltre:

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$



$$\mathbf{Z}_Y (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) - 3 \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n = 0$$

KCL al nodo N :

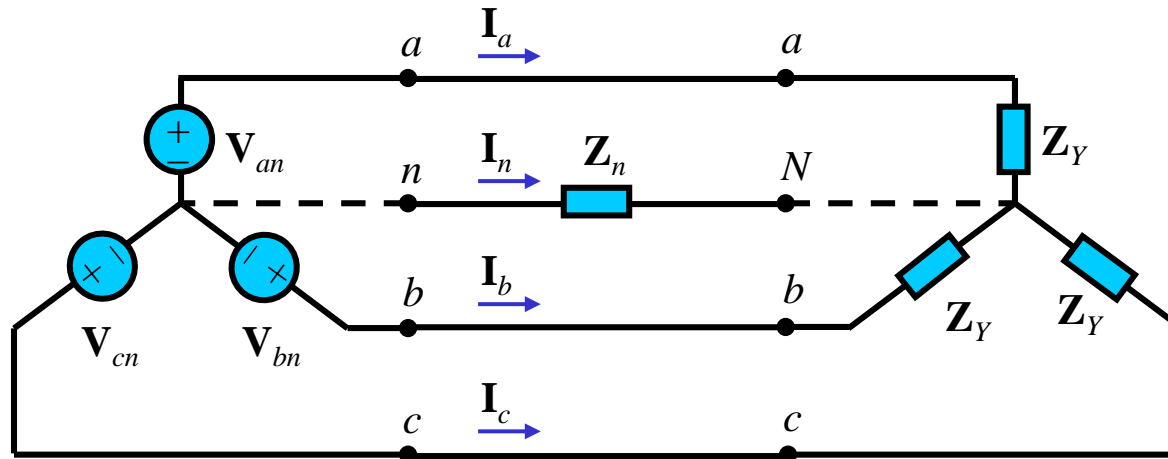
$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = -\mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{I}_n = 0 \quad \mathbf{V}_{nN} = \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n = 0$$

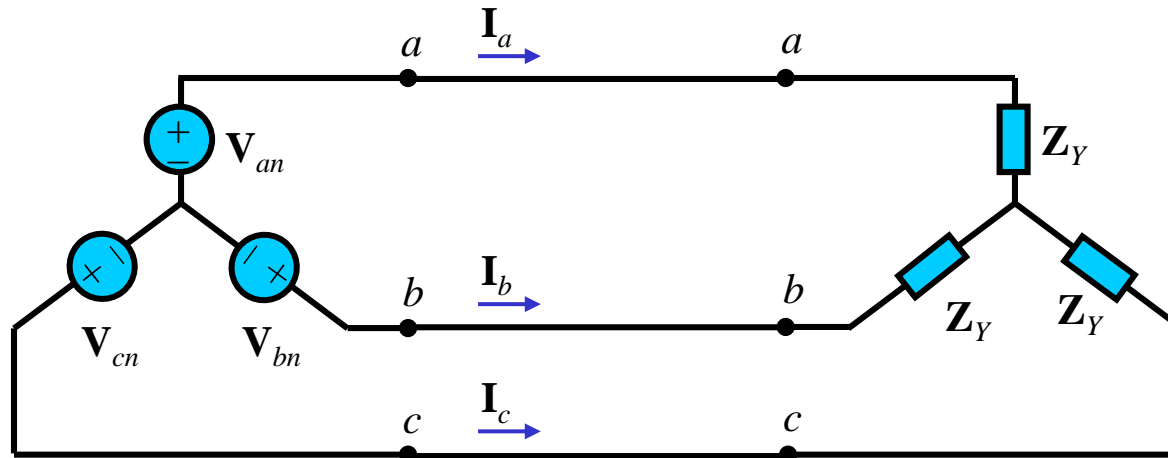
(sul *neutro* non passa corrente e quindi non vi è caduta di tensione)

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} \quad \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_Y} \quad \mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_Y}$$

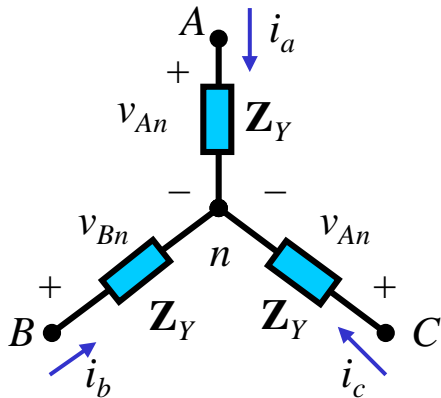
Configurazione Y-Y bilanciata



Poiché $I_n = 0$, $V_{nN} = 0$ si può rimuovere il *neutro* senza alterare il funzionamento del circuito:



Potenza in un sistema trifase bilanciato



$$\mathbf{Z}_Y = Z \angle \theta$$

$$v_{An} = V_p \cos \omega t$$

$$v_{Bn} = V_p \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$v_{Cn} = V_p \cos(\omega t + 120^\circ)$$

$$i_a = I_p \cos(\omega t - \theta)$$

$$i_b = I_p \cos(\omega t - \theta - 120^\circ)$$

$$i_c = I_p \cos(\omega t - \theta + 120^\circ)$$

N.B.: V_p e I_p sono valori di picco delle tensioni di fase e delle correnti di linea

Potenza istantanea:

$$p = p_a + p_b + p_c = v_{An}i_a + v_{Bn}i_b + v_{Cn}i_c = 3 \frac{V_p I_p}{2} \cos \theta = 3 V_{p \text{ eff}} I_{p \text{ eff}} \cos \theta$$

La potenza istantanea su un carico trifase bilanciato è costante

Potenza in un sistema trifase bilanciato

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} p &= p_a + p_b + p_c = v_{An} \dot{i}_a + v_{Bn} \dot{i}_b + v_{Cn} \dot{i}_c \\ &= V_p I_p (\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) + \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t - \theta + 120^\circ)) \end{aligned}$$

Ricordando che $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$ si ottiene:

$$\begin{aligned} p &= \frac{V_p I_p}{2} (3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 240^\circ)) \\ &= \frac{V_p I_p}{2} (3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta) \cos 240^\circ + \sin(2\omega t - \theta) \sin 240^\circ \\ &\quad + \cos(2\omega t - \theta) \cos 240^\circ - \sin(2\omega t - \theta) \sin 240^\circ) \\ &= \frac{V_p I_p}{2} \left(3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - \theta) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - \theta) \right) = 3 \frac{V_p I_p}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

Potenze medie

Passando alle potenze medie, **per ogni singola fase** si ha:

$P_p = \frac{1}{3} p = \frac{V_p I_p}{2} \cos \theta = V_{p \text{ eff}} I_{p \text{ eff}} \cos \theta$	potenza reale o attiva
$Q_p = \frac{V_p I_p}{2} \sin \theta = V_{p \text{ eff}} I_{p \text{ eff}} \sin \theta$	potenza reattiva
$S_p = \frac{V_p I_p}{2} = V_{p \text{ eff}} I_{p \text{ eff}}$	potenza apparente
$\text{pf} = \cos \theta$	fattore di potenza
$\mathbf{S}_p = P_p + jQ_p = \frac{1}{2} \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{I}_p^* = \mathbf{V}_{p \text{ eff}} \cdot \mathbf{I}_{p \text{ eff}}^*$	potenza complessa

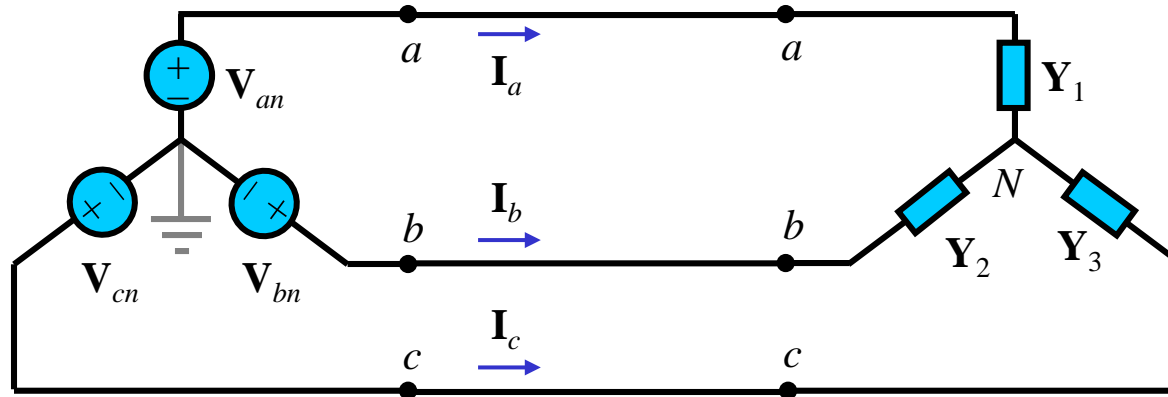
Potenze medie

La potenza media totale sul carico trifase risulta:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{S}_p = \begin{cases} \frac{3}{2} \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{I}_p^* = \frac{3}{2} I_p^2 \cdot \mathbf{Z}_p = 3 \frac{V_p^2}{2\mathbf{Z}_p^*} \\ 3 \mathbf{V}_{p \text{ eff}} \cdot \mathbf{I}_{p \text{ eff}}^* = 3 I_{p \text{ eff}}^2 \cdot \mathbf{Z}_p = 3 \frac{V_{p \text{ eff}}^2}{\mathbf{Z}_p^*} \end{cases}$$

dove $\mathbf{Z}_p = Z_p \angle \theta$ è l'impedenza di carico per fase (\mathbf{Z}_p può rappresentare \mathbf{Z}_Y o \mathbf{Z}_Δ)

Configurazione Y-Y sbilanciata



Applicando il metodo di analisi nodale si ha:

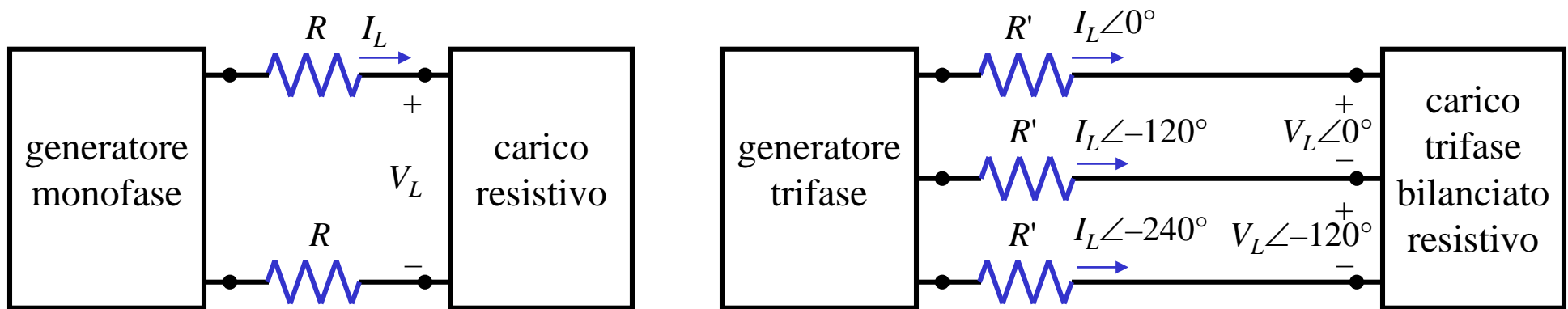
$$(\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{an}) \mathbf{Y}_1 + (\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{bn}) \mathbf{Y}_2 + (\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{cn}) \mathbf{Y}_3 = 0$$

$$\mathbf{V}_N = \frac{\mathbf{V}_{an} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{V}_{bn} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{V}_{cn} \mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$$

Nota \mathbf{V}_N si possono facilmente calcolare le correnti e le potenze.

Vantaggi nella distribuzione dell'energia

A parità di potenza P_L trasmessa al carico, di tensione di linea V_L e di potenza dissipata lungo i cavi, il cablaggio con un sistema trifase richiede meno materiale rispetto ad un sistema monofase.



(R , R' rappresentano la resistenza dei cavi: $R = \rho l / \pi r^2$, $R' = \rho l / \pi r'^2$)

$$P_{\text{persa}}^{\text{mono}} = 2 R I_{L\text{eff}}^2 = 2 R \frac{P_L^2}{V_{L\text{eff}}^2} \qquad P_{\text{persa}}^{\text{tri}} = 3 R' I_{L\text{eff}}^2 = 3 R' \left(\frac{P_L}{3 V_{p\text{eff}}} \right)^2 = 3 R' \left(\frac{P_L}{\sqrt{3} V_{L\text{eff}}} \right)^2 = R' \frac{P_L^2}{V_{L\text{eff}}^2}$$

Vantaggi nella distribuzione dell'energia

Imponendo che la potenza dissipata lungo i cavi sia la stessa si ha:

$$\frac{P_{\text{persa}}^{\text{mono}}}{P_{\text{persa}}^{\text{tri}}} = 2 \frac{R}{R'} = 2 \frac{\rho \ell / \pi r^2}{\rho \ell / \pi r'^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2} r'$$

quindi il rapporto fra le quantità di materiale (rame) necessario per cablare il sistema monofase e quello trifase è:

$$\frac{\text{materiale per monofase}}{\text{materiale per trifase}} = \frac{2 (\pi r^2 \ell)}{3 (\pi r'^2 \ell)} = \frac{2 r^2}{3 r'^2} = \frac{4}{3} = 1.333$$