

Oscillazioni forzate in cavità

Corso di Complementi di Campi Elettromagnetici. Università di Pavia. A.A. 2009-2010

I. RISONANZA IN UNA CAVITÀ IDEALE

La fig. 1 rappresenta una cavità ideale eccitata dall'interno da una distribuzione di correnti impresse alla pulsazione ω . Il campo elettromagnetico soddisfa le equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2)$$

e la condizione al contorno

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

Eliminando \mathbf{H} si ha l'equazione

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J}_0 \quad (4)$$

Il campo elettrico viene espresso come somma di un campo irrotazionale e di un campo solenoidale:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \mathbf{e} \quad (5)$$

dove ϕ è un potenziale scalare e $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$. Assumendo le condizioni al contorno

$$\phi = 0 \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e} = 0 \quad (6)$$

il campo elettrico soddisfa la (3). Sostituendo nella (4) si ottiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e} - k^2\mathbf{e} = -j\omega\mu\mathbf{J}_0 - k^2\nabla\phi \quad (7)$$

Inoltre, poiché $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ e $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, il potenziale scalare soddisfa l'equazione di Poisson con la condizione al contorno di Dirichelet omogenea

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon \quad \text{in } V \quad (8)$$

$$\phi = 0 \quad \text{su } S_V \quad (9)$$

Pertanto $-\nabla\phi$ ha la stessa forma del campo elettrostatico che verrebbe prodotto nella cavità da una carica di densità ρ ⁽¹⁾.

Si può dimostrare che gli autovettori \mathcal{E}_i che soddisfano

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{E}_i = k_i^2\mathcal{E}_i \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \times \mathcal{E}_i = 0 \quad (11)$$

costituiscono una base completa per rappresentare qualunque vettore solenoidale a quadrato sommabile, definito in V . Pertanto si può scrivere

$$\mathbf{e} = \sum_i a_i \mathcal{E}_i \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{e} = \sum_i b_i \mathcal{E}_i$$

Per la proprietà di ortonormalità degli autovettori

$$\int_V \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j = \delta_{ij}$$

¹Ovviamente il campo oscilla, come ρ , alla pulsazione ω .

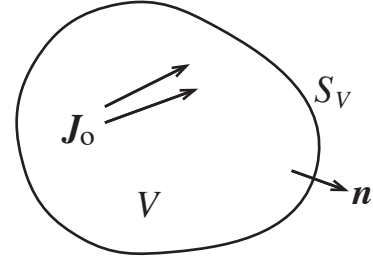


Fig. 1. Cavità con correnti impresse.

si ha

$$a_i = \int_V \mathcal{E}_i \cdot \mathbf{e} dV \quad b_i = \int_V \mathcal{E}_i \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{e} dV$$

Utilizzando l'identità (20) (v. Appendice) e tenendo conto della condizione $\mathbf{n} \times \mathbf{e} = 0$ si ha

$$b_i = \int_V \mathbf{e} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathcal{E}_i dV = k^2 \int_V \mathbf{e} \cdot \mathcal{E}_i dV = k_i^2 a_i$$

Pertanto la (7) diviene

$$\sum_i (k_i^2 - k^2) a_i \mathcal{E}_i = -j\omega\mu\mathbf{J}_0 + k^2\nabla\phi$$

da cui, sempre per l'ortonormalità degli autovettori:

$$(k_i^2 - k^2) a_i = -j\omega\mu \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \mathcal{E}_i dV + k^2 \int_V \nabla\phi \cdot \mathcal{E}_i dV$$

L'ultimo integrale è nullo poiché gli autovettori sono solenoidali e a causa del fatto che ϕ è nullo sul contorno (v. identità (21) Pertanto:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \eta v \sum_i \frac{j\omega \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \mathcal{E}_i dV}{\omega^2 - \omega_i^2} \mathcal{E}_i \quad (12)$$

($\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, $\omega_1 = vk_i = \text{pulsazione di oscillazione del modo } i\text{-esimo}$).

Utilizzando la (2) e introducendo gli autovettori magnetici

$$\mathcal{H}_i = k_i^{-1} \nabla \times \mathcal{E}_i$$

si ottiene pure

$$\mathbf{H} = -v \sum_i \frac{\omega_i \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \mathcal{E}_i dV}{\omega^2 - \omega_i^2} \mathcal{H}_i \quad (13)$$

Se l' i -esimo integrale non è nullo, l' i -esimo termine della sommatoria diverge quando la frequenza di lavoro si avvicina a ω_i . Si ha

$$\mathbf{E} \approx \eta v \frac{j\omega \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \mathcal{E}_i dV}{\omega^2 - \omega_i^2} \mathcal{E}_i \quad (\omega \approx \omega_i) \quad (14)$$

$$\mathbf{H} \approx -v \frac{\omega_i \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \mathcal{E}_i dV}{\omega^2 - \omega_i^2} \mathcal{H}_i \quad (15)$$

Il campo diviene molto intenso, e la sua struttura si avvicina sempre più a quello dell' i -esimo modo proprio della cavità (RISONANZA ELETTROMAGNETICA).

II. RISONANZA IN UNA CAVITÀ REALE

La teoria è più complicata, a causa de fatto che la (3) deve essere sostituita dallala condizione di Leontovich

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = R_s(1 + j)\mathbf{H}_{\tan}$$

Qui ci si limita a riportare il risultato che è

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \eta v \sum_i \frac{j\omega \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i dV}{\omega^2 - j\frac{\omega\omega_i}{Q_i} - \omega_i^2} \boldsymbol{\mathcal{E}}_i \quad (16)$$

$$\mathbf{H} = -v \sum_i \frac{\omega_i \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i dV}{\omega^2 - j\frac{\omega\omega_i}{Q_i} - \omega_i^2} \boldsymbol{\mathcal{H}}_i \quad (17)$$

dove Q_i è il fattore di merito del modo i -esimo.

Per $\omega = \omega_i$ il campo diviene molto intenso ma rimane finito.

Si ha:

$$\mathbf{E} \approx -\eta \frac{Q_i \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i dV}{k_i} \boldsymbol{\mathcal{E}}_i \quad (18)$$

$(\omega = \omega_i)$

$$\mathbf{H} \approx -j \frac{Q_i \int_V \mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i dV}{k_i} \boldsymbol{\mathcal{H}}_i \quad (19)$$

La fig.2 rappresenta l'andamento tipico del modulo del campo magnetico al variare della frequenza. I picchi tendono a sovrapporsi al crescere della frequenza, a causa dell'addensarsi delle pulsazioni proprie.

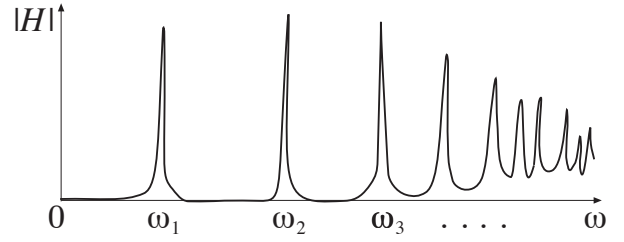


Fig. 2. Risonanze.

APPENDIX

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &= \oint_{S_V} (\mathbf{n} \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{n} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dS_V \quad (20) \end{aligned}$$

$$\int_V (\mathbf{A} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_{S_V} \Phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS_V \quad (21)$$