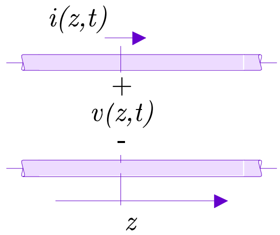
Parametri di Diffusione

- Linee di trasmissione: richiami
  - Onde di tensione e corrente
  - Coefficiente di riflessione
  - Potenza nelle linee
  - Adattamento
- Parametri di Diffusione (S)
  - Definizione
  - Applicazioni ed esempi

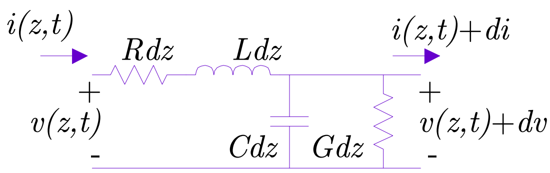
Linee di trasmissione: richiami

- Ad alte frequenze, i segnali (tensioni e correnti) si propagano lungo i conduttori con ritardi che sono ormai confrontabili con quelli dovuti ai componenti
- I conduttori vanno descritti come linee di trasmissione, che obbediscono (almeno a bassa frequenza) alle equazioni dei telegrafisti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -Ri(z,t) - L\dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -Gv(z,t) - C\dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$



- Le equazioni dei telegrafisti possono essere interpretate in termini di un circuito equivalente (a parametri concentrati) per uno spezzone di linea di lunghezza infinitesima dz:



- L, C, R, G sono l'induttanza, capacità, etc. per unità di lunghezza.
- Se R, G sono trascurabili, la linea è un componenti non dissipativo e si dice senza perdite.

Linee di trasmissione: richiami

- Nelle linee senza perdite,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\dfrac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

o, nel dominio trasformato,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V(z,\omega)}{\partial z^2} & = & -\omega^2 LCV(z,\omega) \\ \dfrac{\partial^2 I(z,t)}{\partial z^2} & = & -\omega^2 LCI(z,\omega) \end{cases}$$

che ha soluzione

$$\begin{cases} V(z,\omega) & = & V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \\ I(z,\omega) & = & I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{j\beta z} \end{cases}$$

con

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \left[= \frac{2\pi}{\lambda} \right]$$

- La soluzione generale è quindi data da due segnali viaggianti in direzioni opposte nella linea, ciascuno dei quali è scomponibile nelle sue componenti armoniche. È facile vedere che valgono queste relazioni:

$$I_0^+ = \frac{V_0^+}{Z_0}, \; I_0^- = -\frac{V_0^-}{Z_0},$$

dove

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

è l'impedenza caratteristica della linea.
- La velocità u dei segnali vale

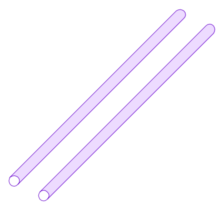
$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e, dato che non dipende dalla frequenza (la linea è non dispersiva), i segnali non vengono distorti.

Linee di trasmissione: richiami

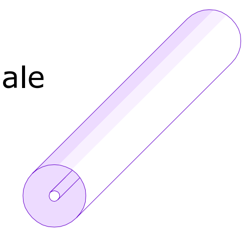
- La teoria delle linee basata sulle equazioni dei telegrafisti vale in realtà sono supponendo che le distribuzioni di campo elettrico e magnetico siano identiche (a parte l'oscillazione nel tempo) a quelle statiche. Questo è rigorosamente vero per linee con dielettrico omogeneo, per cui esistono modi di propagazione TEM.
- Per le microscrisce (assai usate nei circuiti per microonde) questo non è vero. Ciononostante, la distribuzione di campo si discosta poco da quella statica e si parla quindi di modo quasi-TEM.

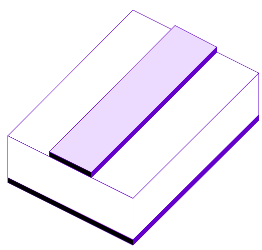
- Possibili realizzazioni:



linea bifilare (TEM)

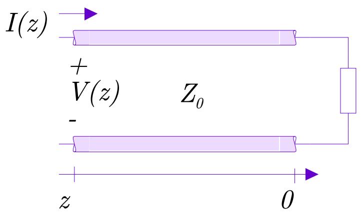
cavo coassiale (TEM)



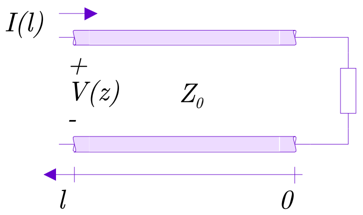


microstriscia (quasi-TEM)

Potenza incidente e potenza riflessa



$$V(z) = V^+ + V^- =$$
$$= V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$



$$V(l) = V^+ + V^- =$$
$$= V_0^+ e^{j\beta l} + V_0^- e^{-j\beta l}$$

- Potenza trasferita sulla linea:

$$\begin{aligned} P = &\ \frac{1}{2}\mathbf{Re}(VI^\star) = \frac{1}{2}\mathbf{Re}[(V^+ + V^-)(I^{+\star} + I^{-\star})] \\ = &\ \frac{1}{2}\mathbf{Re}\left[(V^+ + V^-)\left(\frac{V^{+\star}}{Z_0} - \frac{V^{-\star}}{Z_0}\right)\right] = \\ = &\ \frac{1}{2Z_0}[|V^+|^2 - |V^-|^2] \end{aligned}$$

- Definiamo a e b (onde di potenza incidente e riflessa) misurate in $[W^{1/2}]$:

$$\begin{cases} a \doteq \dfrac{V^+}{\sqrt{Z_0}} = \dfrac{V_0^+ e^{j\beta l}}{\sqrt{Z_0}} \\ b \doteq \dfrac{V^-}{\sqrt{Z_0}} = \dfrac{V_0^- e^{-j\beta l}}{\sqrt{Z_0}} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{|a|^2}{2} - \frac{|b|^2}{2}$$

- Lungo una linea di impedenza Z_0, i moduli di a e b non cambiano, ma cambiano le fasi.

Onde di potenza

- Si possono scrivere tensione e corrente nella linea in funzione di a e b:

$$\begin{cases} V = V^+ + V^- = \sqrt{Z_0}(a+b) \\ I = I^+ + I^- = \dfrac{V^+ - V^-}{Z_0} = \dfrac{a-b}{\sqrt{Z_0}} \end{cases}$$

- Sommando e sottraendo le due equazioni precedenti, otteniamo una definizione alternativa di a e b in funzione di tensione e corrente:

$$\begin{cases} a \doteq \dfrac{V + Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}} \\ b \doteq \dfrac{V - Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}} \end{cases}$$

- L'impedenza Z_0 (impedenza di normalizzazione) non è necessariamente legata alla presenza di una linea di trasmissione. Le definizioni si possono quindi utilizzare anche per un bipolo generico.

- Se l'impedenza del bipolo è nota, si può scrivere:

$$\begin{cases} a = \dfrac{(Z + Z_0)I}{2\sqrt{Z_0}} \\ b = \dfrac{(Z - Z_0)I}{2\sqrt{Z_0}} \end{cases}$$

da cui si vede che la relazione tra a e b può essere interpretata come un coefficiente di riflessione:

$$\frac{b}{a} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \Gamma$$

in perfetta analogia con quello definito per le linee di trasmissione.

- Quanto fatto per un bipolo generico si può estendere ai quadripoli.

Onde di potenza

- La formula per la potenza assorbita da un bipolo continua a rimanere valida. Ricordando le espressioni per la corrente e la tensione in funzione delle onde di potenza:

$$\begin{cases} V = \sqrt{Z_0}(a+b) \\ I = \dfrac{V^+ - V^-}{Z_0} = \dfrac{a-b}{\sqrt{Z_0}} \end{cases}$$

è possibile scrivere la potenza assorbita come:

$$P = \frac{1}{2}\mathbf{Re}(VI^\star) = \frac{1}{2}\mathbf{Re}\left[\sqrt{Z_0}(a+b)\frac{(a-b)^\star}{\sqrt{Z_0}}\right] =$$

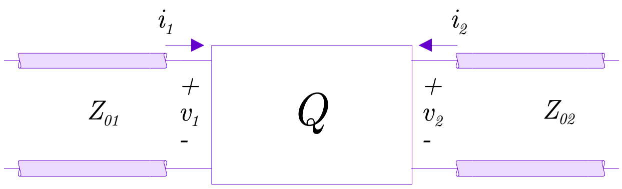
$$= \frac{1}{2}\mathbf{Re}\left[(a+b)(a-b)^\star\right] = \frac{1}{2}[|a|^2 - |b|^2 + \mathbf{Re}(a^\star b - ab^\star)] =$$

$$= \frac{1}{2}[|a|^2 - |b|^2]$$

che è identica alla formula ricavata per la linea di trasmissione.

Parametri S: definizione

- Definiamo le onde di potenza incidenti e riflesse sulle due porte di un quadripolo:



$$a_1 \doteq \frac{v_1 + Z_{01}i_1}{2\sqrt{Z_{01}}} \quad a_2 \doteq \frac{v_2 + Z_{02}i_2}{2\sqrt{Z_{02}}} \quad b_1 \doteq \frac{v_1 - Z_{01}i_1}{2\sqrt{Z_{01}}} \quad b_2 \doteq \frac{v_2 - Z_{02}i_2}{2\sqrt{Z_{02}}}$$

- Se il quadripolo è lineare, le relazioni tra le onde di potenza saranno relazioni lineari. È possibile, ad esempio, esprimere le onde di potenza riflesse in funzione di quelle incidenti:

$$\begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{cases} \qquad [\mathbf{b} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{a}]$$

- Questo sistema di equazioni può essere interpretato come una definizione dei quattro parametri di scattering (diffusione) S_{ij}. La conoscenza dei parametri di scattering definisce completamente il comportamento del quadripolo.

Parametri S: definizione

- Nelle definizioni delle onde di potenza, le impedenze Z_{01} e Z_{02} (impedenze di normalizzazione) sono anch'esse arbitrarie. La scelta più comune è però $Z_{01} = Z_{02}$.
- Dalle equazioni descrittive dei parametri di scattering

$$\begin{cases} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{cases}$$

discendono immediatamente delle definizioni per i singoli parametri:

$$S_{11} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)_{a_2=0} \qquad S_{21} = \left(\frac{b_2}{a_1}\right)_{a_2=0}$$

$$S_{12} = \left(\frac{b_1}{a_2}\right)_{a_1=0} \qquad S_{22} = \left(\frac{b_2}{a_2}\right)_{a_1=0}$$

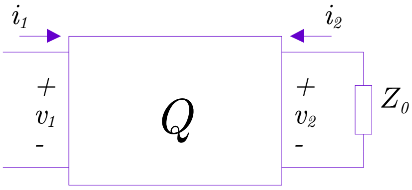
- S_{11} è il coefficiente di riflessione in ingresso con *uscita adattata*.
- S_{21} è il coefficiente di trasmissione diretta con *uscita adattata*.
- S_{12} è il coefficiente di trasmissione inversa con *ingresso adattato*.
- S_{22} è il coefficiente di riflessione in uscita con *ingresso adattato*.

Parametri S

- La condizione di adattamento equivale a chiudere la porta relativa sull'impedenza di normalizzazione. Ad esempio, l'adattamento sulla porta di uscita ($a_2 = 0$) equivale a:

$$a_2 \doteq \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = -Z_0 i_2$$



- La potenza totale assorbita dal quadripolo vale

$$P = P_1 + P_2 =$$

$$= \frac{1}{2}[|a_1|^2 + |a_2|^2 - |b_1|^2 - |b_2|^2]$$

che è possibile scrivere anche in forma vettoriale come:

$$P = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^\star - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^\star \right) =$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{a}^t \cdot \mathbf{a}^\star - \mathbf{b}^t \cdot \mathbf{b}^\star]$$

Proprietà della matrice di scattering

- Se un quadripolo è reciproco, la sua matrice di scattering è simmetrica:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

- Se un quadripolo è simmetrico, la sua matrice ha due soli parametri indipendenti:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$$

- Se un quadripolo è non dissipativo, la coniugata trasposta della matrice è uguale alla sua inversa:

$$(\mathbf{S}^t)^\star = \mathbf{S}^{-1}$$

- Infatti la potenza assorbita deve essere nulla

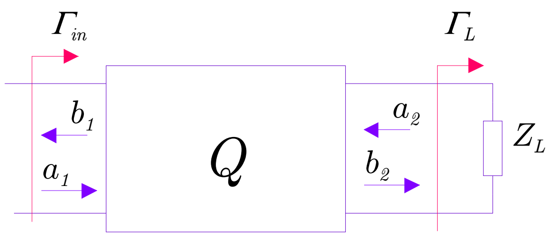
$$P = \frac{1}{2}[\mathbf{a^t} \cdot \mathbf{a}^\star - \mathbf{b^t} \cdot \mathbf{b}^\star] =$$
$$= \frac{1}{2}[\mathbf{a^t} \cdot \mathbf{a}^\star - \mathbf{a^t} \cdot \mathbf{S^t} \cdot \mathbf{S}^\star \cdot \mathbf{a}^\star] =$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{a^t}[\mathbf{I} - \mathbf{S^t} \cdot \mathbf{S}^\star]\mathbf{a}^\star = 0$$

qualunque sia il valore del vettore **a**, da cui la tesi.

Coefficiente di riflessione di ingresso

- Il coefficiente di riflessione di ingresso è il rapporto:

$$\Gamma_{in} \doteq \frac{b_1}{a_1}$$



- Dalle equazioni di definizione dei parametri S si ottiene:

$$b_2 = \frac{a_2}{\Gamma_L} = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{S_{21}\Gamma_L a_1}{1 S_{22}\Gamma_L}$$

che sostituita nella prima equazione dà:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}\frac{S_{21}\Gamma_L a_1}{1 S_{22}\Gamma_L}$$

e quindi:

$$\boxed{\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 S_{22}\Gamma_L}}$$

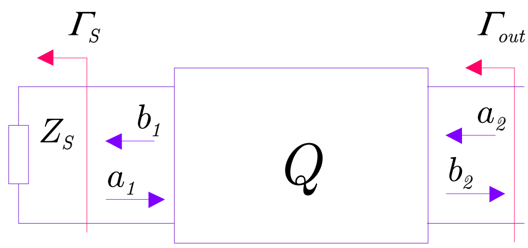
Coefficiente di riflessione di uscita

- Il coefficiente di riflessione di uscita è il rapporto:

$$\Gamma_{out} \doteq \frac{b_2}{a_2}$$

- Con calcoli analoghi si ottiene:

$$\boxed{\Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_S}{1S_{11}\Gamma_S}}$$



- Nelle equazioni precedenti valgono le relazioni di trasformazione tra impedenza e coefficienti di riflessione:

$$\Gamma_S = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0}, \quad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}, \quad \Gamma_{out} = \frac{Z_{out} - Z_0}{Z_{out} + Z_0}$$