Facoltà di Ingegneria
Università degli studi di Pavia

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Elettronica e Informatica

Circuiti Elettrici Lineari

Risposta in frequenza

Sommario

- Funzione di trasferimento
- La scala dei decibel
- Risonanza serie
- Risonanza parallelo
- Filtri
- Diagrammi di Bode

Funzione di trasferimento

La risposta in frequenza di un circuito rappresenta la variazione del suo comportamento al variare della frequenza

Funzione di trasferimento

$\mathbf{X}(\omega)$ → rete lineare $\mathbf{H}(\omega)$ → $\mathbf{Y}(\omega)$

ingresso — uscita

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)}$$

$\mathbf{H}(\omega)$ rappresenta il rapporto del fasore di uscita rispetto al fasore d'ingresso, al variare della frequenza, e viene detta funzione di trasferimento

Funzione di trasferimento

Quattro possibili tipi di funzione di trasferimento:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \text{guadagno di tensione}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)} = \text{guadagno di corrente}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)} = \text{guadagno di transimpedenza}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \text{guadagno di transammettenza}$$

Funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(\omega) = H(\omega)\mathrm{e}^{j\phi(\omega)}$$

H = modulo della funzione di trasferimento

ϕ = argomento o fase della funzione di trasferimento

In molti casi si preferisce introdurre la variabile complessa $s = j\omega$

$$\mathbf{H}(\omega) \rightarrow \mathbf{H}(s)$$

Funzione di trasferimento

Si può anche scrivere:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)}$$

$\mathbf{N}(\omega)$ e $\mathbf{D}(\omega)$ non coincidono necessariamente con le espressioni delle funzioni di ingresso e uscita. La frazione è ridotta ai minimi termini, eliminando eventuali fattori comuni.

Funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)}$$

Le radici di $\mathbf{N}(\omega) = 0$ sono dette zeri di $\mathbf{H}(\omega)$ e vengono rappresentate come $j\omega = z_1, z_2, \ldots$

Le radici di $\mathbf{D}(\omega) = 0$ sono dette poli di $\mathbf{H}(\omega)$ e vengono rappresentate come $j\omega = p_1, p_2, \ldots$

Funzione di trasferimento

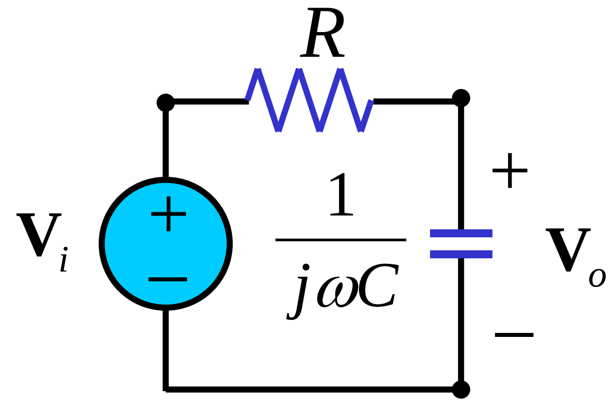
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)}$$

Uno zero (radice del numeratore) è un valore che rende nulla la funzione di trasferimento

Uno polo (radice del denominatore) è un valore per il quale la funzione di trasferimento diventa infinita

Funzione di trasferimento

Esempio:



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1/\,j\omega C}{R + 1/\,j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$H(\omega) = |\,\mathbf{H}(\omega)\,| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

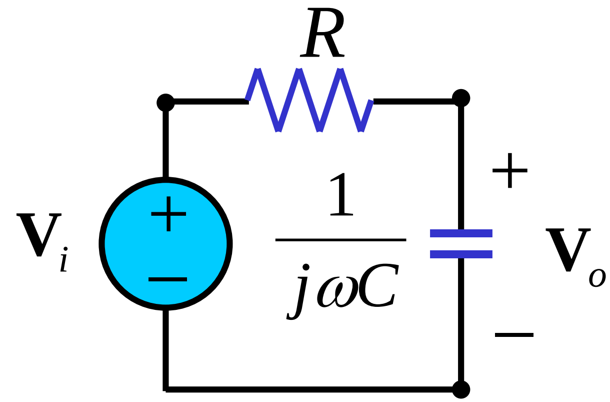
$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\phi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0}$$

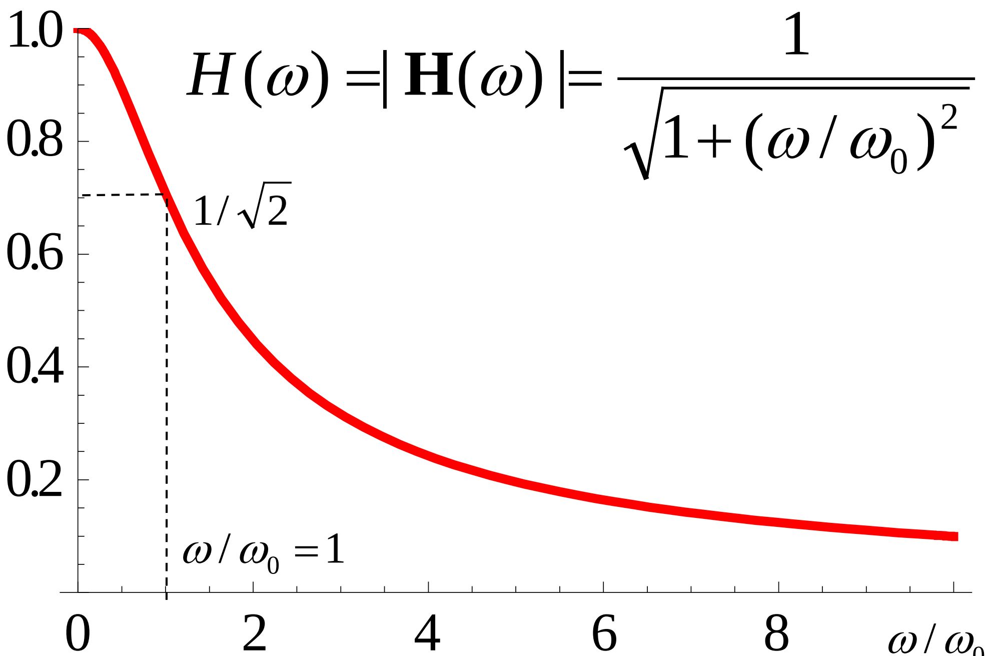
Funzione di trasferimento

Esempio:

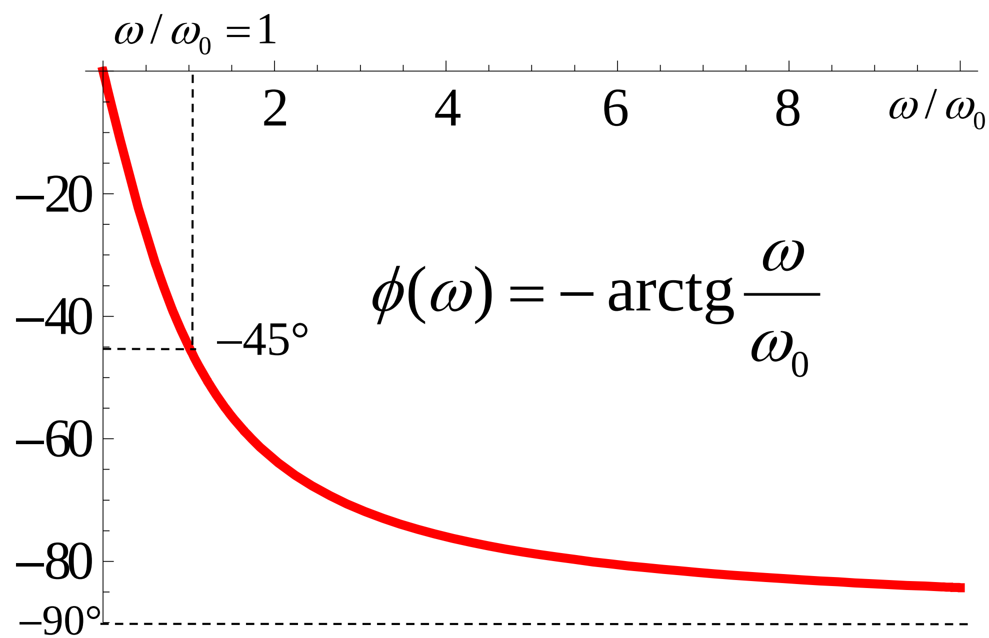
$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$



$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$



$$\phi(\omega) = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\omega_0}$$



La scala dei decibel

Per rappresentare il rapporto fra due quantità omogenee x_2 e x_1 (ad esempio fra due tensioni o fra due correnti), in campo ingegneristico si usa spesso il decibel:

$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{x_2}{x_1} \quad \Rightarrow \quad H_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log_{10}|\mathbf{H}(\omega)| = 20\log_{10}\frac{x_2}{x_1}$$

Il simbolo del decibel è dB

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad H_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} = -3.01\,\mathrm{dB}$$

La scala dei decibel

H	H^2	$20 \log_{10} H$ $10 \log_{10} H^2$
1000	1000000	60
316	100000	50
100	10000	40
31.6	1000	30
10	100	20
3.16	10	10
2	4	6
1.41	2	3
1	1	0

H	H^2	$20 \log_{10} H$ $10 \log_{10} H^2$
1	1	0
0.707	0.5	-3
0.5	0.25	-6
0.316	0.1	-10
0.1	0.01	-20
0.0316	0.001	-30
0.01	0.0001	-40
0.00316	0.00001	-50
0.001	0.000001	-60

La scala dei decibel

Questa rappresentazione è particolarmente conveniente per tracciare il grafico del modulo della funzione di trasferimento.

Si utilizzano le proprietà dei logaritmi:

$$\log\frac{x_2}{x_1} = \log x_2 - \log x_1$$

$$\log x_1 x_2 = \log x_2 + \log x_1$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha \log x$$

$$\log\frac{1}{x_1} = -\log x_1$$

$$\log 1 = 0$$

La scala dei decibel

In generale:

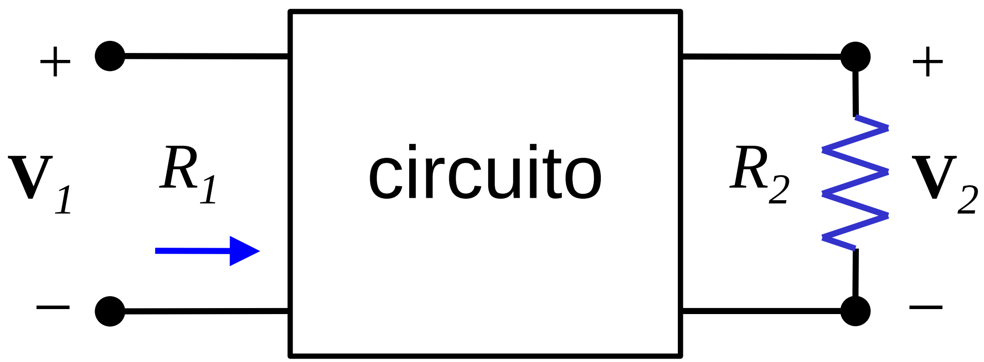
$$\log \frac{K(\omega - z_1)^{\alpha_1}(\omega - z_2)^{\alpha_2}(\omega - z_3)^{\alpha_3}\ldots}{(\omega - p_1)^{\beta_1}(\omega - p_2)^{\beta_2}(\omega - p_3)^{\beta_3}\ldots} =$$

$$= \log K + \alpha_1 \log(\omega - z_1) + \alpha_2 \log(\omega - z_2) + \alpha_3 \log(\omega - z_3) + \ldots$$

$$- \beta_1 \log(\omega - p_1) - \beta_2 \log(\omega - p_2) - \beta_3 \log(\omega - p_3) - \ldots$$

La scala dei decibel

In molti casi è più semplice calcolare (o misurare) il rapporto fra la potenza d'ingresso e quella d'uscita:



$$P_1 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R_1} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{V}_1|^2 = 2R_1P_1$$

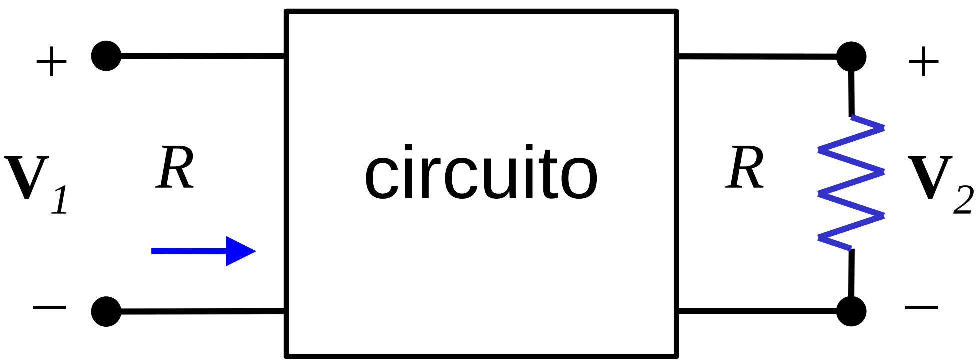
$$P_2 = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R_2} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{V}_2|^2 = 2R_2P_2$$

$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \left|\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right| = \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|}$$

$$H(\omega)_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|} = 10\log_{10}\frac{|\mathbf{V}_2|^2}{|\mathbf{V}_1|^2} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} + 10\log_{10}\frac{R_2}{R_1}$$

La scala dei decibel

Se $\boxed{R_2 = R_1 = R}$ si ha:



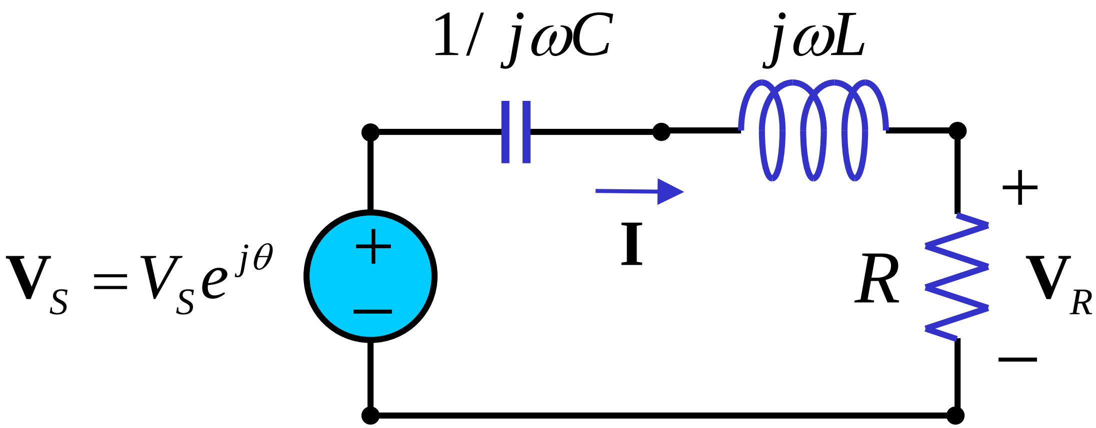
$$P_1 = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{V}_1|^2 = 2RP_1$$

$$P_2 = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{V}_2|^2 = 2RP_2$$

$$H(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)| = \left|\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right| = \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|}$$

$$H(\omega)_{\text{dB}} = 20\log_{10}\frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|} = 10\log_{10}\frac{|\mathbf{V}_2|^2}{|\mathbf{V}_1|^2} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$$

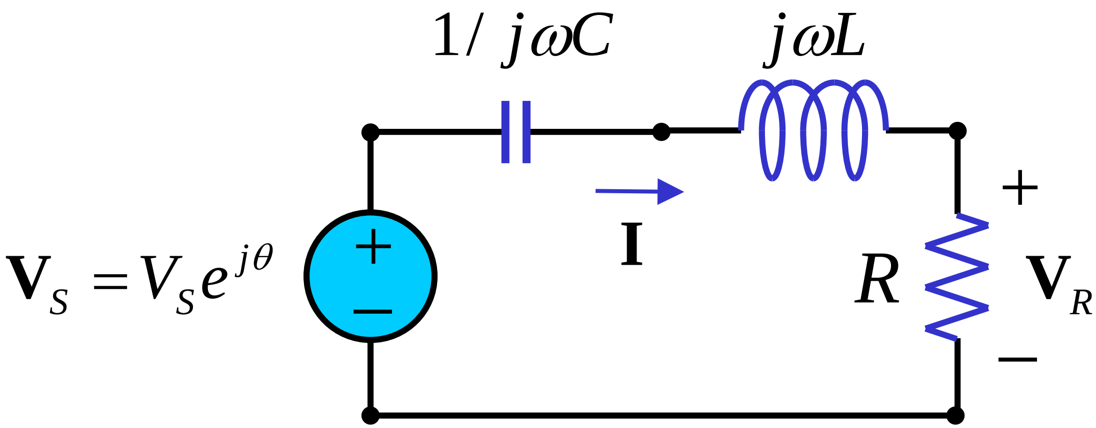
Risonanza serie



$$\mathbf{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_S} = \frac{R}{R + 1/\,j\omega C + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{\omega RC}\right)}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}} \qquad \phi(\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)$$

Risonanza serie

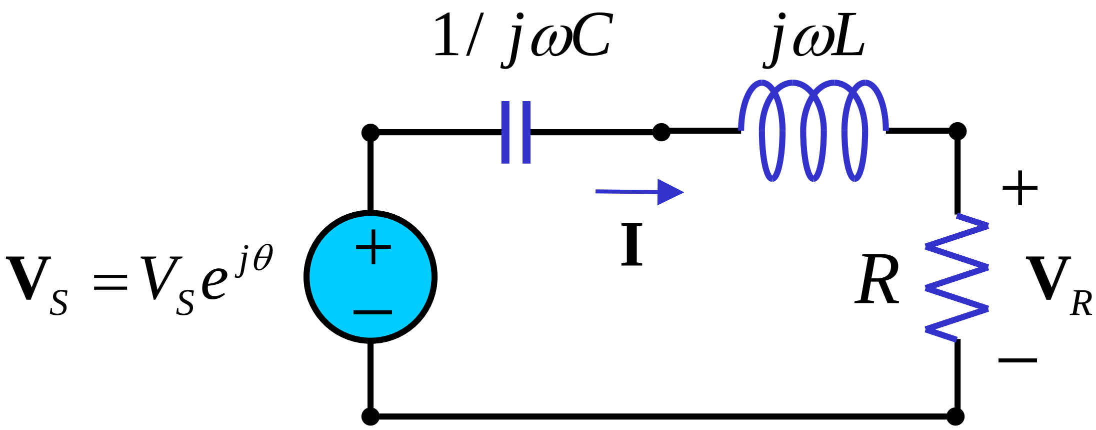


$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

La funzione H raggiunge il valore massimo per la pulsazione ω_0:

$$\frac{\omega_0 L}{R} - \frac{1}{\omega_0 RC} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Risonanza serie



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Alla pulsazione ω_0 si ha

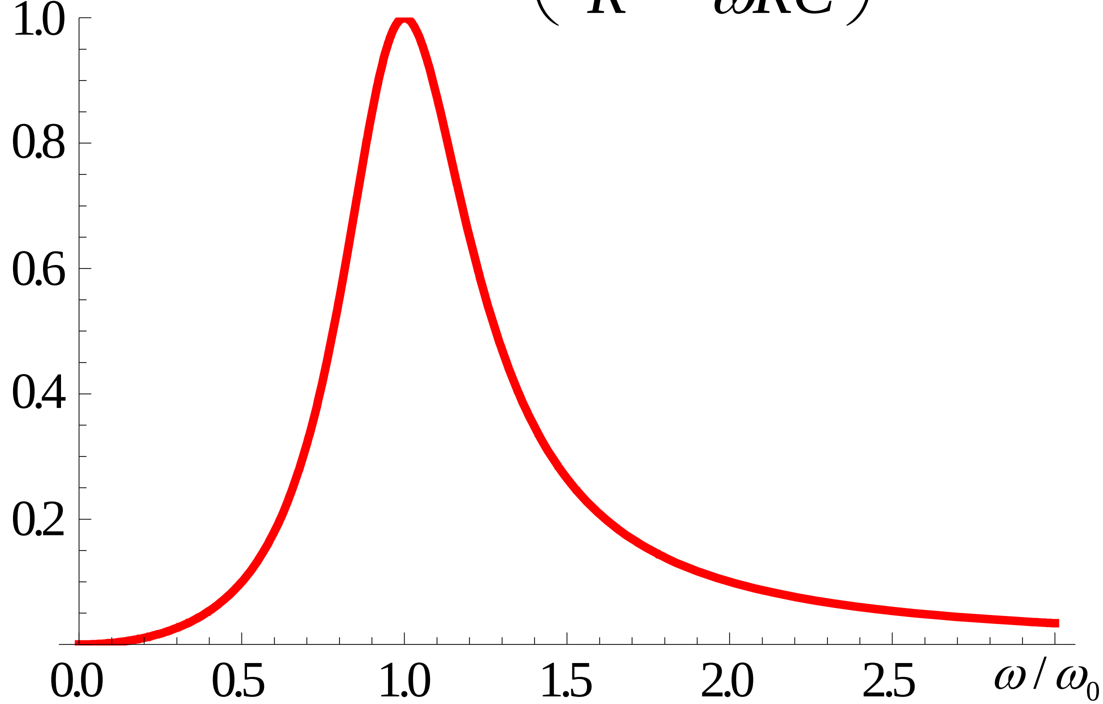
- $H(\omega_0) = 1$, $\phi(\omega_0) = 0$ (le tensioni $\mathbf{V}_S$ e $\mathbf{V}_R$ e la corrente $\mathbf{I}$ sono in fase)
- L'impedenza vista dal generatore è puramente resistiva e coincide con R
- $|\mathbf{V}_R|$ è il più grande possibile e quindi la potenza assorbita dalla resistenza R è la massima possibile

Risonanza serie

La potenza media assorbita dalla resistenza è:

$$P(\omega)=\frac{1}{2}R\,|\mathbf{I}\,|^2=\frac{1}{2}\frac{V_S^2}{R}\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega L}{R}-\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}=P(\omega_0)H^2(\omega)$$

$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)}=H^2(\omega)$$

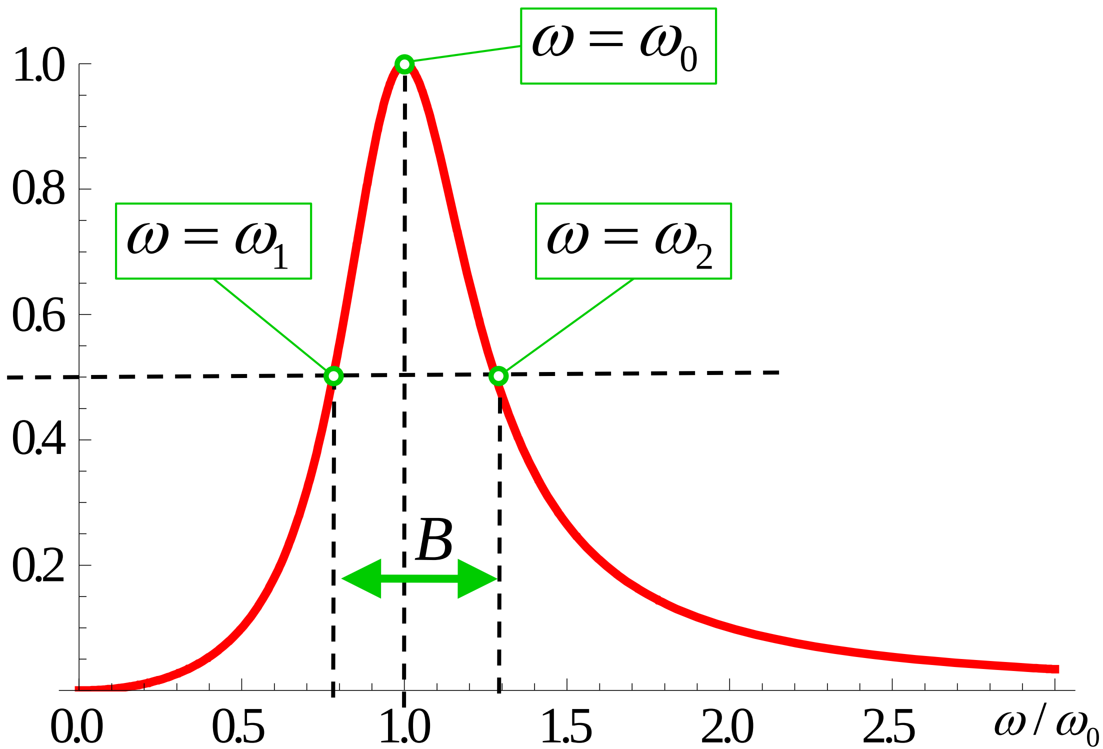


Risonanza serie

Si definisce larghezza di banda la quantità $B = \omega_2 - \omega_1$, dove ω_2 e ω_1 rappresentano le due pulsazione per le quali la potenza assorbita dalla resistenza è la metà di quella massima.

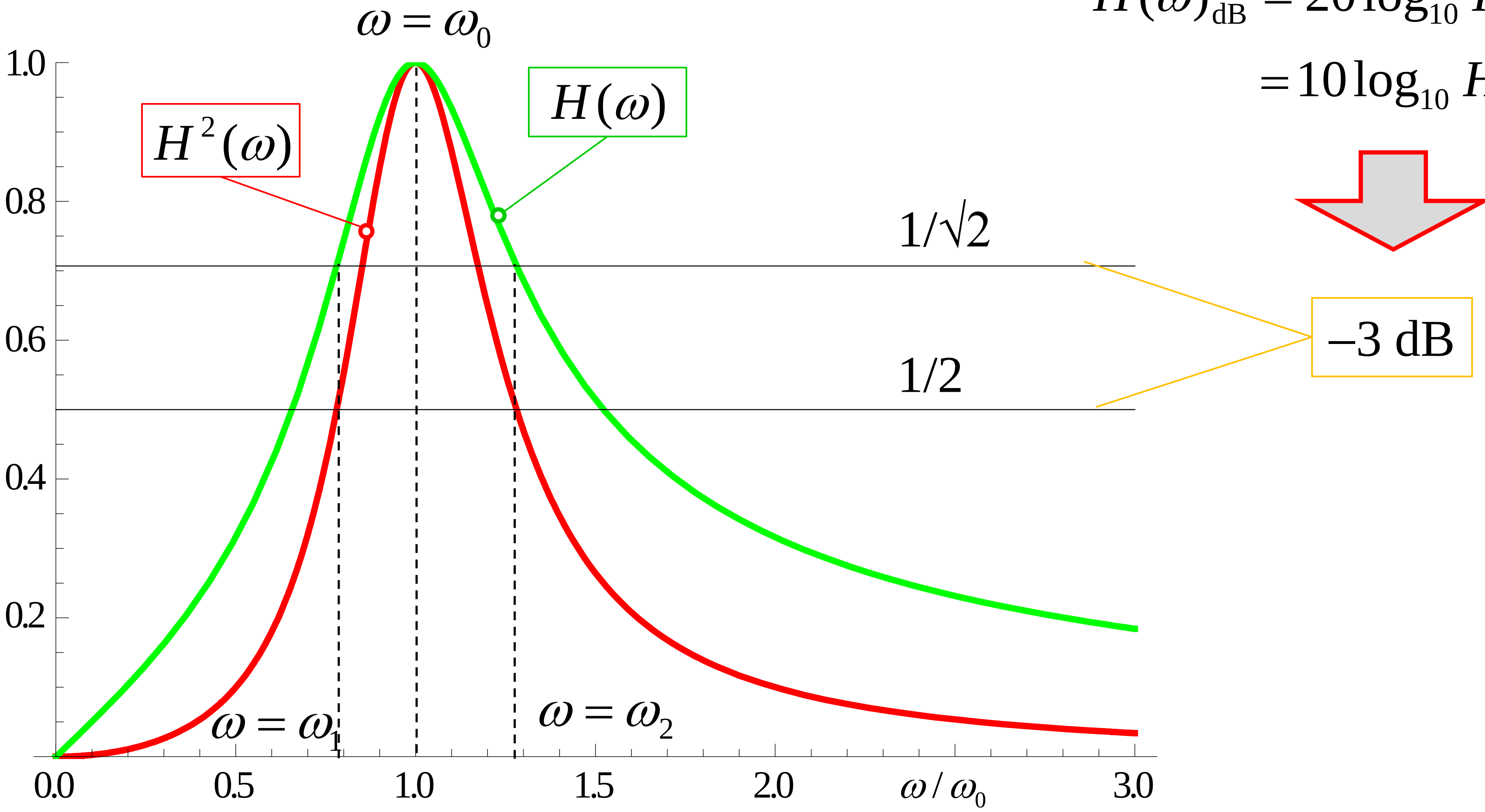
$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega)$$

$\boxed{0.5 \rightarrow -3\text{ dB}}$



Risonanza serie

$$H(\omega)_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10} H(\omega)$$
$$= 10\log_{10} H^2(\omega)$$



Risonanza serie

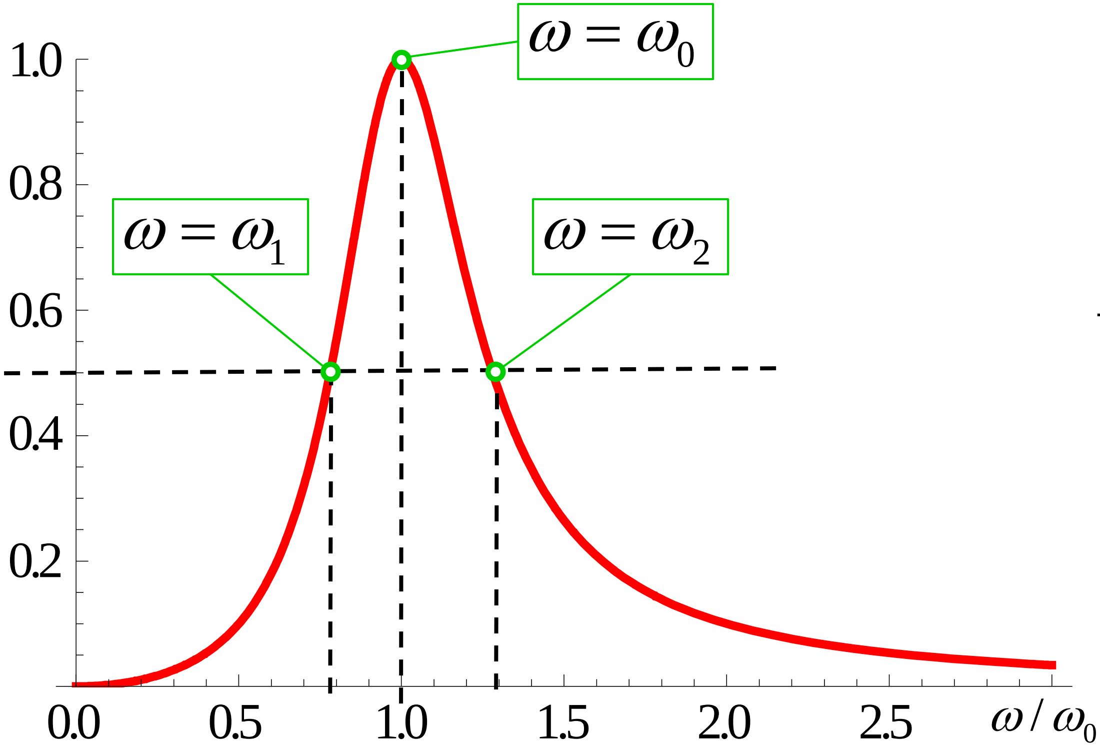
$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}$$

$$\frac{P(\omega_1)}{P(\omega_0)} = \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_0)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1$$

$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega)$$

$0.5 \rightarrow -3\ \text{dB}$



Risonanza serie

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} \qquad \omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Si verifica facilmente che:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

Risonanza serie

In generale, per un circuito risonante si definisce il fattore di merito:

$$Q = \omega_0 \frac{\text{energia immagazzinata nel circuito}}{\text{potenza media dissipata}}$$

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia immagazzinata nel circuito}}{\text{energia dissipata in un periodo alla frequenza di risonanza}}$$

Risonanza serie

Per il circuito RLC serie il fattore di merito Q risulta:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I^2}{\frac{1}{2} R I^2 \frac{1}{f_0}} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C}$$

Risonanza serie

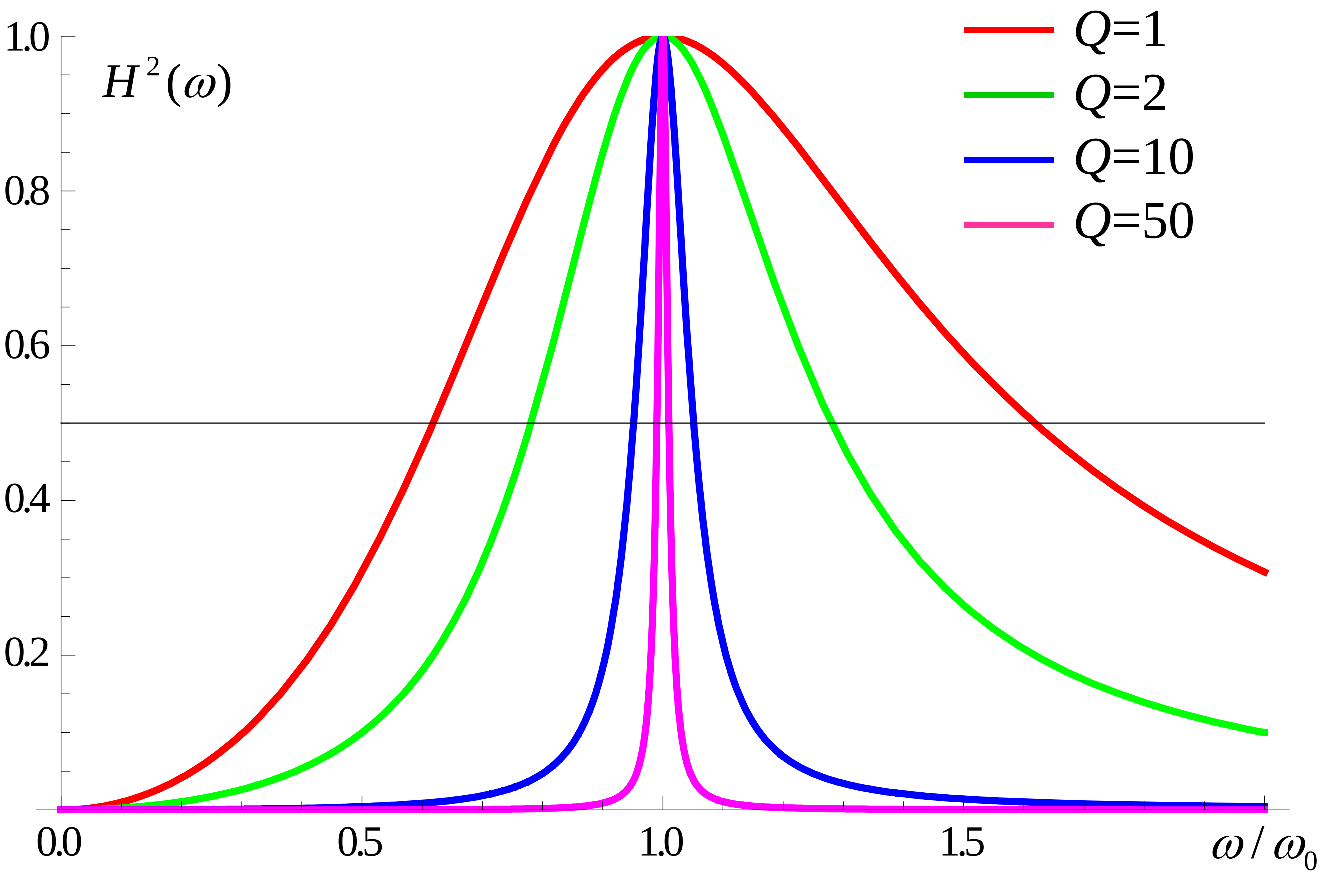
Da $\quad Q = \omega_0 \dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{\omega_0 RC}$ $\quad$ si ottiene:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$H^2(\omega) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{\omega RC}\right)^2} = \frac{1}{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} = \omega_0\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

Risonanza serie



$$H^2(\omega) = \frac{1}{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Se $Q >> 1$ si ha:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

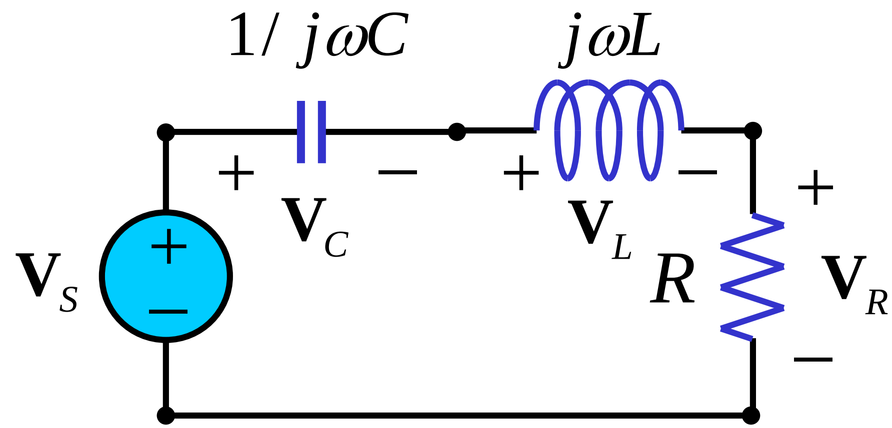
$$\approx \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right) = \omega_0 \pm \frac{B}{2}$$

Risonanza serie

Ricordando che alla risonanza si ha $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e che

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

si ottiene:



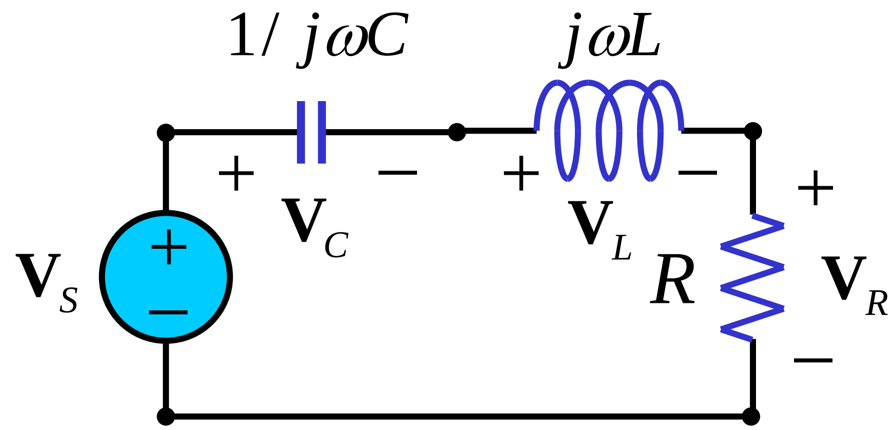
$$\mathbf{V}_C = \frac{1/j\omega_0 C}{R + 1/j\omega_0 C + j\omega_0 L}\mathbf{V}_S = \frac{\mathbf{V}_S}{j\omega_0 RC + 1 - \omega_0^2 LC} = \frac{\mathbf{V}_S}{j\omega_0 RC} = -jQ\mathbf{V}_S$$

$$\mathbf{V}_L = \frac{j\omega_0 L}{R + 1/j\omega_0 C + j\omega_0 L}\mathbf{V}_S = \frac{\mathbf{V}_S}{\dfrac{R}{j\omega_0 L} - \dfrac{1}{\omega_0^2 LC} + 1} = \frac{j\omega_0 L\mathbf{V}_S}{R} = +jQ\mathbf{V}_S$$

Risonanza serie

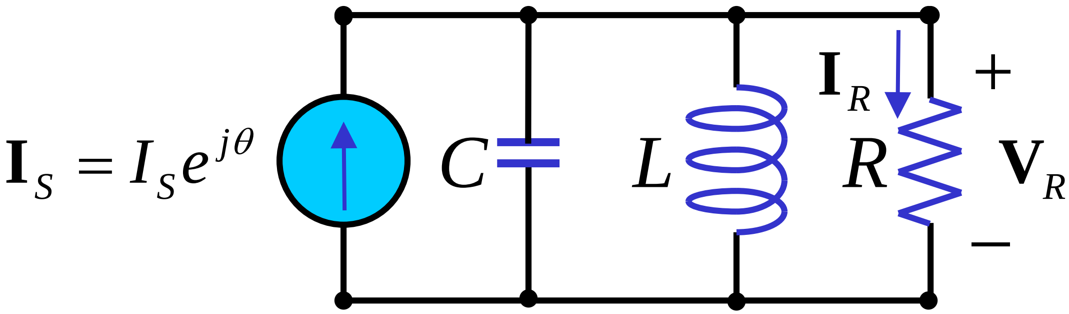
$$\mathbf{V}_C = -jQ\mathbf{V}_S$$

$$\mathbf{V}_L = +jQ\mathbf{V}_S$$



Le tensioni sul condensatore e sull'induttore sono uguali e opposte e nei circuiti ad alto fattore di merito possono raggiungere valori elevatissimi.

Risonanza parallelo

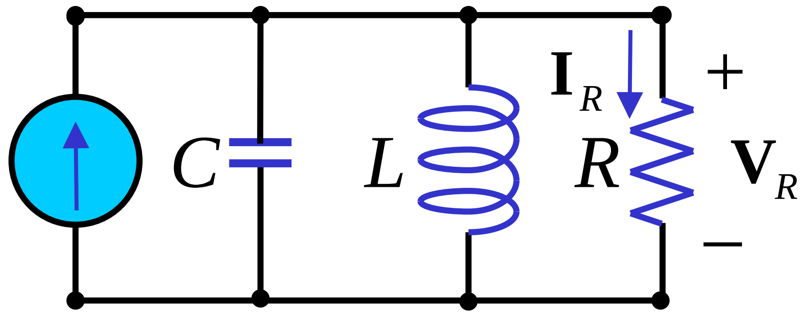


$$\mathbf{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{\mathbf{I}_R}{\mathbf{I}_S} = \frac{1/R}{1/R + j\omega C + 1/j\omega L} = \frac{1}{1 + j\left(\omega RC - \dfrac{R}{\omega L}\right)}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \dfrac{R}{\omega L}\right)^2}} \qquad \phi(\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)$$

Risonanza parallelo

$$\mathbf{I}_S = I_S e^{j\theta}$$



$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

La funzione H raggiunge il valore massimo per la pulsazione ω_0:

$$\omega RC - \frac{R}{\omega L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Risonanza parallelo

Per il circuito RLC parallelo il fattore di merito Q risulta:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia immagazzinata nel circuito}}{\text{energia dissipata in un periodo alla frequenza di risonanza}} =$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2} C V_R^2}{\frac{1}{2} \frac{V_R^2}{R} \frac{1}{f_0}} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

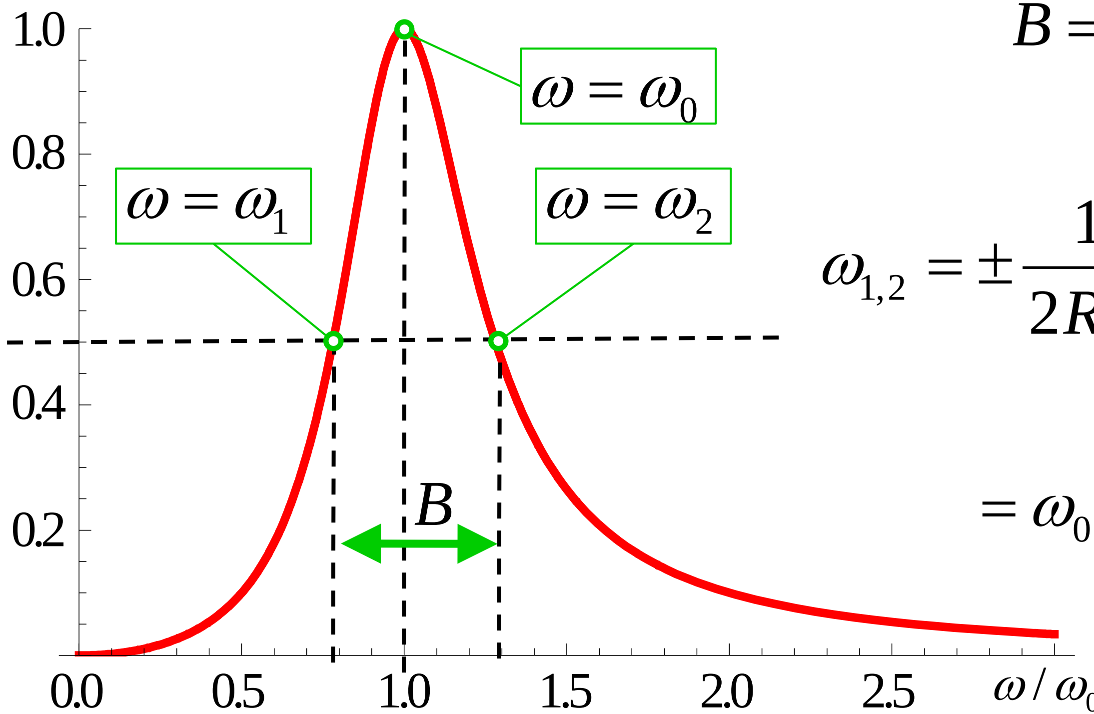
Risonanza parallelo

La potenza media assorbita dalla resistenza è:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} R\,|\mathbf{I}_R|^2 = \frac{1}{2} R I_S^2 \frac{1}{1+\left(\omega RC - \dfrac{R}{\omega L}\right)^2} = P(\omega_0) H^2(\omega)$$

$$\frac{P(\omega)}{P(\omega_0)} = H^2(\omega)$$

$$\boxed{0.5 \;\rightarrow\; -3\ \mathrm{dB}}$$

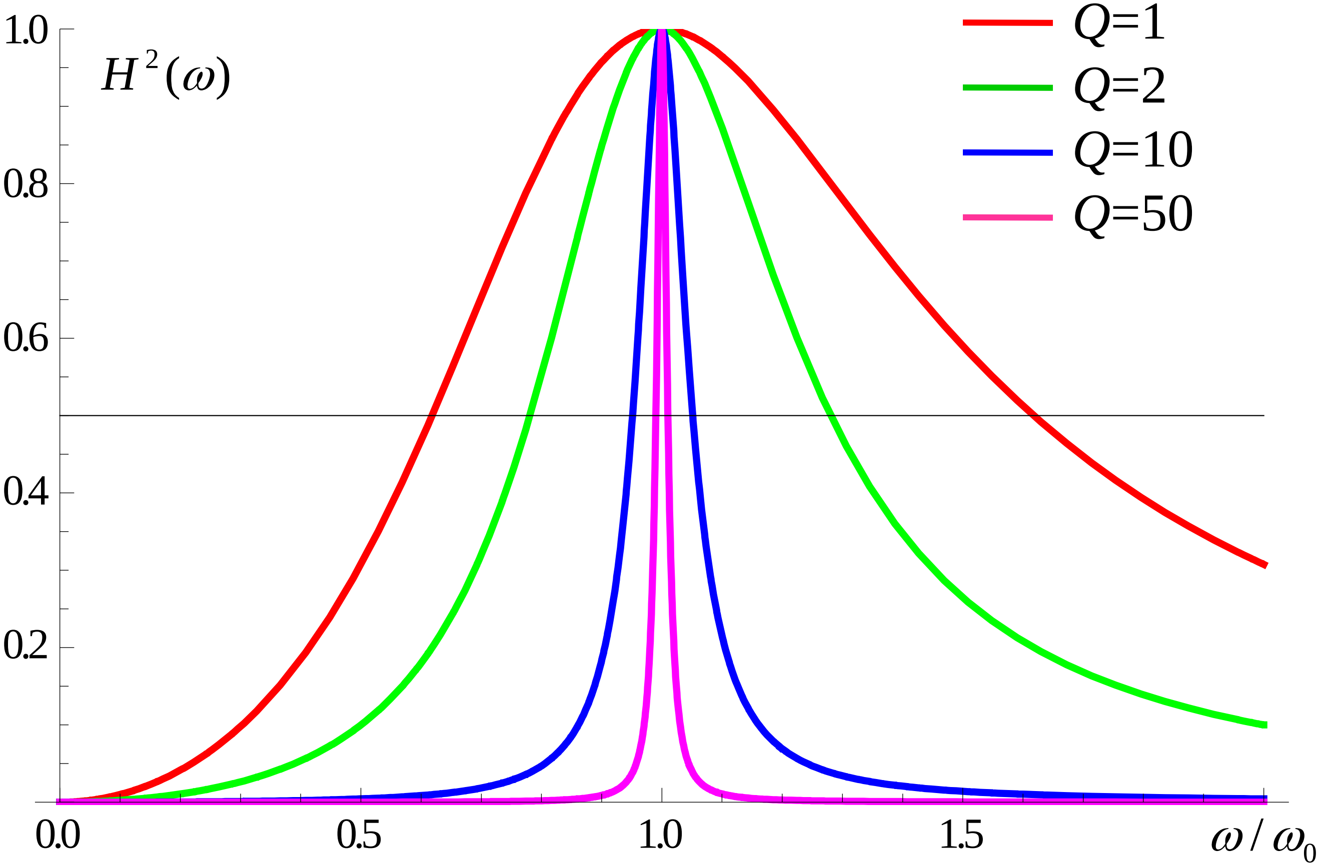


$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$= \omega_0\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

Risonanza parallelo



$$H^2(\omega) = \frac{1}{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Se $Q >> 1$ si ha:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

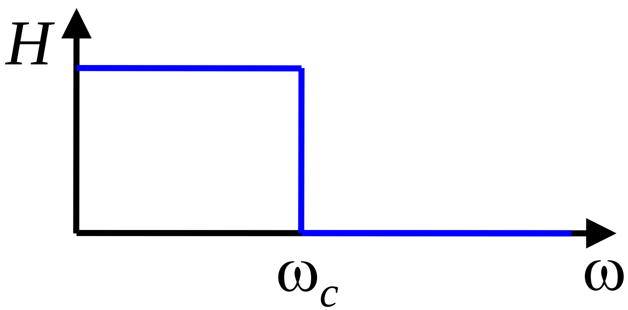
$$\approx \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right) = \omega_0 \pm \frac{B}{2}$$

Filtri

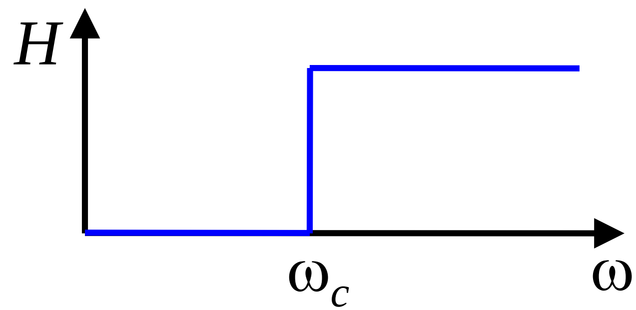
Un filtro è un circuito progettato per lasciar passare i segnali alle frequenze desiderate e per bloccare o attenuare quelli alle altre frequenze

Filtri

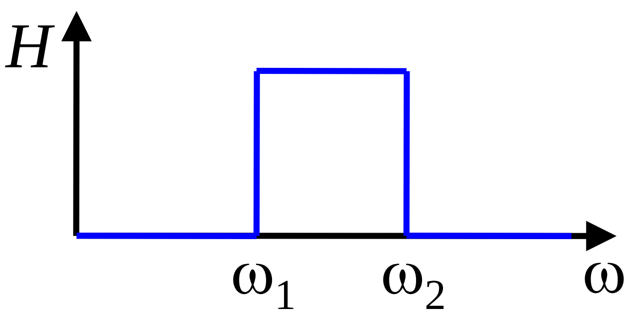
Di norma si distinguono quattro tipologie di circuiti filtranti, in base alla funzione di trasferimento ideale che devono realizzare:



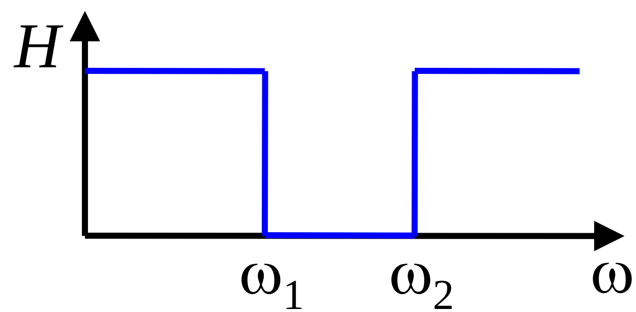
Filtro passa basso



Filtro passa alto



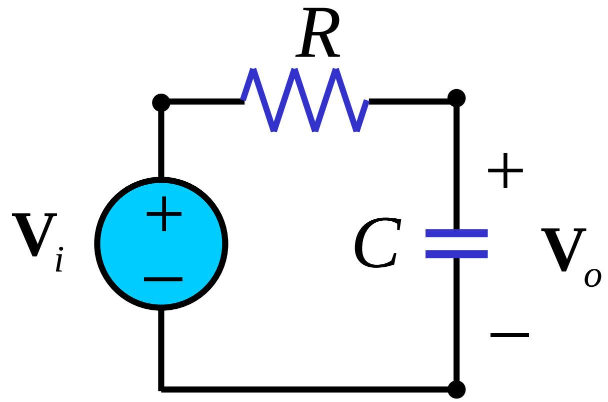
Filtro passa banda

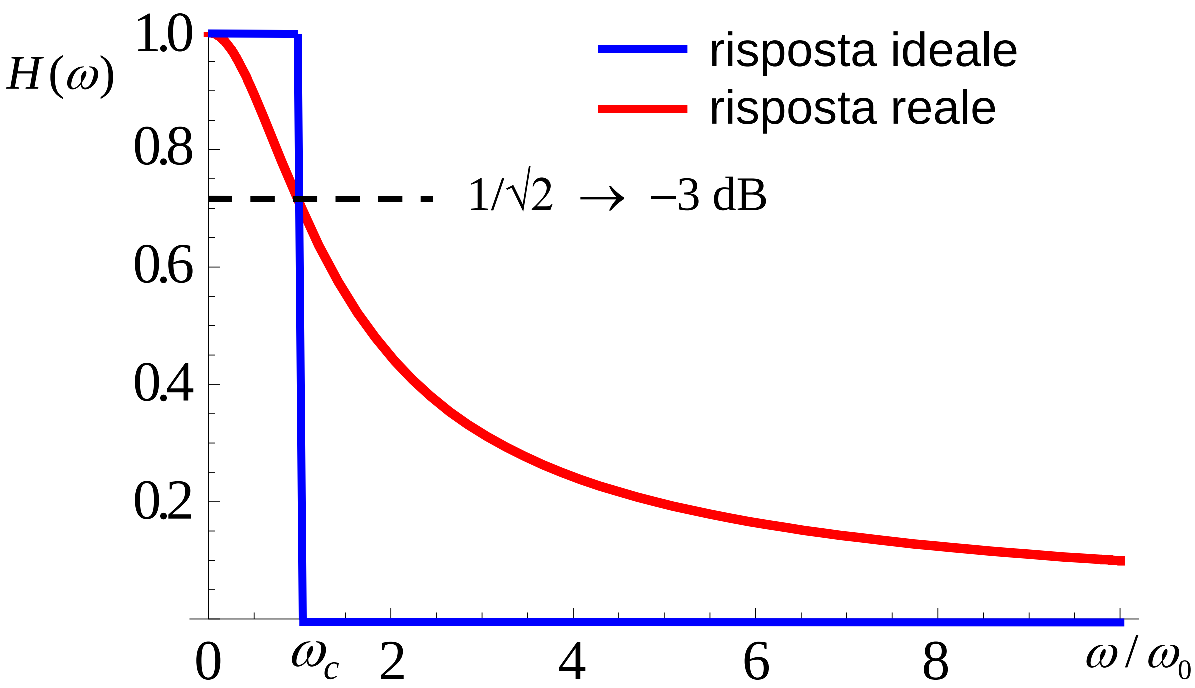


Filtro arresta banda

Filtri

Esempio di filtro passa basso:



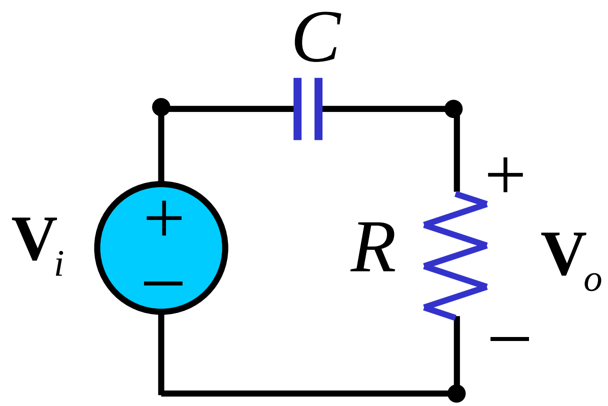


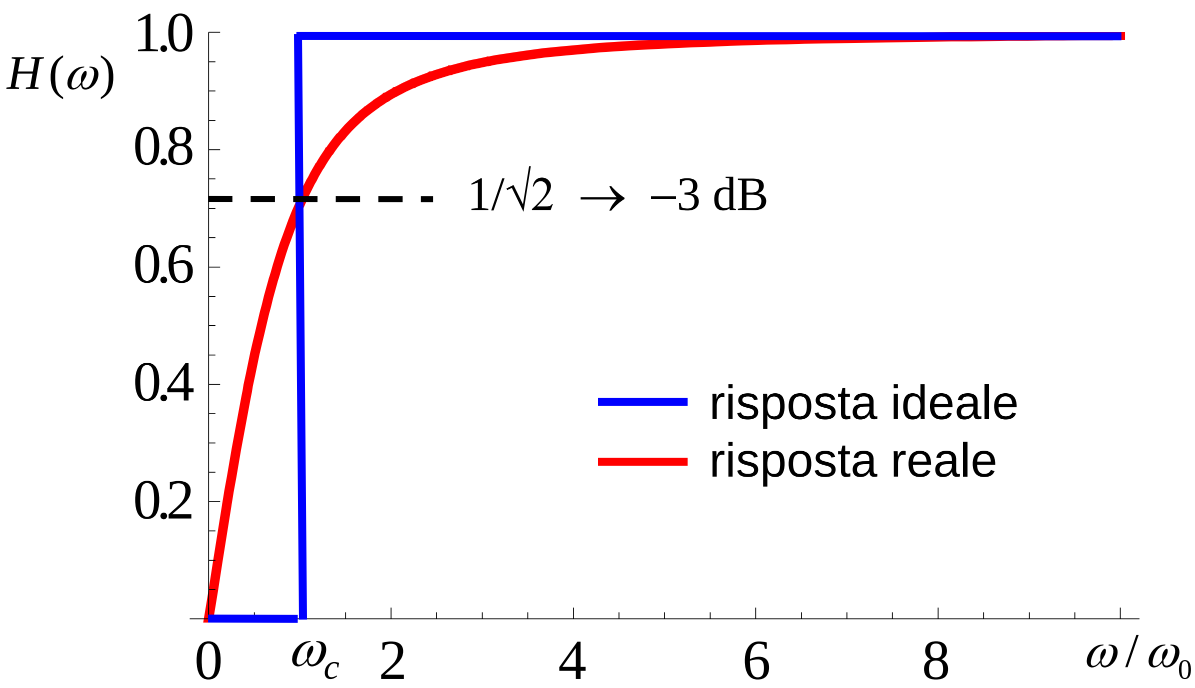
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Filtri

Esempio di filtro passa alto:



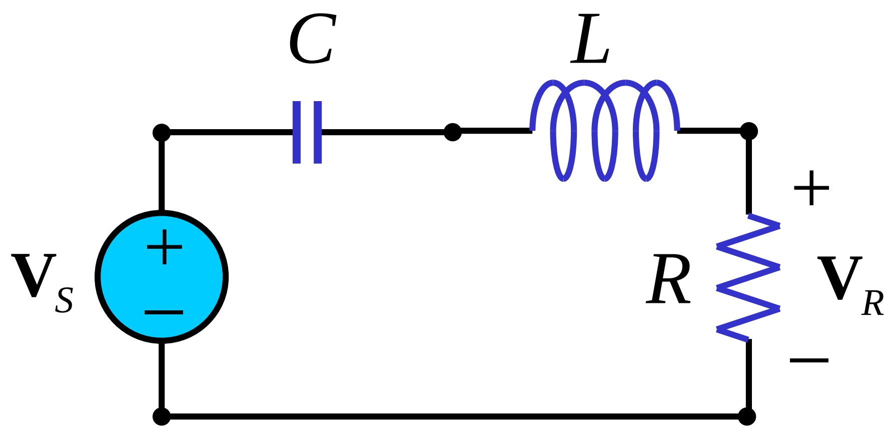


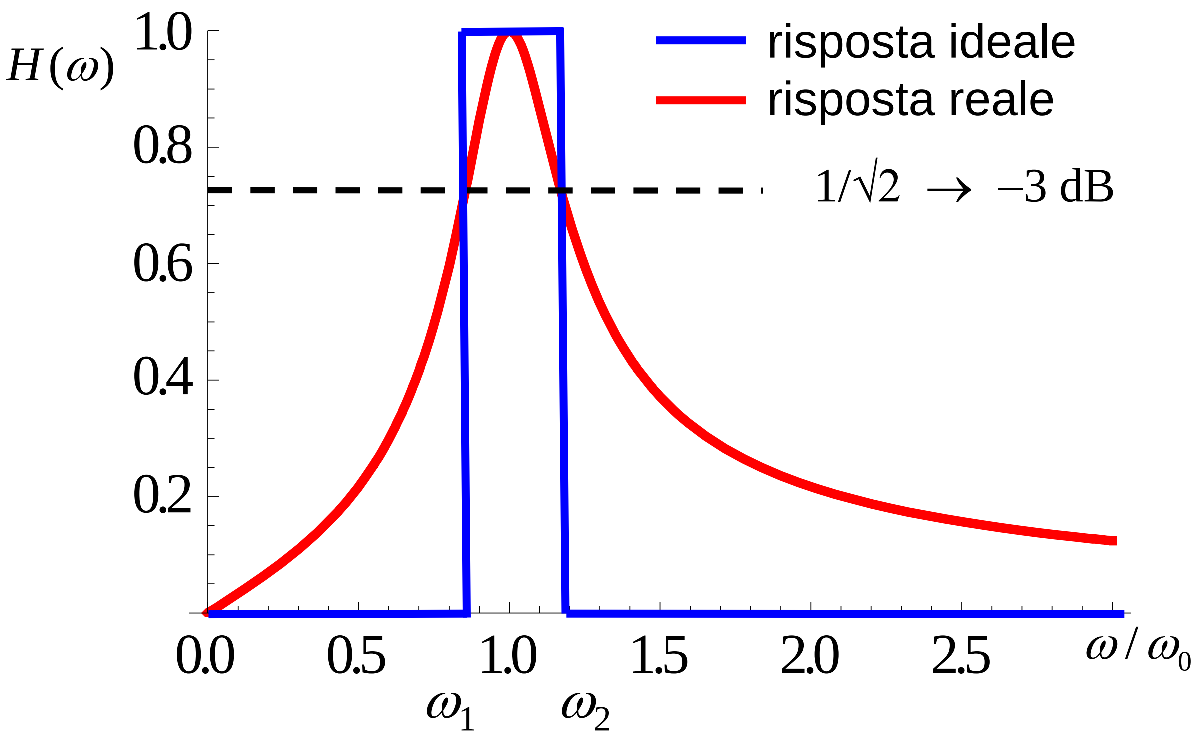
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Filtri

Esempio di filtro passa banda:





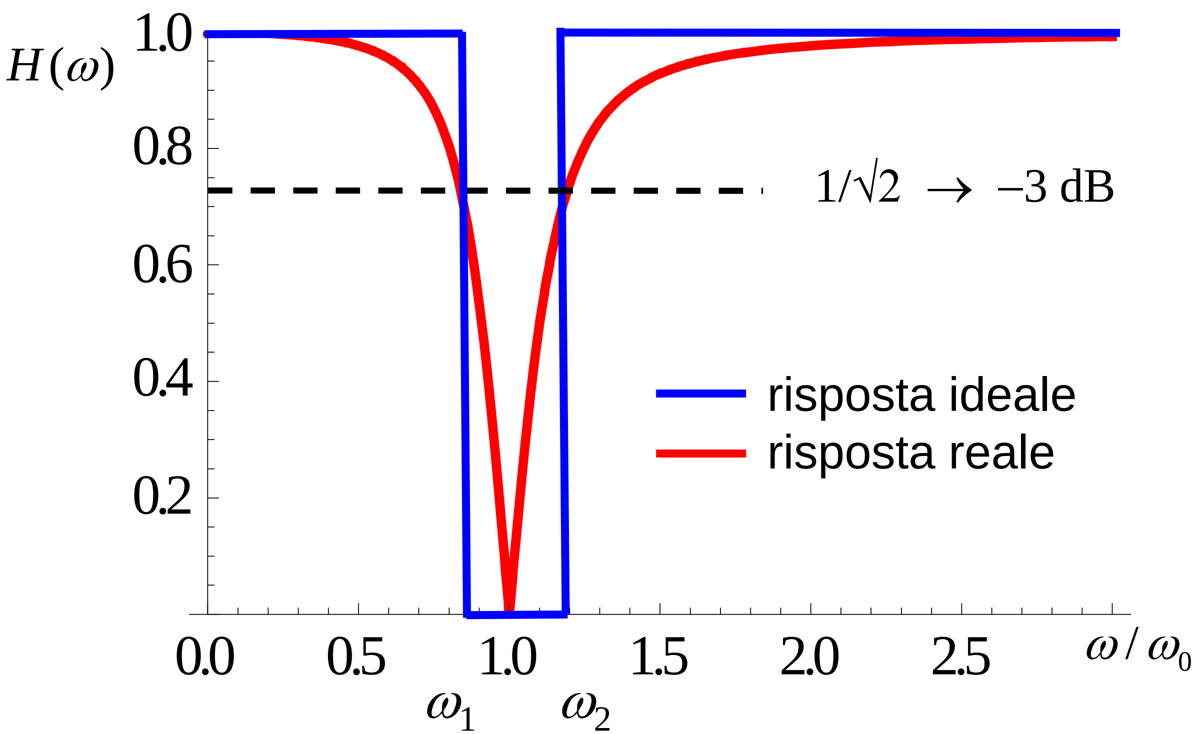
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_S} = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

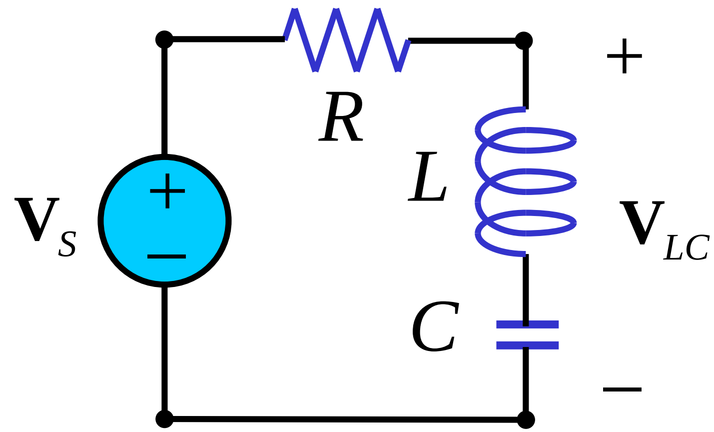
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left(1 \pm 1/(2Q)\right)$$

Filtri

Esempio di filtro arresta banda:





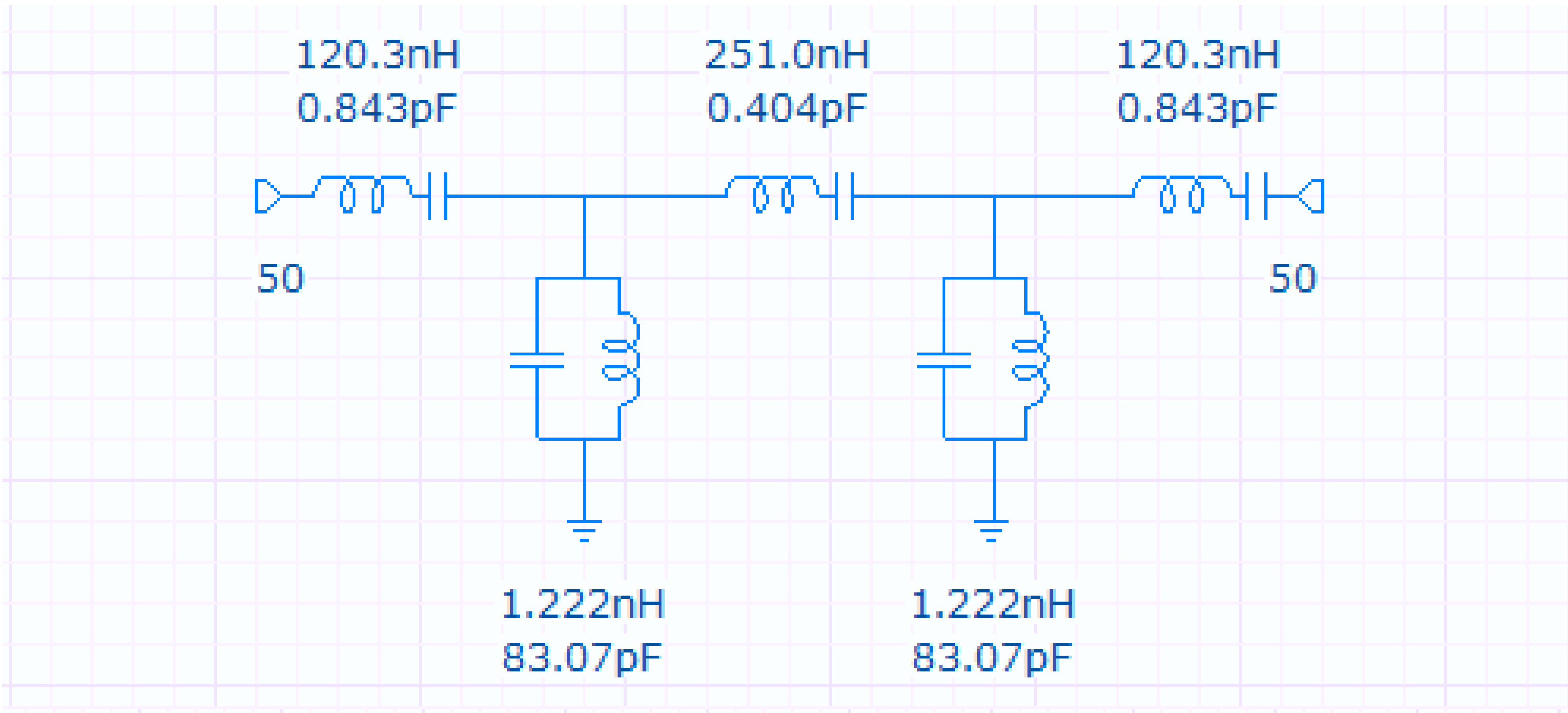
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{LC}}{\mathbf{V}_S} = \frac{jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0\left(1 \pm 1/(2Q)\right)$$

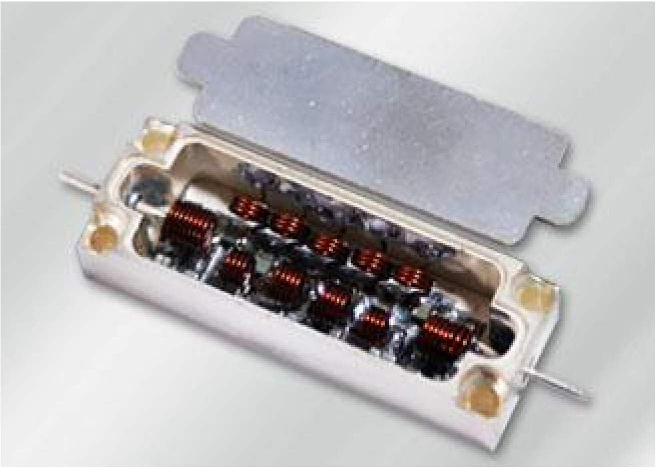
Filtri

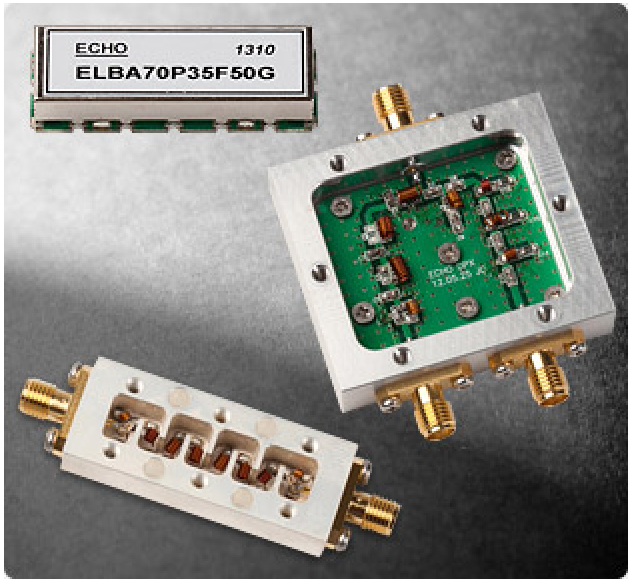
Esempio di filtro passa banda

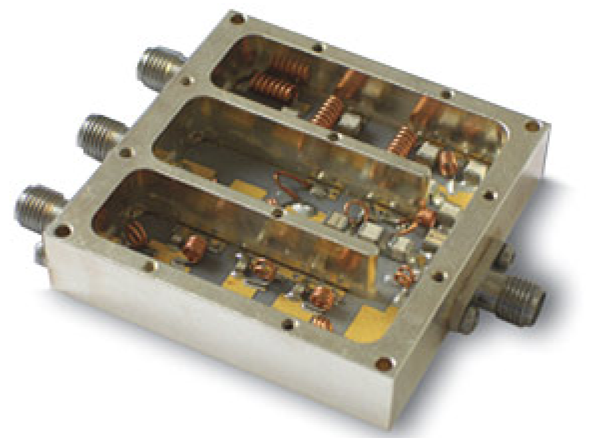


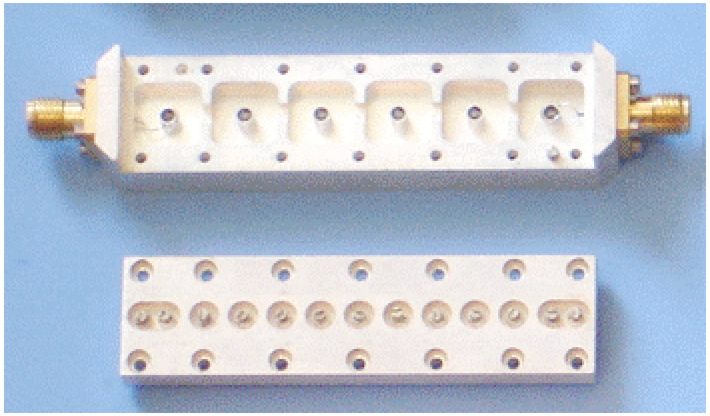
Filtri

Esempi di realizzazione



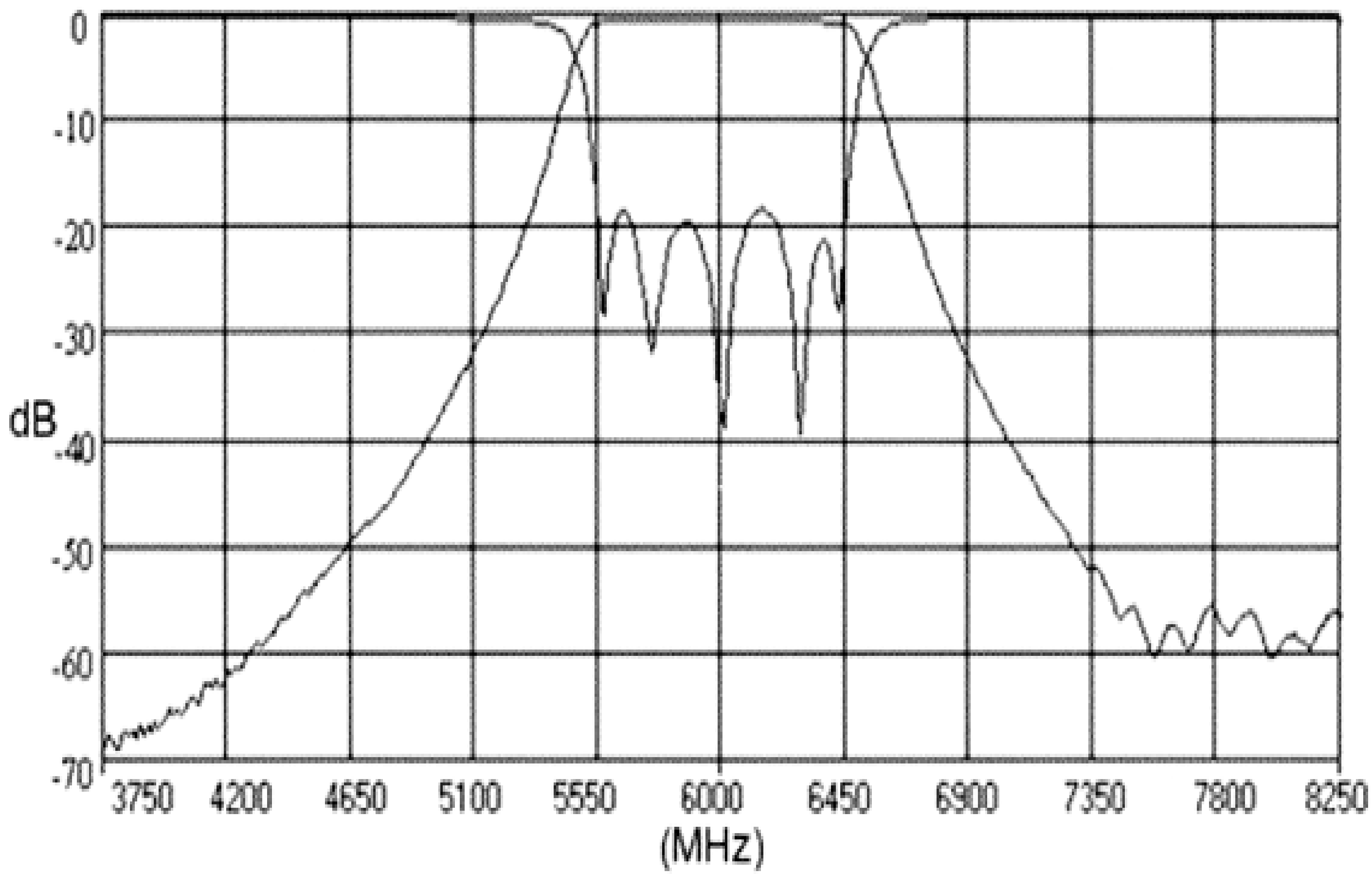






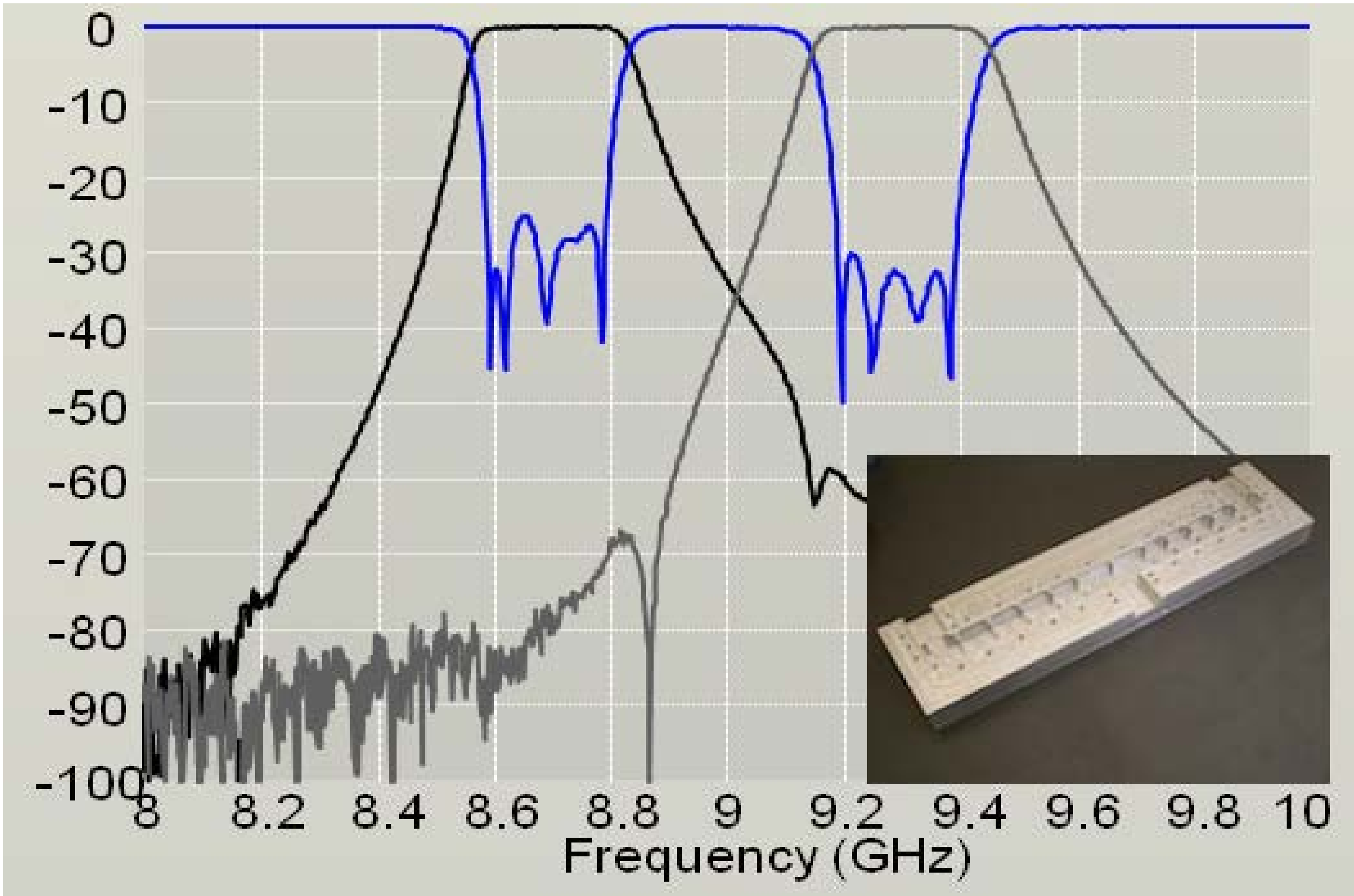
Filtri

Esempio di filtro passa banda



Filtri

Esempio di diplexer passa banda per selezione di canale



Diagrammi di Bode

In generale, la funzione di trasferimento può sempre essere posta nella forma canonica (o forma di Bode):

$$\mathbf{H}(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^{Z}(1 + j\omega / z_j)\prod_{n=1}^{N}\left[1 + 2\xi_n(j\omega/\omega_{Zn}) + (j\omega/\omega_{Zn})^2\right]}{(j\omega)^k \prod_{i=1}^{P}(1 + j\omega / p_i)\prod_{m=1}^{M}\left[1 + 2\zeta_m(j\omega/\omega_{Pm}) + (j\omega/\omega_{Pm})^2\right]}$$

dove $K,\ z_j,\ \xi_h,\ \omega_{Zn},\ p_i,\ \zeta_m,\ \omega_{Pm}$ sono tutte quantità reali

Diagrammi di Bode

$$\mathbf{H}(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^{Z}(1+j\omega/z_j)\prod_{n=1}^{N}\left[1+2\xi_n(j\omega/\omega_{Zn})+(j\omega/\omega_{Zn})^2\right]}{(j\omega)^k\prod_{i=1}^{P}(1+j\omega/p_i)\prod_{m=1}^{M}\left[1+2\zeta_m(j\omega/\omega_{Pm})+(j\omega/\omega_{Pm})^2\right]}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log_{10}|\mathbf{H}| = 20\log_{10}K - k\,20\log_{10}\omega \\ +\sum_{j=1}^{Z}10\log_{10}\left[1+(\omega/z_j)^2\right] \\ +\sum_{n=1}^{N}10\log_{10}\left[(1-(\omega/\omega_{Zn})^2)^2+4\xi_n^2(\omega/\omega_{Zn})^2\right] \\ -\sum_{i=1}^{P}10\log_{10}(1+(\omega/p_i)^2) \\ -\sum_{m=1}^{M}10\log_{10}\left[(1-(\omega/\omega_{Pm})^2)^2+4\zeta_m^2(\omega/\omega_{Pm})^2\right] \end{aligned}$$

Diagrammi di Bode

$$\mathbf{H}(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^{Z}(1+j\omega/z_j)\prod_{n=1}^{N}\left[1+2\xi_h(j\omega/\omega_{Z\,n})+(j\omega/\omega_{Z\,n})^2\right]}{(j\omega)^k\prod_{i=1}^{P}(1+j\omega/p_i)\prod_{m=1}^{M}\left[1+2\zeta_m(j\omega/\omega_{P\,m})+(j\omega/\omega_{P\,m})^2\right]}$$

Si ha:

$$\phi(\omega) = \arg|\mathbf{H}| = -k\frac{\pi}{2}$$

$$+\sum_{j=1}^{Z}\operatorname{arctg}(\omega/z_j)+\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arctg}\frac{2\xi_n(\omega/\omega_{Z\,n})}{1-(\omega/\omega_{Z\,n})^2}$$

$$-\sum_{i=1}^{P}\operatorname{arctg}(\omega/p_i)-\sum_{m=1}^{M}\operatorname{arctg}\frac{2\zeta_m(\omega/\omega_{P\,m})}{1-(\omega/\omega_{P\,m})^2}$$

Diagrammi di Bode

Per tracciare i grafici di H_{dB} e ϕ è sufficiente saper tracciare l'andamento delle seguenti funzioni e sommarle in forma grafica:

$$20\log_{10} K \qquad\qquad k\frac{\pi}{2}$$

$$k\,20\log_{10}\omega$$

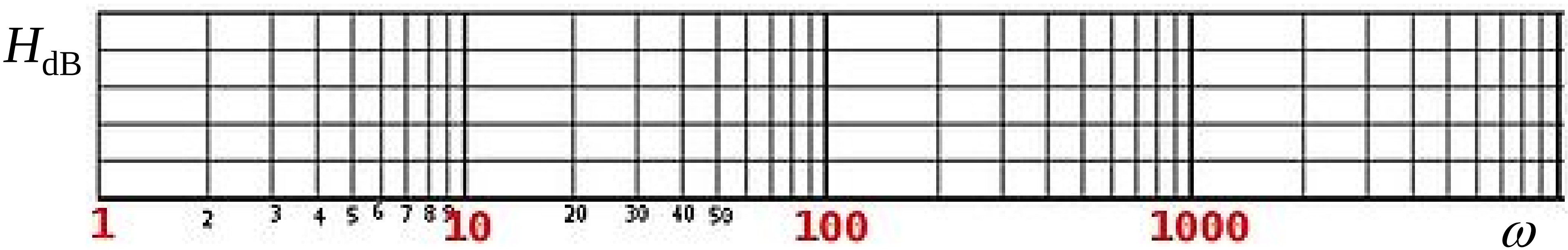
$$10\log_{10}\left[1+(\omega/\alpha)^2\right] \qquad\qquad \mathrm{arctg}(\omega/\alpha)$$

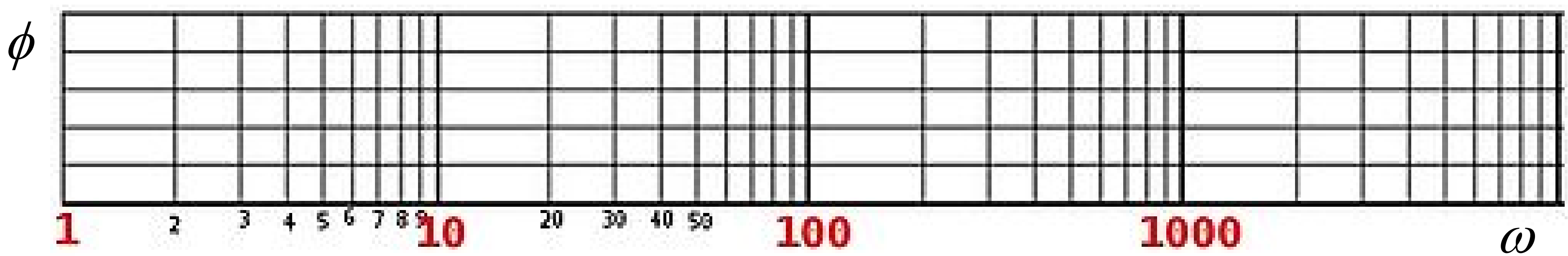
$$10\log_{10}\left[(1-(\omega/\alpha)^2)^2+\gamma^2(\omega/\alpha)^2\right] \qquad\qquad \mathrm{arctg}\frac{\gamma(\omega/\alpha)}{1-(\omega/\alpha)^2}$$

Di seguito vengono studiati separatamente gli andamenti di queste funzioni.

Diagrammi di Bode

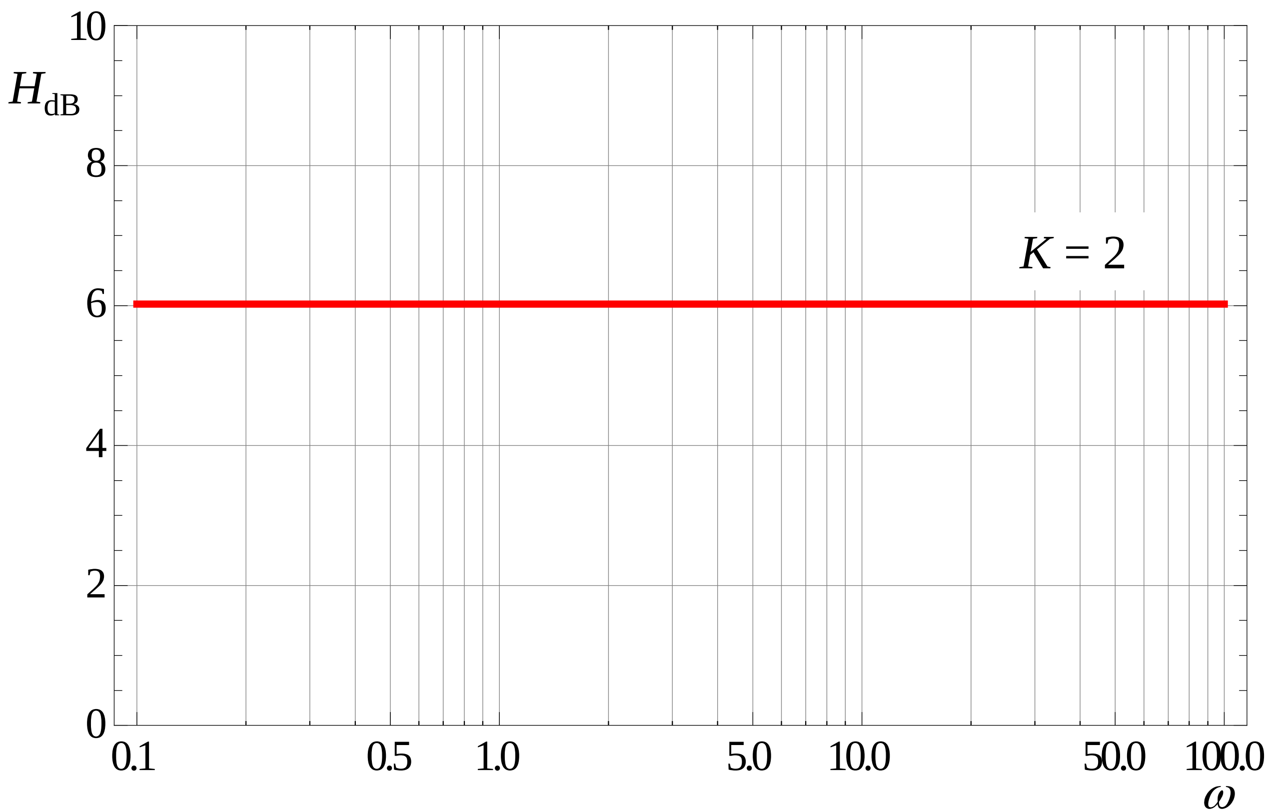
H_{dB} e ϕ vengono normalmente tracciati su un grafico di tipo semilogaritmico, in cui la scala dell'asse delle ascisse (pulsazioni ω) è logaritmica:





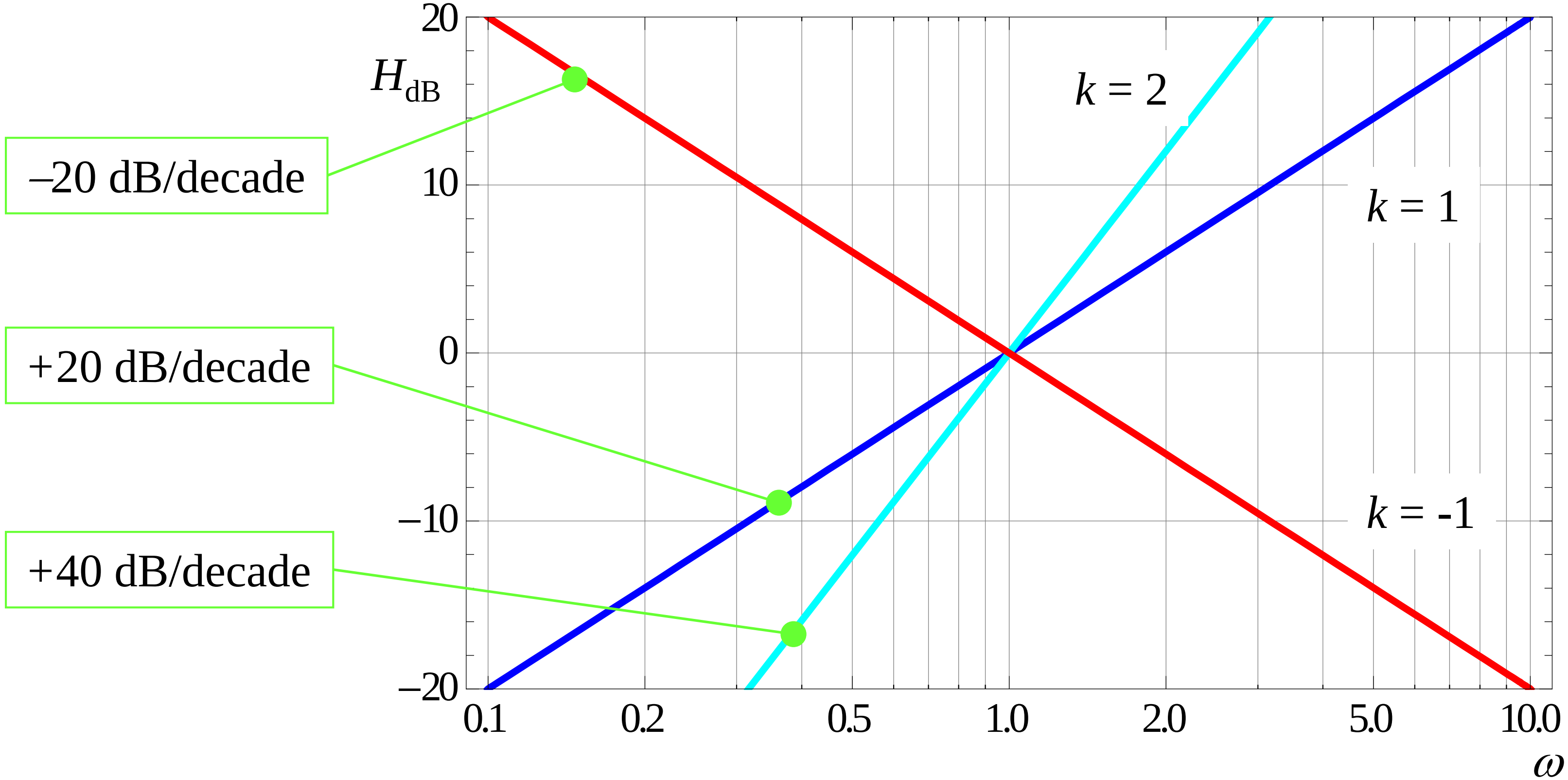
Diagrammi di Bode

$$20\log_{10} K$$



Diagrammi di Bode

$$k\,20\log_{10}\omega$$

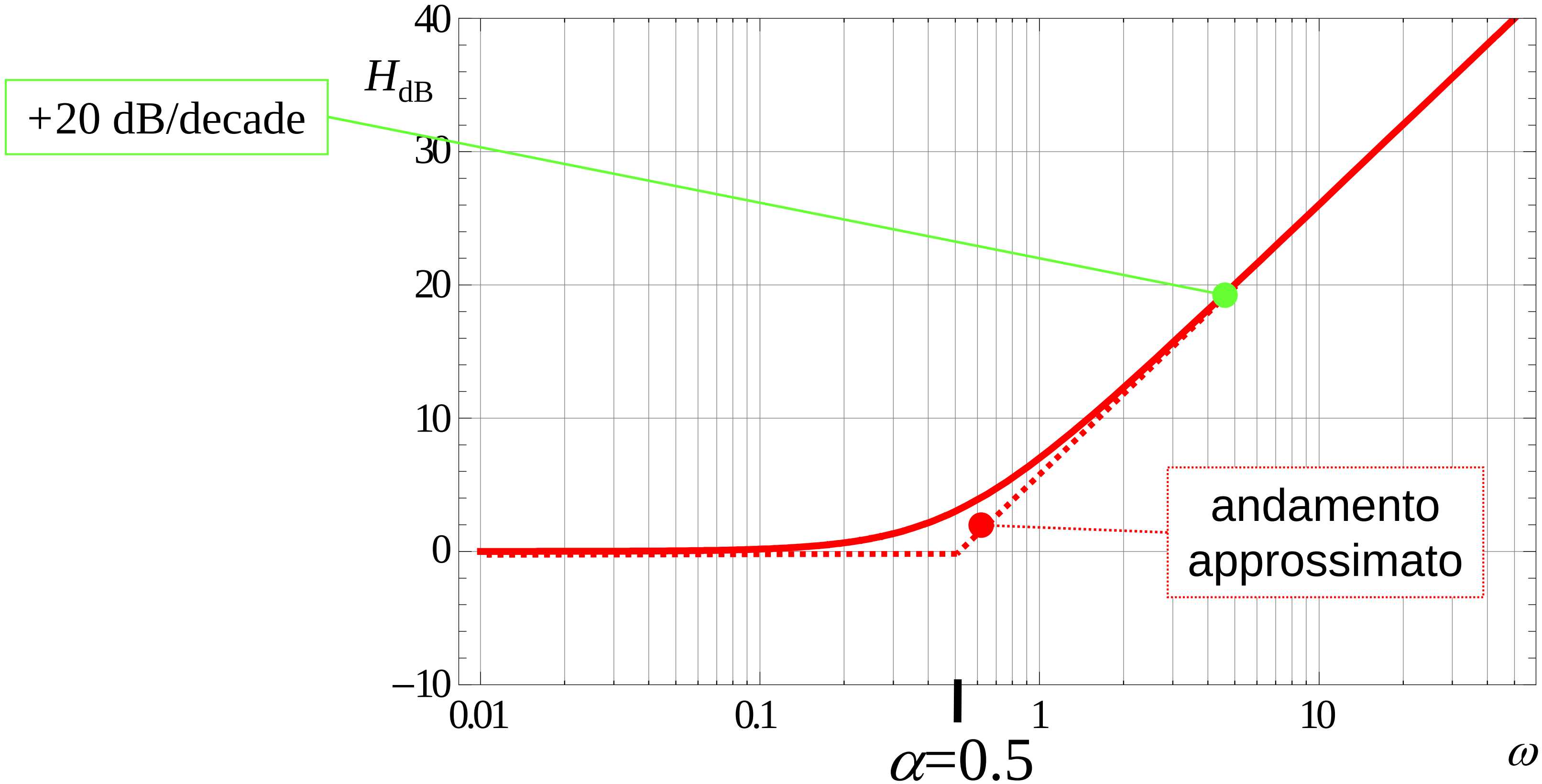


Diagrammi di Bode

$$10\log_{10}\left[1+(\omega/\alpha)^2\right]$$

$$\xrightarrow{\omega \ll \alpha} \quad 10\log_{10}[1]=0$$

$$\xrightarrow{\omega \gg \alpha} \quad 10\log_{10}\left[(\omega/\alpha)^2\right]=20\log_{10}[\omega/\alpha]$$

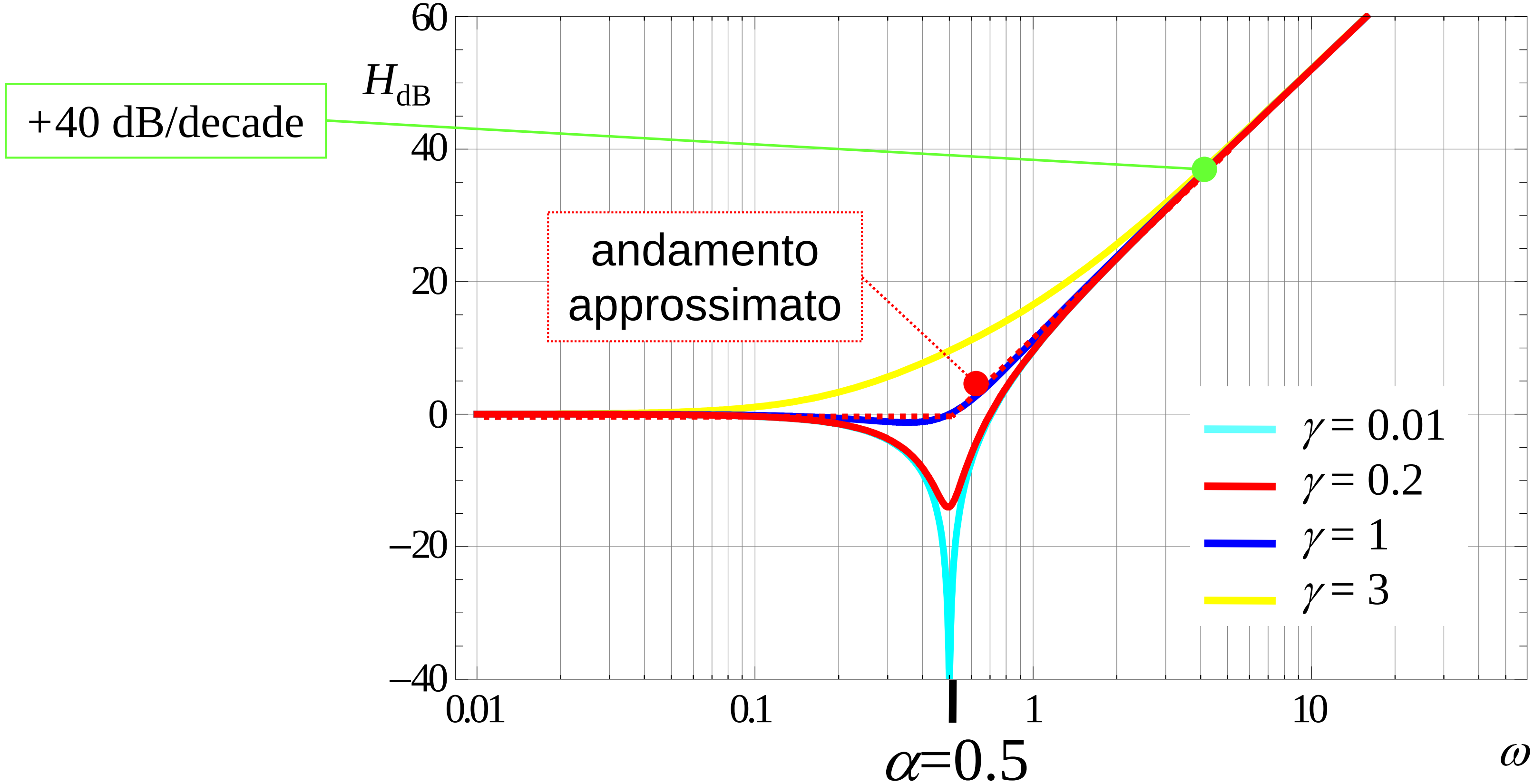


Diagrammi di Bode

$$10\log_{10}\left[(1-(\omega/\alpha)^2)^2+\gamma^2(\omega/\alpha)^2\right]$$

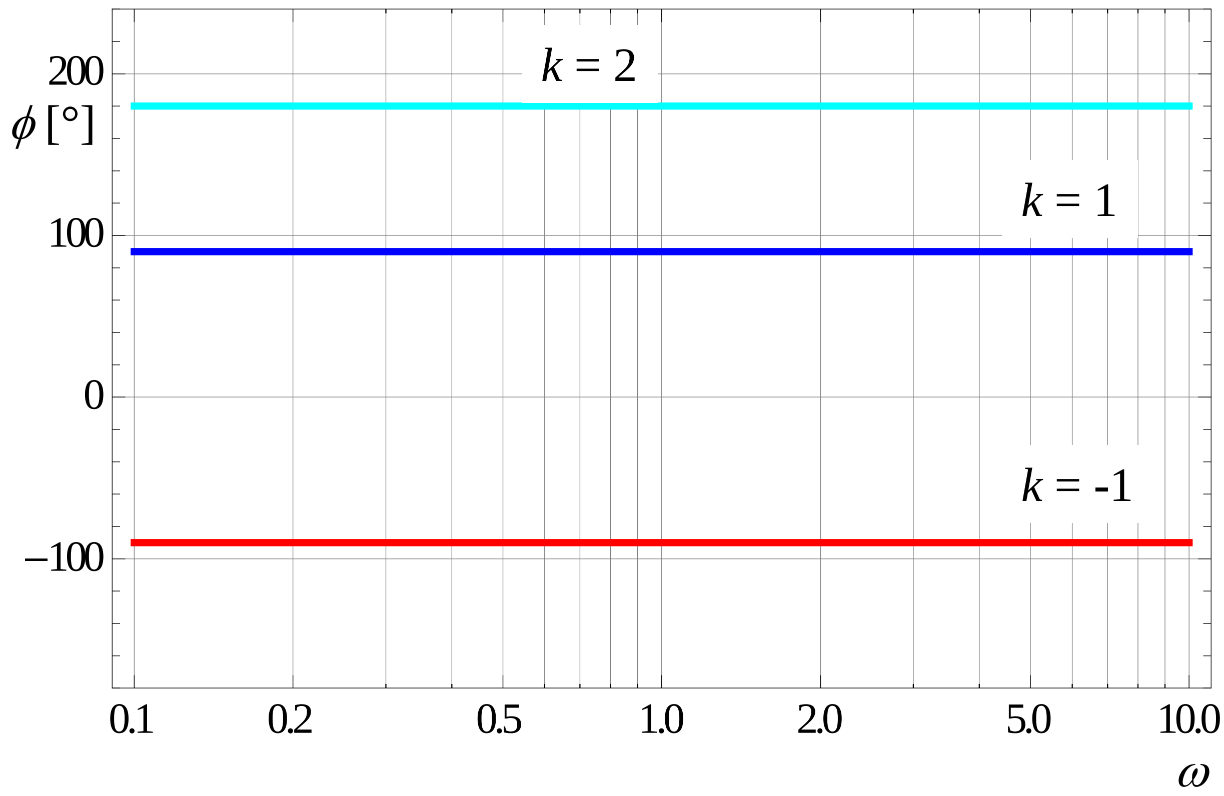
$$\xrightarrow{\omega \ll \alpha} \quad 10\log_{10}[1]=0$$

$$\xrightarrow{\omega \gg \alpha} \quad 10\log_{10}\left[(\omega/\alpha)^4\right]=40\log_{10}[\omega/\alpha]$$



Diagrammi di Bode

$$k\frac{\pi}{2}$$

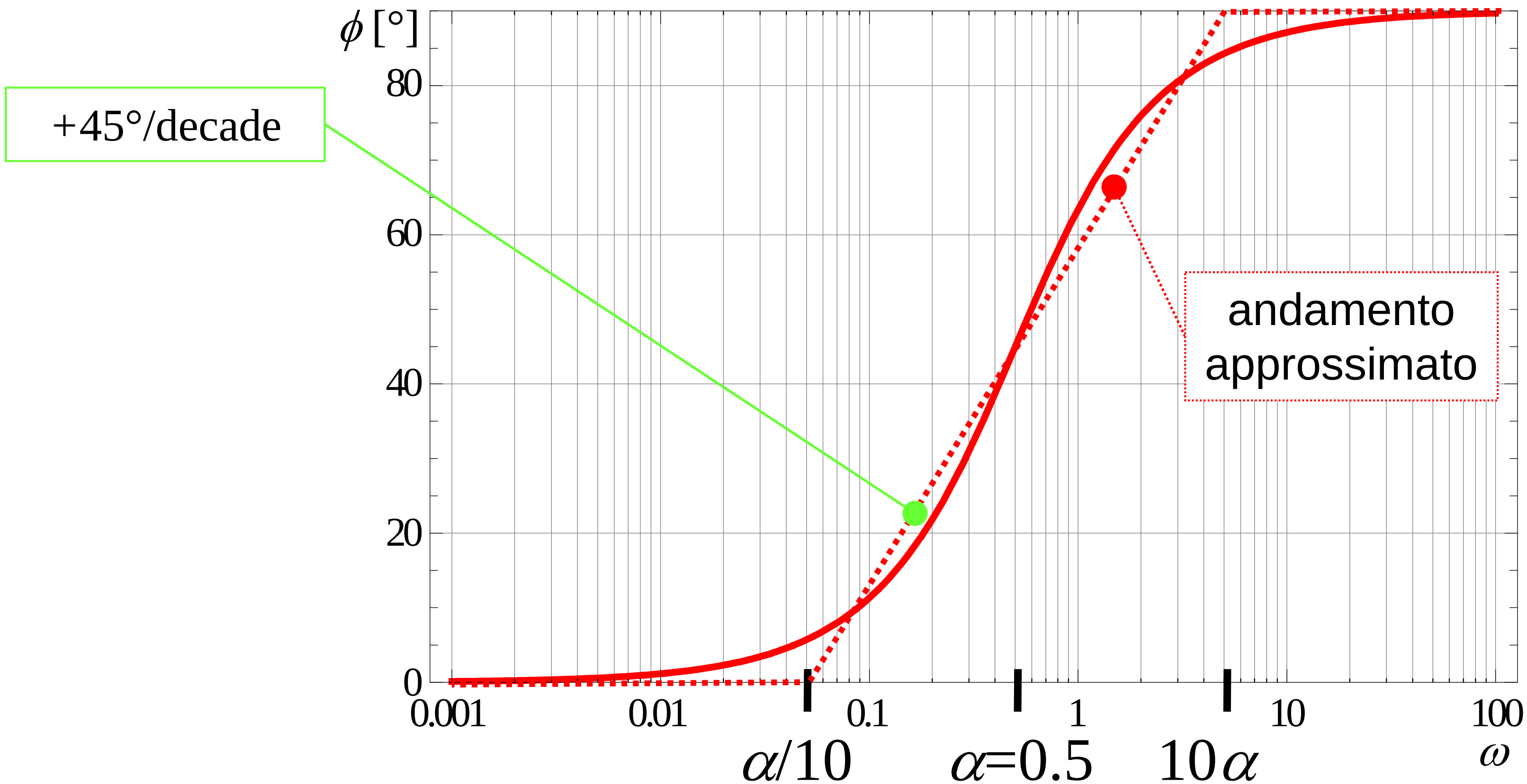


Diagrammi di Bode

$$\text{arctg}(\omega/\alpha)$$

$$\xrightarrow{\omega \ll \alpha} \quad \text{arctg}[0] = 0$$

$$\xrightarrow{\omega \gg \alpha} \quad \text{arctg}[\infty] = 90°$$

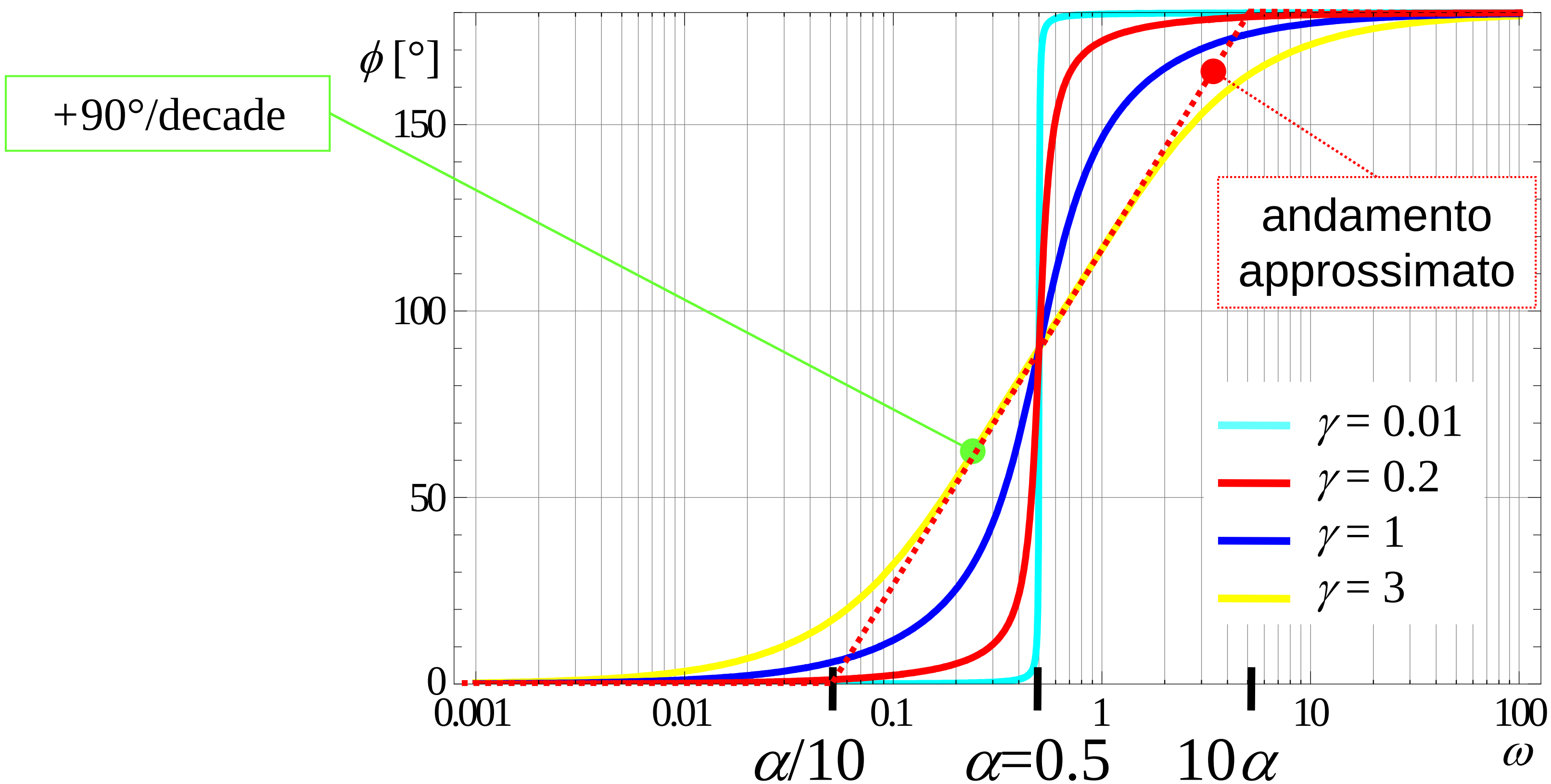


Diagrammi di Bode

$$\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma(\omega/\alpha)}{1-(\omega/\alpha)^2}$$

$$\xrightarrow{\omega \ll \alpha} \quad \mathrm{arctg}[0] = 0$$

$$\xrightarrow{\omega \gg \alpha} \quad 180° - \mathrm{arctg}[0] = 180°$$



Diagrammi di Bode

Esempio: $\mathbf{H}(\omega) = \dfrac{\boxed{K}\;\boxed{j\omega}\;\boxed{(1+j\omega/z_1)^2}}{\boxed{(1+j\omega/p_1)}\;\boxed{(1+j\omega/p_2)^2}\;\boxed{\left[1+2\zeta_3(j\omega/p_3)+(j\omega/p_3)^2\right]}}$

$K = 10$

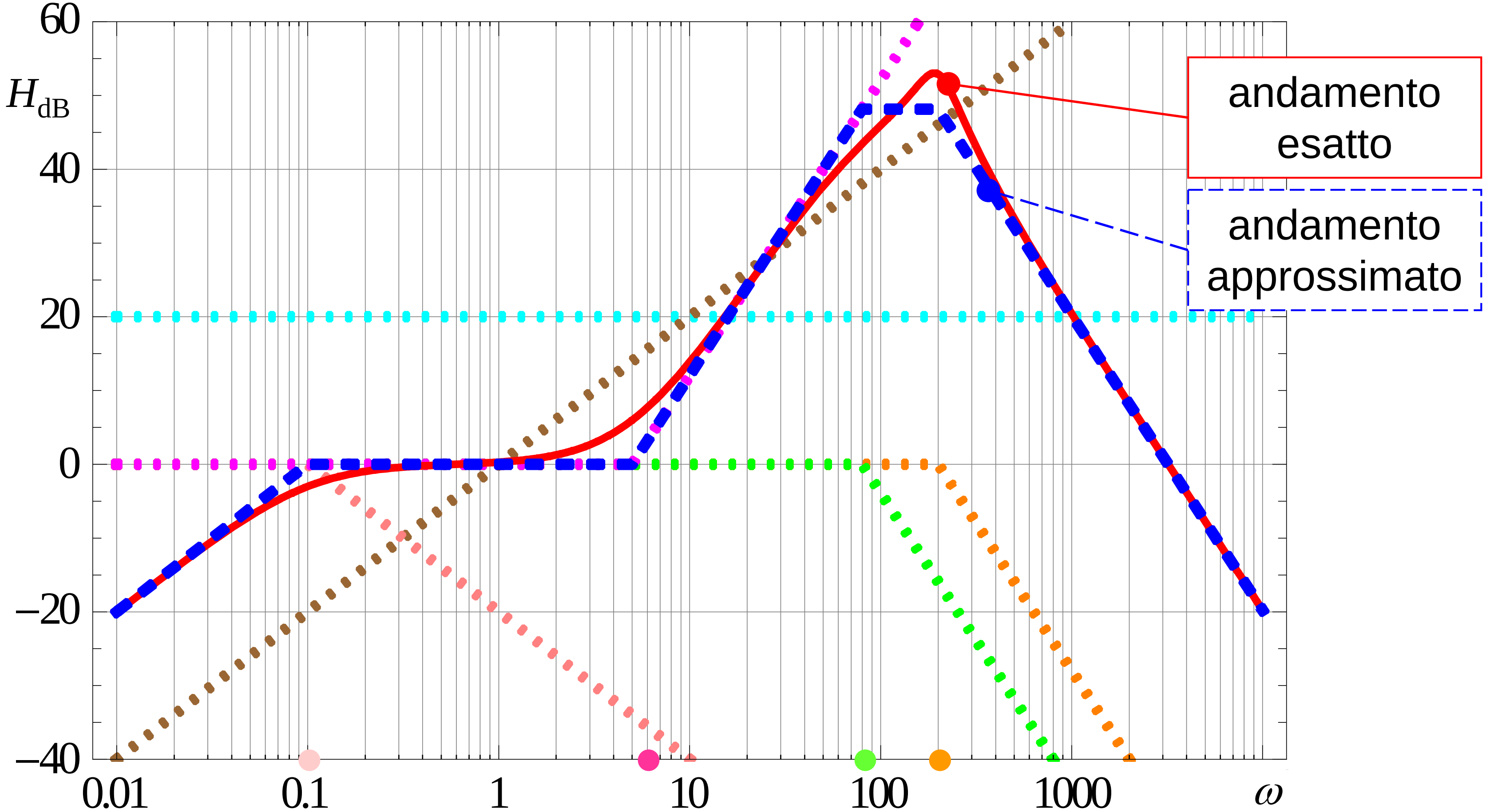
$z_1 = 5$

$p_1 = 0.1$

$p_2 = 80$

$p_3 = 200$

$\zeta_1 = 0.5$



Diagrammi di Bode

Esempio: $$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K \; j\omega \; (1 + j\omega/z_1)^2}{(1 + j\omega/p_1)\,(1 + j\omega/p_2)^2\,\left[1 + 2\zeta_3(j\omega/p_3) + (j\omega/p_3)^2\right]}$$

$K = 10$
$z_1 = 5$
$p_1 = 0.1$
$p_2 = 80$
$p_3 = 200$
$\zeta_3 = 0.5$