

GUIDE DIELETTICHE

Appunti dal Corso di Complementi di Campi Elettromagnetici

Prof. Giuseppe Conciauro

Fac. di Ingegneria, Università di Pavia, a.a. 2009-2010

I. PROPAGAZIONE GUIDATA DA UNA PIASTRA DIELETTICA

Un problema istruttivo e matematicamente semplice riguarda la propagazione guidata da una lastra piana di indice di rifrazione n_1 immersa in un mezzo di indice di rifrazione $n_2 < n_1$ (Fig.1a). I due mezzi sono dielettrici ideali. La lastra è infinitamente estesa nelle direzioni y e z e si suppone che il campo sia indipendente da y (problema bidimensionale).

Si intuisce che un'onda piana uniforme che incide dall'interno della lastra sull'interfaccia con il mezzo 2, secondo un angolo d'incidenza maggiore dell'angolo limite, si riflette totalmente verso l'interno, rimanendo "intrappolata" nella lastra a causa delle successive riflessioni (Fig. 1b). Come è noto dallo studio della riflessione totale, il campo penetra nel mezzo 2, dove si creano due onde superficiali localizzate in prossimità delle interfacce.

La trattazione che segue serve a verificare l'effettiva esistenza di questo tipo di propagazione e a mostrare che essa può avvenire secondo vari modi. Essa utilizza i risultati dello studio delle onde piane, riassunti nella Tab. 1.

Grazie alla simmetria della struttura possiamo considerare campi simmetrici rispetto al piano yz . Supponiamo inoltre che il campo elettrico sia polarizzato linearmente nella direzione y . Pertanto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E_y &= A e^{-\alpha x} e^{-j\beta z} & x > d \\ E_y &= B (e^{-jux} \pm e^{jux}) e^{-j\beta z} & -d < x < d \\ E_y &= \pm A e^{\alpha x} e^{-j\beta z} & x < -d \end{aligned}$$

In questa espressione A e B sono costanti, le quantità

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - (n_2 k_0)^2} \quad u = \sqrt{(n_1 k_0)^2 - \beta^2} \quad (1)$$

sono reali e il doppio segno indica campi elettrici a simmetria pari ($E_y(-x, z) = E_y(x, z)$) o dispari ($E_y(-x, z) = -E_y(x, z)$). Il campo all'esterno della lastra è rappresentato da onde la cui ampiezza decresce esponenzialmente quando ci si allontana dalla lastra, mentre il campo all'interno è rappresentato dalla sovrapposizione di due onde piane uniformi che si propagano obliquamente nelle direzioni simmetriche $\pm u\hat{x} + \beta\hat{z}$ (v. Fig.1c). La variazione della fase del campo nella direzione z dipende dalla costante di fase β . Evidentemente, affinché α e u siano reali è necessario che la costante di fase abbia un valore intermedio fra quelli delle costanti di fase delle onde piane uniformi nei mezzi 1 e 2. Pertanto:

$$n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0 \quad (2)$$

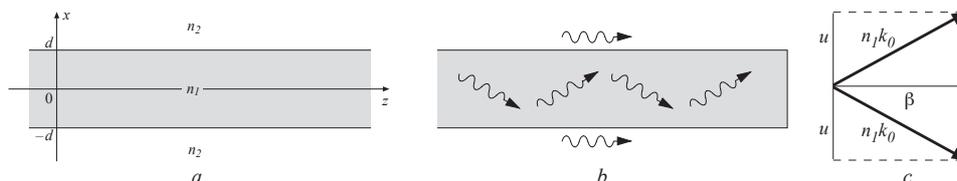


Fig. 1. a) lastra dielettrica; b) onde piane all'interno e all'esterno della lastra; c) vettori di propagazione delle onde all'interno.

TABLE I
ONDE PIANE IN UN DIELETTRICO IDEALE CON INDICE DI RIFRAZIONE n

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad \mathbf{H} = \frac{(k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{E}}{\omega \mu_0} \quad \left(k_x F_x + k_y F_y + k_z F_z = 0 \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = (nk_0)^2 \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \right)$$

se il campo e' indipendente da y e la propagazione avviene nella direzione z si ha : $k_y = 0, k_z = \beta$ (reale)

quindi : $k_x = \pm \sqrt{(nk_0)^2 - \beta^2} \begin{cases} = \mp j\alpha \text{ se } \beta > nk_0 \text{ (onda evanescente nella direzione } x, \text{ che si propaga nella direzione } z) \\ = \pm u \text{ se } \beta < nk_0 \text{ (onda piana unif. che si propaga nella direzione del vettore } \pm u\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{z}}) \end{cases}$

Le onde di superficie sono onde “lente”, perché la loro velocità di fase è minore di quella delle onde piane uniformi ($\omega/\beta < c/n_2$) mentre le due onde all’interno, sovrapposte fra loro, costituiscono un’onda (non più uniforme), che si propaga nella direzione z con velocità di fase ($\omega/\beta > c/n_1$) (onda “veloce”).

Utilizzando le formule riportate nella Tab. I si ottengono le seguenti espressioni delle componenti del campo magnetico.

$$\begin{aligned} \omega \mu_0 H_x &= -\beta A e^{-\alpha x} e^{-j\beta z} & \omega \mu_0 H_z &= -j\alpha A e^{-\alpha x} e^{-j\beta z} & x > d \\ \omega \mu_0 H_x &= -\beta B (e^{-jux} \pm e^{jux}) e^{-j\beta z} & \omega \mu_0 H_z &= uB (e^{-jux} \mp e^{jux}) e^{-j\beta z} & -d < x < d \\ \omega \mu_0 H_x &= \pm \beta A e^{\alpha x} e^{-j\beta z} & \omega \mu_0 H_z &= \mp j\alpha A e^{\alpha x} e^{-j\beta z} & x < -d \end{aligned}$$

Le espressioni del campo elettromagnetico hanno la forma di prodotto di una funzione della coordinata trasversale x per l’esponentiale $e^{-j\beta z}$. Tali espressioni sono quella tipiche dei modi. Più precisamente, esse rappresentano modi di tipo TE, a simmetria pari (TE^e) o dispari (TE^o).

A. Studio dei modi TE^e.

Poiché E_y e H_z devono essere continui attraverso le interfacce, devono essere verificate le condizioni

$$A e^{-\alpha d} = 2B \cos ud \quad (3)$$

$$A \alpha e^{-\alpha d} = 2Bu \sin ud \quad (4)$$

Queste equazioni ammettano soluzioni A e B diverse da zero purché

$$\alpha \cos ud = u \sin ud \quad (5)$$

D’altro canto, per le (1) si ha

$$\alpha = \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)k_0^2 - u^2}$$

e quindi deve aversi

$$\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)(k_0 d)^2 - (ud)^2} = ud \tan(ud) \quad (6)$$

Dunque, per ogni valore di k_0 (cioè della frequenza) u può assumere solo i valori che soddisfano la precedente “equazione caratteristica”. Tali valori sono sempre in numero finito, come si vede dalla soluzione grafica di Fig. 2a. Il loro numero cresce al crescere della frequenza (che è proporzionale al raggio del cerchio). Ogni valore $u_n = u_n(\omega)$ corrisponde a un modo TE a simmetria pari, indicato con la sigla TE _{n} ^e ($n = 0, 1, \dots, N$)¹.

L’esame della Fig. 2a mostra che il modo TE _{n} ^e inizia ad esistere a partire dai valori di k_0 per i quale il raggio della circonferenza è pari $n\pi$. Pertanto, la frequenza ω_n per la quale viene verificata questa condizione costituisce la “frequenza di taglio” del modo. Ponendo $k_o = \omega_n/c$ nella (6) si ottiene

¹Poiché u_n determina l’angolo d’incidenza delle onde interne sulle interfacce, per data frequenza tale angolo ha un valore ben determinato per ogni modo. E’ facile verificare che esso uguaglia l’angolo limite alla frequenza di taglio e tende a zero al crescere della frequenza

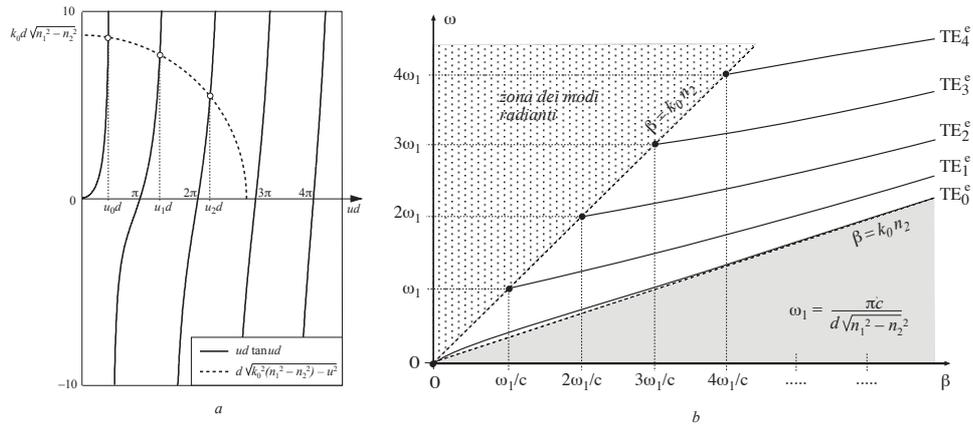


Fig. 2. *a* - soluzione grafica dell'equazione (6); *b* - diagramma di dispersione dei primi modi TE_n^c .

$$\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)(\omega_n d/c)^2 - (n\pi)^2} = 0$$

e quindi la frequenza di taglio del modo TE_n^c è data da

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

La relazione fra ω e β ("relazione di dispersione") per il modo TE_n^c è data dalla seguente equazione, derivante dalla seconda delle (1):

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega n_1}{c}\right)^2 - u_n^2(\omega)} \quad (\text{per il modo } TE_n^c) \quad (7)$$

I diagrammi di dispersione dei primi modi TE_n^c hanno l'andamento mostrato nella Fig. 2b. Essi partono dalla retta $\beta = k_0 n_2$ e tendono asintoticamente alla retta $\beta = k_0 n_1$.

Alla frequenza di taglio si ha $u_n(\omega_n) = n\pi/d$ e quindi, per la (5), si ha $\alpha = 0$. Dunque, proprio alla frequenza di taglio, il campo all'esterno della lastra non dipende da x . Al crescere della frequenza, però, α cresce e il campo risulta sempre più confinato nella lastra. Quando la frequenza tende all'infinito α tende all'infinito e u tende a zero. Il campo esterno tende a zero e le onde interne tendono a propagarsi nella direzione di z . Per questo, la costante di fase tende a $\beta = k_0 n_1$.

Le frequenze di taglio sono tanto più alte quanto minore è lo spessore della lastra. Fa eccezione il modo TE_0^c , che ha frequenza di taglio nulla, indipendentemente dallo spessore.

La Fig.3 mostra l'andamento del campo elettrico e del campo magnetico per il modo TE_0^c .

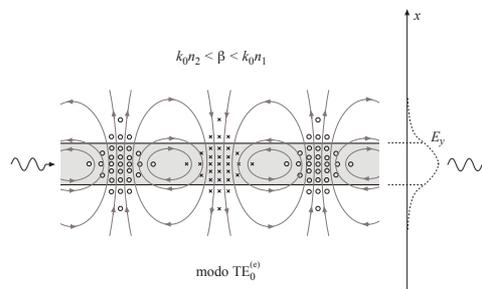


Fig. 3. Andamento del campo nel modo TE_0^c . Le crocette e i cerchietti rappresentano il campo elettrico (entrante o uscente dal foglio), le linee orientate rappresentano il campo magnetico.

B. Proprietà generali dei modi guidati

Lo studio delle altre classi di modi (TE^o , TM^o , TM^e) può essere condotto sulla falsariga di quello dei modi TE^e (lo studio dei modi TM viene affrontato in modo duale a quello dei modi TE , assumendo che il campo magnetico abbia come unica componente quella secondo y). In tutti i casi si trova che:

- i modi guidati si propagano con costante di fase compresa nell'intervallo (2). Pertanto si ha un'onda lenta nel mezzo esterno e un'onda veloce dentro la lastra.
- per ogni data frequenza può esistere un numero finito di “modi guidati”, che cresce al crescere della frequenza;
- sul piano ω, β la curva di dispersione di ciascun modo parte dalla retta $\beta = \omega n_2/c$ e tende asintoticamente alla retta $\beta = \omega n_1/c$;
- ciascun modo esiste al disopra di una sua frequenza di taglio, ad eccezione dei modi TE_0^e e TM_0^e , che possono esistere anche a frequenza zero. La frequenza di taglio corrisponde alla condizione per cui $\beta = n_2 k_0$, quindi, all'ordinata del punto di partenza della curva di dispersione sul piano ω, β ;
- il confinamento del campo migliora quando ci si allontana dalla frequenza di taglio.

II. GUIDA DIELETTRICA A SEZIONE CIRCOLARE

Consideriamo la struttura di Fig. 4, costituita da un cilindro dielettrico di indice di rifrazione n_1 , circondato da un mezzo illimitato di indice di rifrazione $n_2 < n_1$. Conviene affrontare lo studio del campo utilizzando i potenziali di Hertz.

$$\Psi^{(1)}(r, \varphi, z), \Phi^{(1)}(r, \varphi, z) \text{ nel mezzo 1} \quad \Psi^{(2)}(r, \varphi, z), \Phi^{(2)}(r, \varphi, z) \text{ nel mezzo 2}$$

I potenziali soddisfano l'equazione di Helmholtz omogenea

$$\nabla_T^2 \Psi^{(i)} + \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial z^2} + n_i^2 k_0 \Psi^{(i)} = 0 \quad \nabla_T^2 \Phi^{(i)} + \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2} + n_i^2 k_0 \Phi^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

Da essi si deducono le componenti del campo elettrico e del campo magnetico in coordinate cilindriche, mediante le espressioni

$$\begin{aligned} E_r^{(i)} &= \frac{-j\eta_0}{n_i^2 k_0} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial \varphi} & H_r^{(i)} &= \frac{-j}{k_0 \eta_0} \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \varphi} \\ E_\varphi^{(i)} &= \frac{-j\eta_0}{n_i^2 k_0 r} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} & H_\varphi^{(i)} &= \frac{-j}{k_0 \eta_0 r} \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial r} \\ E_z^{(i)} &= \frac{j\eta_0}{n_i^2 k_0} \nabla_T^2 \Psi^{(i)} & H_z^{(i)} &= \frac{j}{k_0 \eta_0} \nabla_T^2 \Phi^{(i)} \end{aligned} \quad (9)$$

Le condizioni al contorno sui potenziali vengono dedotte dalle seguenti condizioni di continuità all'interfaccia ($r = a$):

$$E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(2)} \quad E_z^{(1)} = E_z^{(2)} \quad H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(2)} \quad H_z^{(1)} = H_z^{(2)} \quad (10)$$

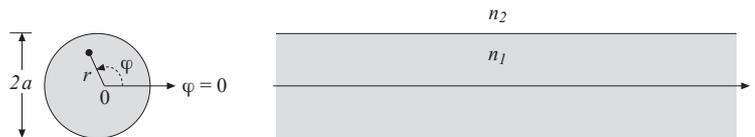


Fig. 4. Guida dielettrica a sezione circolare

A. Studio dei modi della guida cilindrica.

Nei modi i potenziali hanno la forma di prodotto di una funzione delle coordinate trasversali per $e^{-j\beta z}$:

$$\Psi^{(i)} = \psi^{(i)}(r, \varphi) e^{-j\beta z} \quad \Phi^{(i)} = \phi^{(i)}(r, \varphi) e^{-j\beta z}$$

Come nel caso della lastra si assume che la costante di fase soddisfi la relazione

$$n_1 k_0 < \beta < n_2 k_0 \quad (11)$$

in modo da avere un'onda lenta fuori dalla lastra e un'onda veloce dentro. Sostituendo nelle (8) si ottiene

$$\nabla_T^2 \psi^{(1)} + u^2 \psi^{(1)} = 0 \quad \nabla_T^2 \phi^{(1)} + u^2 \phi^{(1)} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla_T^2 \psi^{(2)} - v^2 \psi^{(2)} = 0 \quad \nabla_T^2 \phi^{(2)} - v^2 \phi^{(2)} = 0 \quad (13)$$

dove

$$u = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad v = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \quad (14)$$

Applicando il metodo di separazione delle variabili alle (12) e (13) scritte in coordinate cilindriche (come nel caso della guida metallica a sezione circolare), si ottengono soluzioni del tipo

$$\psi^{(i)} = R_i'(r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \quad \phi^{(i)} = R_i''(r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \quad (i = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2, \dots)$$

dove R_1' e R_1'' sono soluzioni delle equazioni

$$\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dR_1}{d\xi} \right) - (m^2 - \xi^2) R_1 = 0 \quad (\xi = ur) \quad (15)$$

mentre R_2' e R_2'' sono soluzioni delle equazioni

$$\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dR_2}{d\xi} \right) - (m^2 + \xi^2) R_2 = 0 \quad (\xi = vr) \quad (16)$$

Inoltre, imponendo le (10) si ottengono le condizioni

$$\frac{\eta_0 \beta}{n_1^2 k_0} \frac{m R_1'(a)}{a} + \dot{R}_1''(a) = \frac{\eta_0 \beta}{n_2^2 k_0} \frac{m R_2'(a)}{a} + \dot{R}_2''(a) \quad (17)$$

$$\frac{\beta}{\eta_0 k_0} \frac{m R_1''(a)}{a} + \dot{R}_1'(a) = \frac{\beta}{\eta_0 k_0} \frac{m R_2''(a)}{a} + \dot{R}_2'(a) \quad (18)$$

$$\frac{u^2}{n_1^2} R_1'(a) = -\frac{v^2}{n_2^2} R_2'(a) \quad (19)$$

$$u^2 R_1''(a) = -v^2 R_2''(a) \quad (20)$$

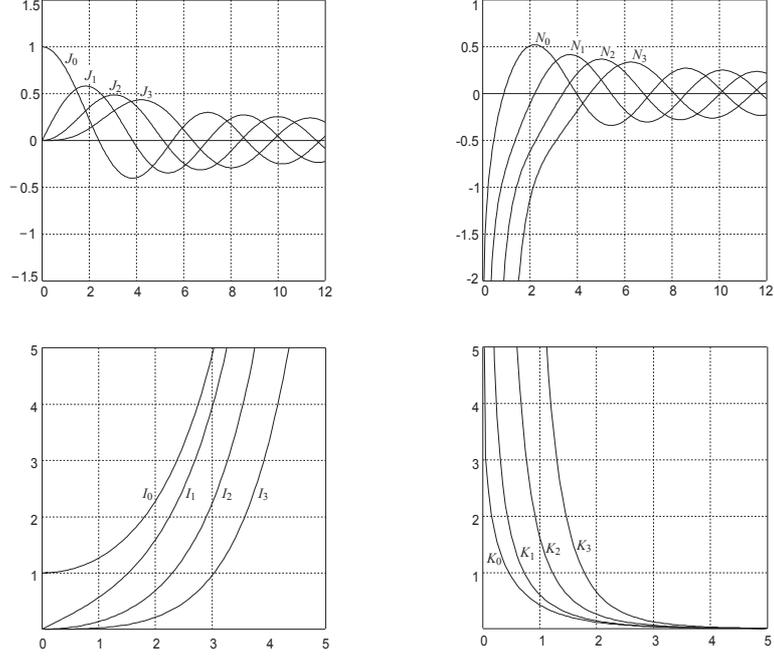


Fig. 5. Alcune funzioni di Bessel di ordine intero.

La (15) è una normale equazione di Bessel di ordine m le cui soluzioni possono essere espresse come combinazioni lineari delle funzioni del primo tipo (J_m) e del secondo tipo (N_m). La seconda di queste funzioni deve essere assente per evitare la singolarità in $r = 0$. Pertanto

$$R'_1 = A' J_m(ur) \quad R''_1 = A'' J_m(ur) \quad (21)$$

dove A' , A'' sono costanti. La (16) è la cosiddetta “equazioni di Bessel modificata” di ordine m , la cui soluzione generale può essere espressa come combinazione lineare di due soluzioni particolari, indicate con I_m e K_m , dette funzioni di Bessel modificate, di prima e seconda specie, rispettivamente. L'andamento tipico di queste funzioni è mostrato nella Fig. 5. Si osserva che I_m diverge all'infinito e che, quindi, non deve essere inclusa nelle R_2 . Pertanto

$$R'_2 = B' K_m(vr) \quad R''_2 = B'' K_m(vr) \quad (22)$$

dove B' e B'' sono costanti. Si noti che $K_m(vr)$ tende a zero rapidamente per $r \rightarrow \infty$, cosicché i potenziali (e il campo) decrescono rapidamente quando ci si allontana dalla superficie cilindrica. Imponendo le (19) e (20) si ottiene

$$B' = -\frac{n_2^2 u^2}{n_1^2 v^2} \frac{J_m(ua)}{K_m(va)} A' \quad B'' = -\frac{u^2}{v^2} \frac{J_m(ua)}{K_m(va)} A''$$

Imponendo le (17) (18) e utilizzando le precedenti espressioni per eliminare B' e B'' si ottiene

$$\frac{\eta_0 \beta m}{n_1^2 k_0 a} \frac{u^2 + v^2}{u^2 v^2} A' + \left(\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_m(ua)}{J_m(ua)} + \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_m(va)}{K_m(va)} \right) A'' = 0 \quad (23)$$

$$\left(\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_m(ua)}{J_m(ua)} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_m(va)}{K_m(va)} \right) A' + \frac{\beta m}{k_0 a \eta_0} \frac{u^2 + v^2}{u^2 v^2} A'' = 0 \quad (24)$$

dove \dot{J}_m e \dot{K}_m indicano le derivate prime di J_m e di K_m .

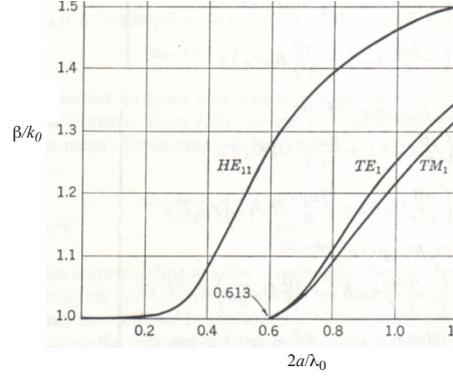


Fig. 6. Rapporto $\beta/k_0 n_2$ per i primi tre modi di una guida di polistirene ($n_1 = 1.6$) a sezione circolare, circondata dall'aria ($n_2 = 1$).

B. Modi TE e TM

Se $m = 0$ si hanno modi simmetrici, indipendenti da φ . In questo caso le (25) e (26) si traducono nelle due equazioni disaccoppiate

$$\left(\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_m(ua)}{J_m(ua)} + \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_m(va)}{K_m(va)} \right) A'' = 0 \quad (25)$$

$$\left(\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_m(ua)}{J_m(ua)} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_m(va)}{K_m(va)} \right) A' = 0 \quad (26)$$

Se i valori di k_0 e β sono tali da verificare l'una o l'altra equazione

$$\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_0(ua)}{J_0(ua)} + \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_0(va)}{K_0(va)} = 0 \quad (\text{equazione caratteristica modi TE}) \quad (27)$$

$$\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_0(ua)}{J_0(ua)} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_0(va)}{K_0(va)} = 0 \quad (\text{equazione caratteristica modi TM}) \quad (28)$$

si hanno soluzioni con $A' = 0$ e $A'' \neq 0$, ovvero con $A'' = 0$ e $A' \neq 0$. D'altro canto, A' , B' determinano le funzioni R'_1 ed R'_2 , che a loro volta sono collegate ai potenziali $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$, mentre A'' , B'' determinano le funzioni R''_1 ed R''_2 , a loro volta collegate ai potenziali $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$. Dunque nel primo caso i modi dipendono dal solo potenziale Φ (modi TE), mentre nell'altro caso dipendono dal solo potenziale Ψ (modi TM).

Per le (14) v è collegata a u dall'espressione

$$v = \sqrt{k_0^2(n_1^2 - n_2^2) - u^2}$$

mediante la quale è possibile eliminare v dalle (27) e (28). Così si ottengono due equazioni che permettono di ricavare u , per ogni dato valore di k_0 . Si ha un numero finito di soluzioni, indicate da $u_n(\omega)$, ciascuna corrispondente ad un modo TE_n o TM_n , che si propaga con la costante di fase

$$\beta = \sqrt{(n_1 \omega / c)^2 - u_n^2(\omega)} \quad (29)$$

Un esempio di diagramma dispersione è rappresentato nella Fig. 6, per i modi TE_1 e TM_1 . Il diagramma fornisce il rapporto β/k_0 in funzione della frequenza (proporzionale all'ascissa $2a/\lambda_0$). Al crescere della frequenza

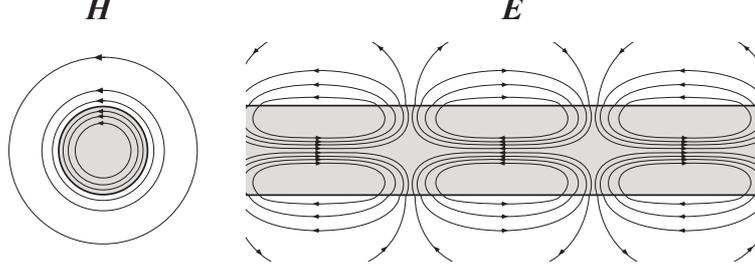


Fig. 7. Andamento del campo nel modo TM_1 .

il rapporto β/k_0 tende asintoticamente a n_1 . Dunque, come nel caso della lastra, la curva di dispersione sul piano ω, β ha come asintoto la retta $\beta = n_1\omega/c$.

La frequenza corrispondente alla partenza delle curve di dispersione è la frequenza di taglio dei modi. Essa è individuata dalla solita condizione

$$\beta \rightarrow n_2 k_0 \quad \text{ossia} \quad v \rightarrow 0, \quad u \rightarrow k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Si ha

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_0(va)}{K_0(va)} = \infty$$

e quindi, per le (27) e (28), anche

$$\lim_{\beta \rightarrow n_2 k_0} \frac{1}{u} \frac{\dot{J}_0(ua)}{J_0(ua)} = \infty \quad \text{che implica} \quad \lim_{\beta \rightarrow n_2 k_0} J_0(ua) = J_0\left(k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = 0$$

Pertanto, sia per il modo TE_n , sia per il modo TM_n , il valore della frequenza di taglio è dato da

$$\omega_n = \frac{x_{0n} c}{a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (30)$$

dove x_{0n} è l' n -esimo zero della funzione J_0 . La Fig. 7 indica l'andamento del campo nel modo TM_1 .

C. Modi ibridi

Se m differisce da zero (modi asimmetrici) le (25)-(26) collegano A' e A'' . In questo caso, quindi, i potenziali Ψ e Φ coesistono. Dunque i modi asimmetrici non sono né TE né TM e, per questo, vengono detti "ibridi". Le (25)-(26) sono compatibili se il determinante dei coefficienti è nullo:

$$\left(\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_m(ua)}{J_m(ua)} + \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_m(va)}{K_m(va)} \right) \left(\frac{1}{u} \frac{\dot{J}_m(ua)}{J_m(ua)} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{v} \frac{\dot{K}_m(va)}{K_m(va)} \right) = m^2 \left(\frac{\beta}{n_1 k_0 a} \frac{u^2 + v^2}{u^2 v^2} \right)^2 \quad (31)$$

Quest'equazione si scinde nelle seguenti equazioni, ottenute risolvendo rispetto a $\dot{J}_m(ua)/uJ_m(ua)$:

$$\frac{\dot{J}_m(ua)}{uJ_m(ua)} = -(1 - \Delta) \frac{\dot{K}_m(va)}{vK_m(va)} - \sqrt{m^2 \left(1 - \frac{2\Delta u^2}{u^2 + v^2} \right) \left(\frac{u^2 + v^2}{au^2v^2} \right)^2 + \Delta^2 \left(\frac{\dot{K}_m(va)}{vK_m(va)} \right)^2} \quad (32)$$

$$\frac{\dot{J}_m(ua)}{uJ_m(ua)} = -(1 - \Delta) \frac{\dot{K}_m(va)}{vK_m(va)} + \sqrt{m^2 \left(1 - \frac{2\Delta u^2}{u^2 + v^2} \right) \left(\frac{u^2 + v^2}{au^2v^2} \right)^2 + \Delta^2 \left(\frac{\dot{K}_m(va)}{vK_m(va)} \right)^2} \quad (33)$$

dove

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (34)$$

Anche in questo caso, eliminando v si ottengono due equazioni che permettono di determinare, per data frequenza, i possibili valori di u .

Se si pone $m = 0$ la prima equazione si riduce all'equazione caratteristica dei modi TE, l'altra a quella dei modi TM. Si intuisce quindi che nei modi associati alla (32) la componente longitudinale è più rilevante nel campo magnetico che nel campo elettrico. Per questa ragione tali modi vengono indicati con la sigla HE_{mn} . Analogamente, i modi associati alla (33) vengono indicati con la sigla EH_{mn} , dato che la componente longitudinale è più rilevante nel campo elettrico che nel campo magnetico. Per dato valore di m , l'indice n corrisponde alla n -esima soluzione dell'una o dell'altra equazione caratteristica.

Come nella guida metallica a sezione circolare i modi asimmetrici sono sempre presenti in coppie degeneri (una dipendente da $\cos m\varphi$ l'altra da $\sin m\varphi$).

La Fig. 6 mostra la curva di dispersione per il modo HE_{11} . Si nota che questo modo esiste anche quando $a/\lambda_0 = 0$, cioè quando $\omega = 0$. Però il confinamento a frequenza zero non esiste, e quindi questo risultato non ha alcun interesse pratico.