

Propagazione nelle fibre ottiche

Appunti dal Corso di Complementi di Campi Elettromagnetici

Fac. di Ingegneria, Università di Pavia, a.a. 2003-2004

La teoria delle guide dielettriche può essere usata per trattare le fibre ottiche “a salto d’indice”. La Fig. 1 rappresenta un a fibra circolare di questo tipo, costituita da un nucleo di indice di rifrazione n_1 e raggio a e da un mantello indice di rifrazione n_2 ($< n_1$) e di raggio molto maggiore. Le comuni fibre sono realizzate in un vetro a base di Silice, il cui indice di rifrazione viene aggiustato al valore desiderato mediante drogaggio. Dentro la fibra si possono propagare uno o più modi guidati, che si attenuano radialmente all’interno del mantello. Le dimensioni del mantello sono tali da poter assumere che il campo alla sua periferia sia praticamente nullo. Grazie a questo fatto la dimensione finita del mantello ha influenza trascurabile sulla propagazione dei modi, che possono essere studiati come in una guida dielettrica circolare di raggio a e indice di rifrazione n_1 circondata da un mezzo illimitato, di indice di rifrazione n_2 .

Si distinguono fibre *multimodo* e fibre *monomodo* in cui, alla lunghezza d’onda di lavoro ($\lambda_0 = 2\pi/k_0$), si possono propagare diversi modi o un solo modo, rispettivamente. Nelle fibre multimodo il diametro del nucleo è normalizzato a $50 \mu\text{m}$, in quelle monomodo è di pochi micron.

L’indice di rifrazione del mantello è solo leggermente minore di quello del nucleo (ordine di qualche per cento nelle fibre multimodo, e di qualche per mille in quelle monomodo), così che la costante di fase dei modi guidati è compresa in uno stretto intervallo ($k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$), ed è prossima a quella delle onde piane uniformi, sia nel materiale che costituisce il nucleo, sia in quello che costituisce il mantello.

I. APPROSSIMAZIONI CONSEGUENTI ALLA PROSSIMITÀ DEGLI INDICI DI RIFRAZIONE

A causa della prossimità degli indici di rifrazione si ha

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \ll 1$$

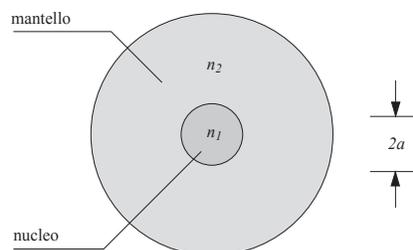


Fig. 1. Fibra ottica circolare a salto d’indice.

Pertanto nelle equazioni caratteristiche dei modi guidati si può porre $\Delta \approx 0$, ottenendo così le seguenti equazioni semplificate

$$\frac{\dot{J}_m(ua)}{uJ_m(ua)} = -\frac{\dot{K}_m(va)}{vK_m(va)} + m\frac{u^2 + v^2}{au^2v^2} \quad \text{modi EH}_{mn} \text{ (e modi TM}_n\text{, nel caso } m = 0) \quad (1)$$

$$\frac{\dot{J}_m(ua)}{uJ_m(ua)} = -\frac{\dot{K}_m(va)}{vK_m(va)} - m\frac{u^2 + v^2}{au^2v^2} \quad \text{modi HE}_{mn} \text{ (e modi TE}_n\text{, nel caso } m = 0) \quad (2)$$

Se $m = 0$ (modi TE o TM), le equazioni caratteristiche semplificate divengono identiche. Pertanto, nei limiti dell'approssimazione fatta, i modi TE_n e TM_n hanno la stessa costante di fase alla stessa frequenza (modi quasi-degeneri).

Utilizzando due identità che intercorrono fra le funzioni di Bessel e le loro derivate¹, le equazioni caratteristiche si riscrivono nella seguente più semplice forma:

$$\frac{J_{m+1}(ua)}{uJ_m(ua)} + \frac{K_{m+1}(va)}{vK_m(va)} = 0 \quad \text{modi EH}_{mn} \quad (3)$$

$$\frac{J_{m-1}(ua)}{uJ_m(ua)} - \frac{K_{m-1}(va)}{vK_m(va)} = 0 \quad \text{modi HE}_{mn} \quad (4)$$

Poiché le due equazioni sono diverse, i modi EH e HE con uguali indici *non* sono degeneri, nemmeno approssimativamente. Una quasi-degenerazione si ha invece fra i modi $\text{EH}_{m-1,n}$ e $\text{HE}_{m+1,n}$, con $m = 2, 3, \dots$. Infatti le equazioni caratteristiche dei due tipi di modo sono

$$\frac{J_m(ua)}{uJ_{m-1}(ua)} + \frac{K_m(va)}{vK_{m-1}(va)} = 0 \quad \text{modi EH}_{m-1,n} \quad (m = 2, 3, \dots) \quad (5)$$

$$\frac{J_m(ua)}{uJ_{m+1}(ua)} - \frac{K_m(va)}{vK_{m+1}(va)} = 0 \quad \text{modi HE}_{m+1,n} \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (6)$$

e tali equazioni sono identiche, come si mostra facilmente utilizzando le formule ricorrenti (v. nota 1)

$$J_{m+1}(ua) = \frac{2m}{ua}J_m(ua) - J_{m-1}(ua) \quad K_{m+1}(ua) = \frac{2m}{ua}K_m(ua) + K_{m-1}(ua) \quad (7)$$

Un'altra proprietà dei modi, nel caso $\Delta \approx 0$, consiste nel fatto che *entrambe* le componenti longitudinali, E_z e H_z , sono trascurabili rispetto a quelle trasversali. Pertanto tutti modi sono “quasi-TEM”².

¹Valgono le seguenti identità

$$J_m(x) = \pm \left(\frac{mJ_m(x)}{x} - J_{m\pm 1}(x) \right) \quad \dot{K}_m(x) = \pm \frac{mK_m(x)}{x} - K_{m\pm 1}(x)$$

Quelle con il segno superiore vengono utilizzate per trasformare la (1), quelle con il segno inferiore per trasformare la (2), rispettivamente. Uguagliando le espressioni con i due segni si ottengono le formule ricorrenti utilizzate per scrivere le (7).

²Per le espressioni delle varie componenti del campo si veda, per esempio, i Par. 9.6.3 e 9.6.4 del testo: P. Bassi, G. Bellanca, G. Tartarini, “Propagazione ottica libera e guidata”, CLUEB, 1999. Si richiama l'attenzione sul fatto che, in tale testo, i simboli u e v corrispondono ai nostri ua e va .

II. MODI LP

E' ben noto che una combinazione lineare di modi degeneri è ancora un modo, che si propaga con la stessa costante di fase dei modi originari. Si può quindi pensare di combinare i modi quasi-degeneri $\text{EH}_{m-1,n}$ e $\text{HE}_{m+1,n}$ (con $m > 0$), ottenendo, approssimativamente, un nuovo modo. Questa possibilità è interessante perché, combinando opportunamente i modi delle coppie suddette, è possibile ottenere onde polarizzate linearmente, in direzione ortogonali³. Le onde risultanti dalla combinazione sono i cosiddetti modi LP (*linearly polarized*), più precisamente "pseudo-modi", dato che la degenerazione è imperfetta. Il modo ottenuto combinando i modi $\text{EH}_{m-1,n}$ e $\text{HE}_{m+1,n}$ viene indicato con la sigla LP_{mn} .

I modi HE_{1n} (fra questi, il modo dominante HE_{11} della guida dielettrica a sezione circolare) non sono degeneri con altri modi ($\text{EH}_{-1,n}$ non esiste!). Ciascuno di essi, però, esiste sotto due forme degeneri, come del resto tutti gli altri modi asimmetrici. Si può mostrare che, anche in questo caso, combinando opportunamente tali modi, si ottiene una nuova coppia di modi degeneri, polarizzati linearmente in direzioni ortogonali. Tali modi vengono indicati con la sigla LP_{0n} .

La forma dei campi trasversali dei modi LP_{mn} è molto semplice. Considerando quelli polarizzati nella direzione $\hat{\mathbf{y}}$ si ha

$$\mathbf{E}_{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{y}} E_0 e^{-j\beta z} \cos m\varphi \begin{cases} \frac{J_m(ur)}{J_m(ua)} & \text{per } r \leq a \\ \frac{K_m(vr)}{K_m(va)} & \text{per } r > a \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{T}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\mathbf{T}}}{\eta_0/n_1} \quad (9)$$

dove E_0 rappresenta l'intensità del campo elettrico alla periferia del nucleo, e dove β è la n -esima soluzione dell'equazione caratteristica (6), che è

$$\frac{J_m(ua)}{uJ_{m+1}(ua)} - \frac{K_m(va)}{vK_{m+1}(va)} = 0 \quad \text{equazione caratteristica dei modi } \text{LP}_{mn} \quad (10)$$

in cui

$$u = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad v = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}$$

Le componenti longitudinali del campo sono trascurabili, poiché, come si è detto, nell'approssimazione $\Delta \approx 0$ i modi sono quasi TEM. Si noti che, la relazione esistente fra $\mathbf{H}_{\mathbf{t}}$ ed $\mathbf{E}_{\mathbf{t}}$ è proprio quella tipica le onde TEM ($\eta/n_1 \approx \eta/n_2$ è l'impedenza caratteristica del mezzo).

I diagrammi di dispersione possono essere ottenuti in forma normalizzata introducendo le quantità

$$w = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = a \sqrt{u^2 + v^2} \quad b = \frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)} = \frac{v^2}{u^2 + v^2} \quad (0 < b < 1)$$

Infatti, come si verifica immediatamente, si ha

$$ua = w\sqrt{1-b} \quad va = w\sqrt{b}$$

³Per i dettagli si veda P. Bassi et al, op. cit.

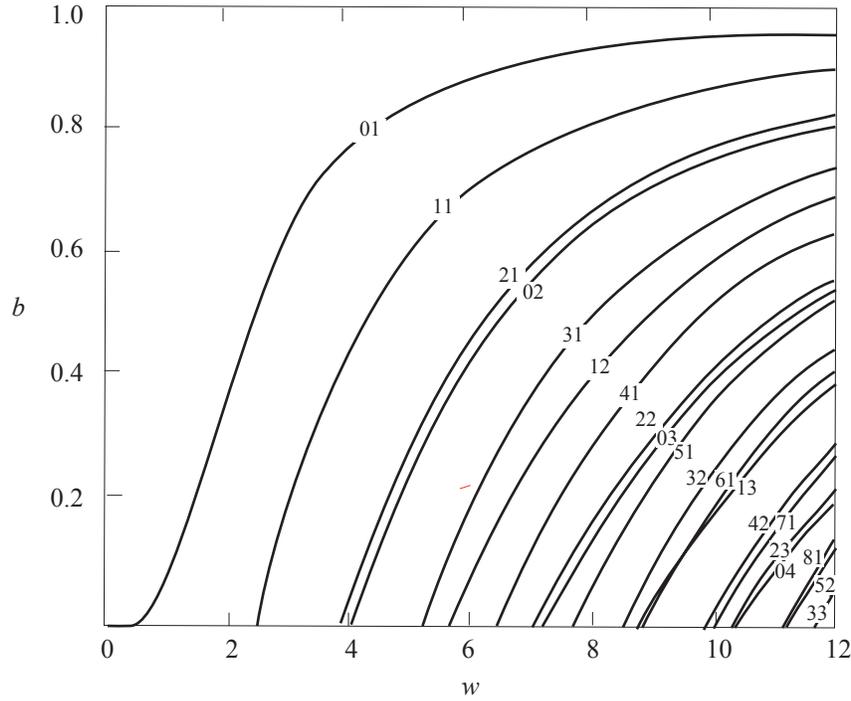


Fig. 2. Diagramma di dispersione normalizzato per i primi venti modi della fibra circolare a salto d'indice.

cosicchè, introducendo queste espressioni nella (10), l'equazione caratteristica viene trasformata in una relazione fra b e w , in cui non figurano più né il raggio del nucleo, né gl'indici di rifrazione. Risolvendo tale equazione per vari valori di m si ottengono i diagrammi di dispersione normalizzati riportati nella Fig. 2.

Si osserva che

$$\beta = \sqrt{k_0^2 n_2^2 + v^2} = \sqrt{k_0^2 n_2^2 + \frac{bw^2}{a^2}} = k_0 n_2 \sqrt{1 + 2b\Delta \frac{n_1^2}{n_2^2}} \approx k_0 n_2 (1 + b\Delta)$$

dato che $n_1/n_2 \approx 1$ e $\Delta \ll 1$. Pertanto, considerata una certa frequenza e calcolato il corrispondente valore di w , si legge sul diagramma il valore di b corrispondente al modo che interessa; tale valore, introdotto nell'ultima delle precedenti espressioni, permette di ricavare la costante di fase del modo alla frequenza considerata.

Si dimostra che i modi LP sono ortogonali, nel senso che considerando i campi \mathbf{E}' e \mathbf{E}'' di due modi distinti, risulta sempre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{E}'_{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E}''_{\mathbf{T}} r d\varphi dr = 0 \quad (11)$$

III. POTENZA E FATTORE DI CONFINAMENTO DEI MODI LP

Le espressioni (8) e (9) permettono di determinare il vettore di Poynting ($\mathbf{S} = \hat{\mathbf{z}}|\mathbf{E}_{\mathbf{T}}|^2/2(\eta_0/n_1)$) nel nucleo e nel mantello. Pertanto, si possono determinare le potenze trasmessa da un modo, attraverso il nucleo e attraverso il mantello. Considerando i flussi attraverso un piano trasversale alla fibra si ottiene

$$P_{nucleo} = \frac{n_1}{2\eta_0} \frac{|E_0|^2}{J_m^2(ua)} \int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi \int_0^a r J_m^2(ur) dr \quad (12)$$

$$P_{mant} = \frac{n_1}{2\eta_0} \frac{|E_0|^2}{K_m^2(va)} \int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi \int_a^\infty r K_m^2(vr) dr \quad (13)$$

Inoltre, l'espressione della potenza trasmessa dal modo è

$$P = P_{nucleo} + P_{mant}$$

Calcolando gli integrali (che sono noti come integrali indefiniti) si perviene alle seguenti espressioni:

$$P = \frac{n_1 |E_0|^2}{\eta_0 \kappa_m} \frac{\pi(1-b)}{2(2-\delta_{m0})b} \quad (14)$$

$$\frac{P_{mant}}{P} = (1 - \kappa_m)b \quad (15)$$

dove δ_{m0} è il simbolo di Kronecker e

$$\kappa_m = \frac{K_m^2(w\sqrt{b})}{K_{m-1}^2(w\sqrt{b}) K_{m+1}^2(w\sqrt{b})}$$

Poiché b è funzione di w , il rapporto P_{mant}/P è funzione della sola variabile w . Tale rapporto prende il nome di “fattore di confinamento”. Esso vale 1 alla frequenza di taglio, decresce rapidamente al crescere della frequenza e tende a zero per $w \rightarrow \infty$. Dunque, al crescere della frequenza il flusso di energia tende a concentrarsi sempre più nel nucleo. Per il modo fondamentale LP_{01} , tale rapporto scende al di sotto del 25% per valori di w maggiori di 2 rad.

La potenza trasmessa nelle fibre multimodo è pari alla somma delle potenze trasmesse dai singoli modi, come se ciascuno di essi si propagasse in assenza di tutti gli altri. Come nelle guide metalliche, questo risultato è conseguenza dell'ortogonalità dei modi (Equazione 11).

IV. CENNI SULL'ATTENUAZIONE NELLE FIBRE OTTICHE

Nelle fibre ottiche reali i modi si attenuano a causa di tre principali meccanismi: perdite dielettriche; diffusione all'esterno della fibra; confinamento insufficiente. Di seguito ci si limita a spiegare sinteticamente la natura di tali effetti. Come si vedrà l'attenuazione varia con la lunghezza d'onda d'impiego. Nelle moderne fibre in silice il minimo d'attenuazione si trova attorno a $1.55\mu\text{m}$ ed è dell'ordine di 0.2db/km. Questo basso valore ha reso possibile l'impiego delle fibre nei collegamenti a grande distanza.

Perdite dielettriche - Alle frequenze ottiche le perdite dielettriche sono dovute all'assorbimento atomico e molecolare. Come è ben noto, questi effetti sono collegati alle vibrazioni degli strutture elettroniche negli atomi e alle vibrazioni d'insieme delle molecole. Tali vibrazioni sono particolarmente intense in corrispondenza delle frequenze di risonanza (frequenze di transizione fra livelli energetici). Nella silice tali risonanze sono collocate nell'ultravioletto (risonanze elettroniche) e nell'infrarosso

(risonanze molecolari). Il loro effetto, tuttavia, si risente anche all'interno della banda d'utilizzo delle fibre (lunghezze d'onda dell'ordine di $1\mu\text{m}$).

Risonanze derivanti dalla presenza di particolari impurezze (in particolare l'ione OH), danno luogo a picchi d'assorbimento indesiderati all'interno della banda d'interesse. Però i moderni processi di fabbricazione hanno ridotto l'effetto delle impurezze, permettendo così di diminuire drasticamente l'attenuazione per assorbimento.

Perdite per diffusione - Le inevitabili disuniformità del materiale sono sensibili su scale di lunghezza dell'ordine del micron. Per quanto riguarda le caratteristiche macroscopiche del materiale (in particolare l'indice di rifrazione), tali disuniformità sono ininfluenti se la lunghezza d'onda è molto maggiore del micron⁴ mentre fanno sentire i loro effetti alle lunghezze d'onda d'utilizzo delle fibre. Infatti, quando le fluttuazioni d'indice di rifrazione sono sensibili sulla scala della lunghezza d'onda, diventa importante l'effetto di diffusione (di Rayleigh), per cui parte dell'energia trasmessa da un'onda che si propaga in una ben determinata direzione viene irradiata nelle altre direzioni. Nel caso delle fibre, tale fenomeno può essere visto come un effetto dell'accoppiamento fra modi guidati e modi radianti, causato dalle fluttuazioni dell'indice di rifrazione.

Un effetto simile è provocato dalle imperfezioni geometriche della fibra, dovute al processo di fabbricazione, che possono essere viste come perturbazioni che determinano l'accoppiamento fra modi guidati e modi radianti.

Perdite per confinamento insufficiente - Il fattore di confinamento si avvicina a 1 per i modi con frequenza di taglio prossima a quella di lavoro. Ne consegue che, nelle fibre multimodo, il campo non è del tutto trascurabile sulla periferia del mantello. Si ha quindi un'accoppiamento con il mondo esterno e – più precisamente – con il rivestimento della fibra, che introduce perdite aggiuntive.

V. DISPERSIONE

E' ben noto che la dispersione limita l'utilizzo dei mezzi trasmissivi, poiché provoca la distorsione dei segnali. Nel caso delle fibre si hanno tre diversi tipi di dispersione: intermodale, cromatica, di polarizzazione. I tre effetti vengono brevemente discussi nel seguito.

Dispersione intermodale - Quest'effetto è presente nelle fibre multimodo ed è causato dalla diversa velocità di propagazione dei modi. Pensando ad un segnale ottico modulato ad impulsi (come quelli usati nel PCM) ogni impulso viene simultaneamente trasmesso da più modi e, quindi, giunge all'uscita con ritardi diversi. Il segnale in uscita è quindi costituito dalla sovrapposizione di impulsi di varia ampiezza, sfalsati nel tempo. L'effetto complessivo è quello di un allargamento dell'impulso, che può provocare interferenza inter-simbolica, se l'allargamento supera il tempo di ripetizione degli impulsi.

L'allargamento degli impulso può essere stimato facendo ricorso ad un modello a raggi. Tale modello può essere usato grazie al fatto che le dimensioni del nucleo delle fibre multimodo sono molto maggiori della lunghezza d'onda, permettendo così di utilizzare l'approssimazione dell'ottica geometrica. La Fig. 3 rappresenta il raggio emessi da una sorgente puntiforme posta sull'asse di una fibra a salto d'indice. L'insieme dei raggi che rimangono intrappolati nel nucleo (a causa del fenomeno della riflessione totale) serve a determinare il campo prodotto dalla sorgente, che -rigorosamente- è rappresentato da una combinazione dei modi guidati. L'impulso che per primo raggiunge la sezione trasversale aa'

⁴Per esempio, se la lunghezza d'onda è maggiore di 1 mm, i parametri macroscopici che caratterizzano il materiale possono essere ottenuti mediando su volumetti fisicamente infinitesimi di dimensioni sufficientemente grandi (per esempio $50\mu\text{m}$) da "spianare" le fluttuazioni dell'indice di rifrazione, facendolo apparire costante.

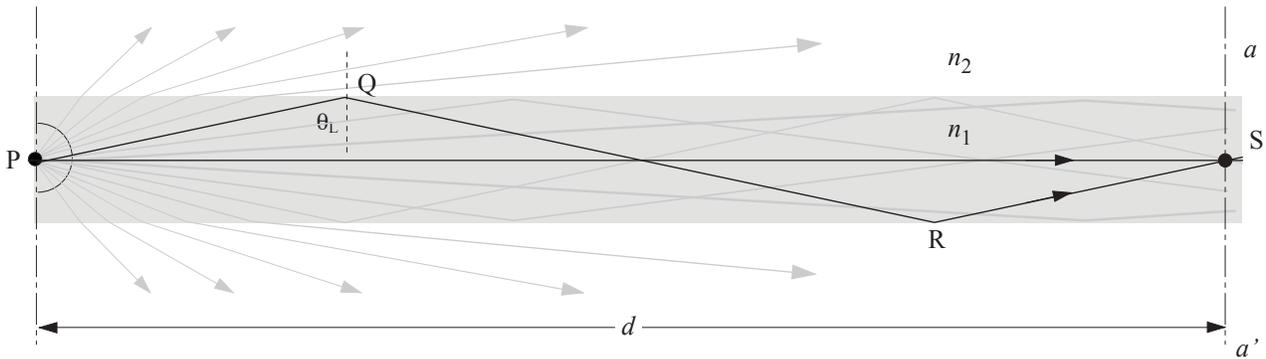


Fig. 3. Raggi in una fibra multimodo a salto d'indice.

posta alla distanza d dalla sorgente è quello che viaggia lungo il raggio diretto secondo l'asse (congiungente i punti P e S); quello che arriva per ultimo è quello che percorre il cammino ottico più lungo (PQRS), attraverso il raggio che incide sulla periferia del nucleo secondo l'angolo limite

$$\theta_L = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

Nella sezione aa' l'insieme degli impulsi sfalsati occupa l'intervallo di tempo

$$\tau = \frac{\overline{PQRS}}{c/n_1} - \frac{d}{c/n_1}$$

Si ha

$$d = \overline{PQRS} \sin \theta_L \quad \text{ossia} \quad \overline{PQRS} = \frac{d}{\sin \theta_L} = \frac{n_1}{n_2} d$$

Sostituendo nell'espressione di τ e osservando che $(n_1 - n_2)/n_2 \approx \Delta$ si ottiene:

$$\tau \approx \frac{n_1 \Delta}{c} d \quad (16)$$

La larghezza di banda del sistema trasmissivo è $B = 1/\tau$. Pertanto si ottiene il “prodotto banda-distanza”

$$Bd = \frac{c}{n_1 \Delta}$$

Per esempio, nel caso di una fibra con $n_1 = 1.5$ e $\Delta = 1\%$ si ha $Bd = 20$ MHz km. Questo risultato mostra che le fibre multimodo non sono adatte a realizzare collegamenti a larga banda su grandi distanze.

Banda più larghe vengono ottenute nelle fibre a variazione graduale dell'indice di rifrazione (*graded index*). In queste fibre l'indice di rifrazione decresce gradualmente dal centro verso la periferia, così che i raggi non hanno più la forma di spezzate (come nella figura) ma sono curvi con andamento ondulato. I raggi che partono in direzione prossima all'asse si discostano dall'asse meno degli altri, così che, lungo questi raggi, la distanza geometrica fra la sorgente e la sezione d'arrivo è minore che nei raggi

più inclinati. D'altro canto, i raggi più vicini all'asse attraversano una zona in cui l'indice di rifrazione è più alto cosicché, se il profilo dell'indice è studiato opportunamente, il cammino ottico⁵ tende a compensarsi fra i vari raggi. Alla compensazione dei cammini ottici corrisponde una compensazione nei tempi di propagazione, che risultano pressoché uguali lungo i vari raggi. Ne consegue che la distorsione intermodale risulta molto minore di quella che si ha nelle fibre a salto d'indice.

Ovviamente, il problema della dispersione intermodale è radicalmente rimosso nelle fibre monomodo.

Dispersione cromatica - La dispersione cromatica dipende da due effetti concomitanti, la dispersività del modo e la dispersività del materiale. Quest'ultima è determinata dal fatto che la costante dielettrica (e quindi l'indice di rifrazione) varia con la frequenza. La distorsione provocata dalla dispersività su un segnale modulato a larga banda dipende dal fatto che la velocità di gruppo non è costante all'interno della banda. La dispersione è caratterizzata dalla quantità

$$D = \frac{d^2\beta}{d\omega^2}$$

che corrisponde alla derivata del ritardo di gruppo per unità di lunghezza⁶.

Calcoli dettagliati evidenziano il fatto che, nei modi fortemente confinati, la dispersione di una fibra non differisce troppo da quella dovuta al solo effetto del materiale, cioè a quella che si avrebbe se la trasmissione avvenisse mediante onde piane uniformi nel mezzo che costituisce il nucleo. In questo caso la distorsione sarebbe

$$D_{mat} = \frac{d^2(k_0 n_1)}{d\omega^2}$$

da cui, dopo alcuni passaggi si ottiene

$$D_{mat} = \frac{\lambda_0^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n_1}{d\lambda_0^2}$$

Nelle fibre in silice si trova che la dispersione è nulla intorno a $\lambda_0 = 1.3\mu\text{m}$, valore diverso da quello per cui è minima l'attenuazione ($1.55\mu\text{m}$). Questa differenza può essere colmata considerando fibre a doppio rivestimento, che utilizzano materiali con diverse caratteristiche di dispersione, opportunamente scelti in modo da compensare reciprocamente gli effetti dispersivi alla lunghezza d'onda desiderata.

Dispersione di polarizzazione - Questo effetto diventa significativo in assenza dei due precedenti. Esso è dovuto a tutte le cause che rendono asimmetrica la fibra (discostamento dalla geometria circolare dovuto alla lavorazione, curve, asimmetrie dell'indice di rifrazione dovute a tensioni meccaniche, etc.). Si tratta di effetti molto piccoli che, tuttavia sono sufficienti a far venir meno l'esatta degenerazione che si ha fra le due polarizzazioni ortogonali dello stesso modo. Per esempio il modo LP_{01} che si propaga nelle fibre monomodo si suddivide in due modi, polarizzati secondo x e y , che si propagano con velocità leggermente diverse. Ne consegue che, anche nelle fibre monomodo, si ha un effetto simile a quello discusso per la distorsione intermodale, ma molto meno accentuato.

⁵Si ricorda che in un mezzo a indice di rifrazione variabile il cammino ottico fra due punti posti sullo stesso raggio è dato dall'integrale dell'indice di rifrazione fra i due punti, lungo il raggio.

⁶Il ritardo di gruppo per unità di lunghezza è l'inverso della velocità di gruppo, cioè $d\beta/d\omega$.