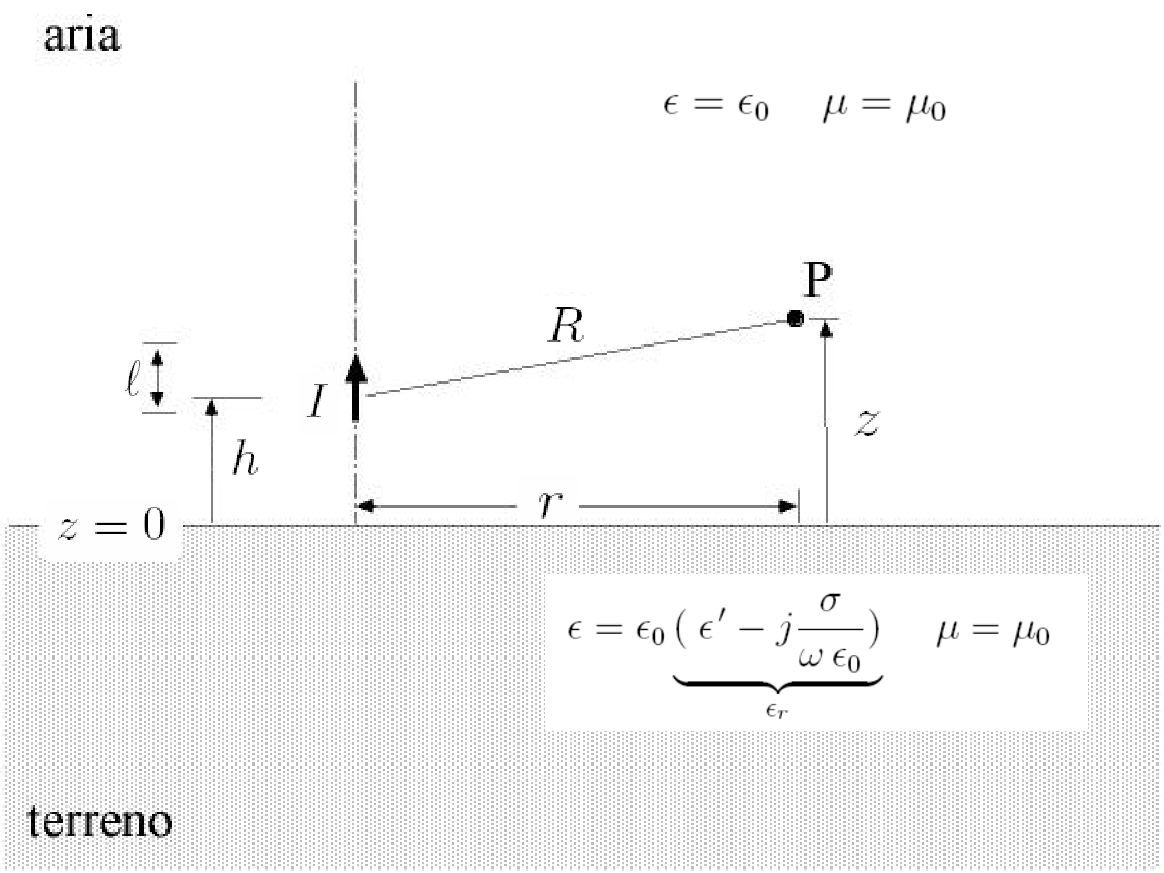
Dipolo verticale su terra piana



per la particolarità della geometria si ha:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}(r, z) \\
\vec{H} &= \vec{H}(r, z) \\
\vec{A} &= \vec{u}_z A(r, z)
\end{aligned}
$$

in aria (z > 0)

$$\vec{E}_0,\ \vec{H}_0,\ A_0$$

$$k = k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}$$

$$\vec{E}_0 = -j\omega\left[A_0\vec{u}_z + \frac{1}{k_0^2}\,\nabla\,\frac{\partial A_0}{\partial z}\right]$$

$$\vec{H}_0 = \frac{\nabla\times\vec{u}_z A_0}{\mu_0}$$

$$\nabla^2 A_0 + k_0^2 A_0 = -\mu_0\, I\ell\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,\delta(z-h)$$

nel terreno (z < 0)

$$\vec{E}_1,\ \vec{H}_1,\ A_1$$

$$k = k_0\sqrt{\epsilon_r}$$

$$\vec{E}_1 = -j\omega\left[A_1\vec{u}_z + \frac{1}{k_0^2\,\epsilon_r}\,\nabla\,\frac{\partial A_1}{\partial z}\right]$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\nabla\times\vec{u}_z A_1}{\mu_0}$$

$$\nabla^2 A_1 + k_0^2\,\epsilon_r A_1 = 0$$

condizione di radiazione

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial A_0}{\partial R} + jk_0\,A_0\right) = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial A_1}{\partial R} + jk_0\sqrt{\epsilon_r}\,A_1\right) = 0$$

continuità delle componenti tangenti di $\vec{E}$ e $\vec{H}$ in $z=0$

$$\vec{u}_z\times(\vec{E}_0-\vec{E}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial A_0(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{1}{\epsilon_r}\left.\frac{\partial A_1(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$\vec{u}_z\times(\vec{H}_0-\vec{H}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad A_0(r,0) = A_1(r,0)$$

esplicitando la soluzione particolare (spazio libero), si pone

$$A_0 = \mu_0 \, I\ell \, \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{4\,\pi\,R} \, + A_0'(r,z) \right) \qquad\qquad R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$$

e, usando la trasformata di Fourier-Bessel, si pone

$$\frac{e^{-jk_0 R}}{4\,\pi\,R} \;=\; \frac{1}{4\,\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma_0\,|z-h\,|}}{\gamma_0} \; J_0(\xi\,r)\;\xi\;d\xi$$

$$A_0'(r,z) \;=\; \frac{1}{4\,\pi} \int_0^\infty \mathcal{A}_0'(\xi, z)\; J_0(\xi\,r)\;\xi\;d\xi$$

$$A_1(r,z) \;=\; \frac{\mu_0\,I\ell}{4\,\pi} \int_0^\infty \mathcal{A}_1(\xi, z)\; J_0(\xi\,r)\;\xi\;d\xi$$

$$\gamma_0 \;=\; \sqrt{\xi^2 - k_0^2} \qquad\qquad \mathrm{Re}(\gamma_0) \geq 0$$

Trasformata di Fourier-Bessel

partendo dalla trasformata doppia di Fourier

$$\mathcal{F}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, e^{-j(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k_x, k_y)\, e^{j(k_x x + k_y y)}\, dk_x\, dk_y$$

con la trasformazione di variabili

$$\begin{cases} x = r\ \cos\varphi \\ y = r\ \sin\varphi \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} k_x = \xi\ \sin\psi \\ k_y = \xi\ \cos\psi \end{cases}$$

si ottiene

$$\mathcal{F}(\xi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(r, \varphi)\, e^{-j\,\xi\, r \sin(\varphi+\psi)}\, r\, dr\, d\varphi$$

$$F(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}(\xi, \psi)\, e^{j\,\xi\, r \sin(\varphi+\psi)}\, \xi\, d\xi\, d\psi$$

se $\quad F(r, \varphi) = F_n(r)\, e^{j\,n\,\varphi} \qquad\qquad (n \text{ intero})$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi, \psi) &= e^{-jn\psi} \int_0^{\infty} F_n(r) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j(n\,\chi - \xi\, r \sin\chi)}\, d\chi \right) r\, dr \\ &= e^{-j\,n\psi} \underbrace{\int_0^{\infty} F_n(r)\ J_n(\xi\, r)\ r\, dr}_{\mathcal{F}_n(\xi)} \qquad\qquad \chi = \varphi + \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n(r)\, e^{j\,n\,\varphi} &= e^{j\,n\,\varphi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_n(\xi) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j(n\,\chi - \xi\, r \sin\chi}\, d\chi \right) \xi\, d\xi \\ &= e^{j\,n\,\varphi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_n(\xi)\, J_n(\xi\, r)\, \xi\, d\xi \end{aligned}$$

la trasformata di Fourier-Bessel è data dalla doppia relazione

$$\mathcal{F}_n(\xi) = \int_0^\infty F_n(r)\, J_n(\xi\, r)\, r\, dr$$

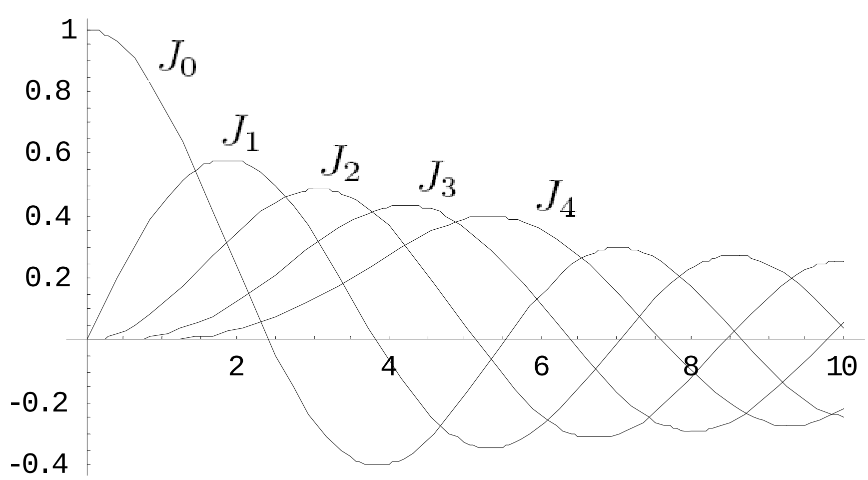
$$F_n(r) = \int_0^\infty \mathcal{F}_n(\xi)\, J_n(\xi\, r)\, \xi\, d\xi$$

dove J_n è la funzione di Bessel del primo tipo, di ordine *n*, data da

$$J_n(z) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(n\chi + z \sin\chi)} d\chi$$

e soluzione dell'equazione di Bessel

$$z\, \frac{d}{d\,z} \left(z\, \frac{d\, J_n(z)}{d\, z} \right) + (z^2 - n^2)\, J_n(z) = 0$$



nel dominio delle trasformate le equazioni diventano

in aria (z > 0)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_0'(\xi, z)}{\partial z^2} - \gamma_0^2\, \mathcal{A}_0'(\xi, z) = 0$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\xi^2 - k_0^2} \qquad \mathrm{Re}(\gamma_0) \geq 0$$

nel terreno (z < 0)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_1(\xi, z)}{\partial z^2} - \gamma_1^2\, \mathcal{A}_1(\xi, z) = 0$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\xi^2 - k_0^2\, \epsilon_r} \qquad \mathrm{Re}(\gamma_1) \geq 0$$

la soluzione è del tipo

$$\mathcal{A}_0'(\xi, z) = c_0'(\xi)\, e^{-\gamma_0\, z}$$

$$\mathcal{A}_1(\xi, z) = c_1(\xi)\, e^{\gamma_1\, z}$$

la condizione di continuità in z = 0 diviene:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\gamma_0\, h}}{\gamma_0} + c_0' &= c_1 \\ e^{-\gamma_0\, h} - \gamma_0\, c_0' &= \frac{\gamma_1}{\epsilon_r}\, c_1 \end{aligned}$$

In aria la soluzione è

(z > 0)

$$c_0'(\xi) = \frac{\epsilon_r\,\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_0(\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1)}\; e^{-\gamma_0\,h}$$

$$\mathcal{A}_0'(\xi, z) = \frac{\epsilon_r\,\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_0(\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1)}\; e^{-\gamma_0(z+h)}$$

$$A_0(r, z) = \frac{\mu_0\,I\ell}{4\,\pi}\;\frac{e^{-jk_0\,R}}{R} + \frac{\mu_0\,I\ell}{4\,\pi}\int_0^\infty \frac{\epsilon_r\,\gamma_0 - \gamma_1}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1}\;\frac{e^{-\gamma_0(z+h)}}{\gamma_0}\;J_0(\xi\,r)\,\xi\,d\xi$$

nel terreno la soluzione è

(z < 0)

$$c_1'(\xi) = \frac{2\,\epsilon_r}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1}\; e^{-\gamma_0\,h}$$

$$\mathcal{A}_1(\xi, z) = \frac{2\,\epsilon_r}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1}\; e^{-\gamma_0\,h}\; e^{\gamma_1 z}$$

$$A_1(r, z) = \frac{\mu_0\,I\ell}{2\,\pi}\int_0^\infty \frac{\epsilon_r\;e^{-\gamma_0\,h}}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1}\; e^{\gamma_1 z}\;J_0(\xi\,r)\,\xi\,d\xi$$

termine in aria

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon_r\,\gamma_0 - \gamma_1}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1}\,\frac{e^{-\gamma_0(z+h)}}{\gamma_0}\,J_0(\xi\,r)\,\xi\,d\xi$$

$$= \int_0^{k_0} \frac{\epsilon_r\,\gamma_0 - \gamma_1}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1}\,\frac{e^{-\gamma_0(z+h)}}{\gamma_0}\,J_0(\xi\,r)\,\xi\,d\xi \longleftarrow I_1$$

$$+ \int_{k_0}^\infty \frac{\epsilon_r\,\gamma_0 - \gamma_1}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1}\,\frac{e^{-\gamma_0(z+h)}}{\gamma_0}\,J_0(\xi\,r)\,\xi\,d\xi$$

nel primo integrale $\xi \leq k_0$ e possiamo porre:

$$\xi = k_0 \sin\vartheta_r \qquad\qquad (0 \leq \vartheta_r \leq \pi/2)$$

risulta

$$\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 \sin^2\vartheta_r - k_0^2} = j k_0 \cos\vartheta_r$$

$$\gamma_1 = \sqrt{k_0^2 \sin^2\vartheta_r - k_0^2\epsilon_r} = j k_0 \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\vartheta_r}$$

$$\frac{\epsilon_r\,\gamma_0 - \gamma_1}{\epsilon_r\,\gamma_0 + \gamma_1} = \frac{\epsilon_r \cos\vartheta_r - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\vartheta_r}}{\epsilon_r \cos\vartheta_r + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\vartheta_r}} = \Gamma_v(\vartheta_r)$$

coefficiente di riflessione delle onde piane uniformi con polarizzazione appartenente al piano d'incidenza

$$I_1 = -j k_0 \int_0^{\pi/2} \Gamma_v(\vartheta_r)\, e^{-j k_0 (z+h)\cos\vartheta_r}\, J_0(k_0 r\,\sin\vartheta_r)\sin\vartheta_r\, d\vartheta_r$$

nel secondo integrale $\xi > k_0$, γ_0 è reale positiva e l'integrando diminuisce esponenzialmente al crescere di *z*. Anche l'integrale, ovviamente, diminuirà molto rapidamente al crescere di *z*.

possiamo interpretare il primo integrale come il contributo di tutte le onde cilindriche (*) emesse dalla sorgente che, incidendo sul terreno sotto qualunque angolo, dopo essere state riflesse, si propagano in tutte le direzioni con componenti radiale e verticale positive.

possiamo interpretare il secondo integrale come il contributo di onde cilindriche, emesse dalla sorgente, che vengono guidate dall'interfaccia terreno-aria (onde superficiali) e danno un contributo significativo al campo totale solo in prossimità dall'interfaccia stessa

(*) l'insieme delle onde cilindriche può essere espresso anche in termini di onde piane, passando dalla trasformata di Fourier-Bessel alla doppia trasformata di Fourier.

valutando asintoticamente i due integrali, si ottiene:

raggio diretto

raggio riflesso

$$E_z = -j\omega\mu_0\, I\ell \left[\frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi\, R} \sin^2\vartheta + \Gamma_v(\vartheta_r) \frac{e^{-jk_0 R_r}}{4\pi\, R_r} \sin^2\vartheta_r \right.$$

$$\left. + \frac{1-\Gamma_v(\vartheta_r)}{\epsilon_r^2} (\epsilon_r^2 - \epsilon_r + \sin^2\vartheta_r)\ F\ \frac{e^{-jk_0 R_r}}{4\pi\, R_r} + \ \ldots \ \right]$$

onda superficiale

termini di ordine superiore in *1*/R *e 1*/R_r

dove

$$R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2} \qquad R_r = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$$

$$\sin\vartheta = r/R \qquad \sin\vartheta_r = r/R_r$$

$$\Gamma_v(\vartheta_r) = \frac{\epsilon_r \cos\vartheta_r - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\vartheta_r}}{\epsilon_r \cos\vartheta_r + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\vartheta_r}}$$

$$F = 1 - j\sqrt{\pi w}\ e^{-w}\ \mathrm{erfc}(j\sqrt{w}\,)$$

$$w = -jk_0 R\ \frac{2(\epsilon_r - \sin^2\vartheta_r)}{\epsilon_r^2 (1 - \Gamma_v(\vartheta_r))^2}$$

in pratica, in un collegamento tra stazioni di terra, *h* e *z* sono molto piccole rispetto a *d*, pertanto essendo

$$R \approx R_r \approx r = d$$

$$\sin\vartheta \approx \sin\vartheta_r \approx 1$$

$$\Gamma_v(\vartheta_r) \approx -1$$

$$|\epsilon_r| \gg 1$$

risulta

$$E_z = \underbrace{-j\omega\mu_0 \, I\ell \, \frac{e^{-jk_0 d}}{4\pi d}}_{\text{contributo di spazio libero}} \; 2\,A_s$$

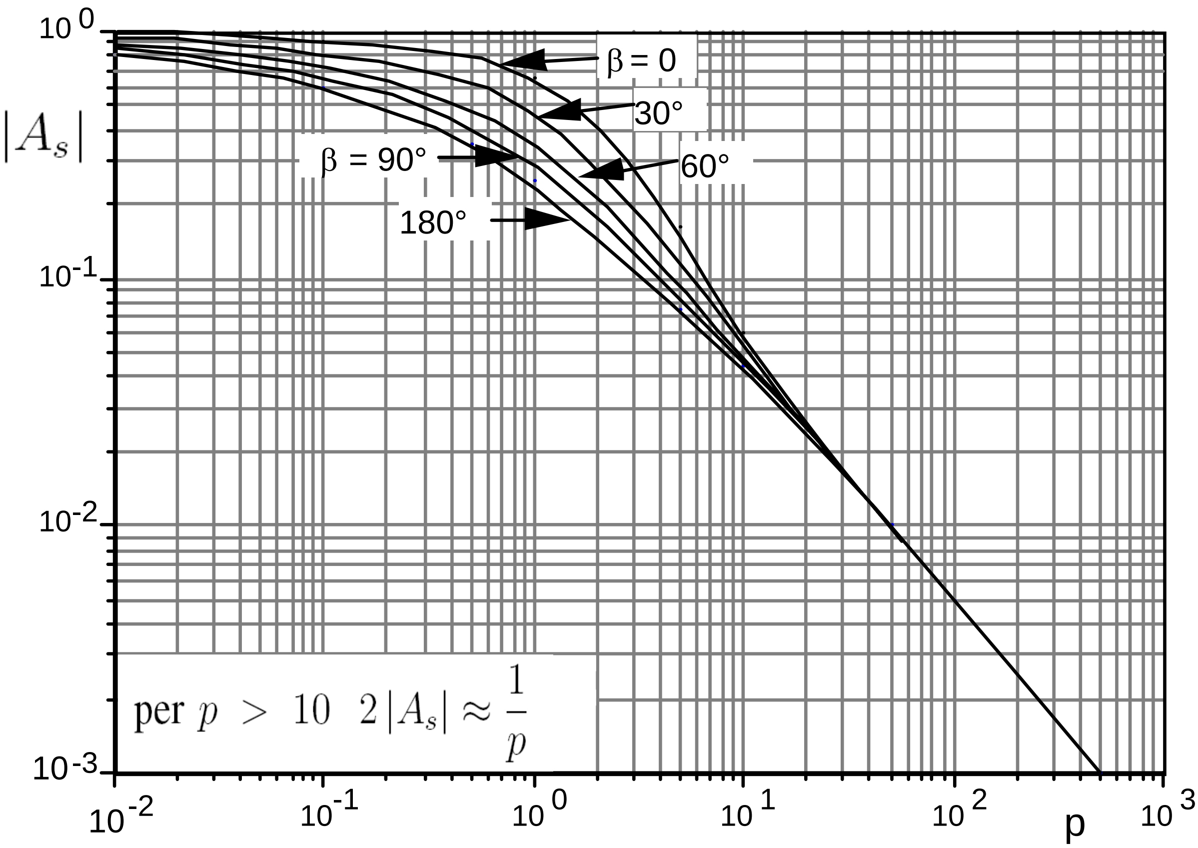
dove

$2A_s = 2A_s(p\,e^{-j\beta}) \approx 2F$ fattore di attenuazione supplementare

$p = |w| \approx \dfrac{k_0\,d}{2\,|\epsilon_r|}$ distanza numerica

$\beta = -\arg(w) \approx \mathrm{tg}^{-1}\,\dfrac{\omega\,\epsilon_0\,\epsilon'}{\sigma}$ fattore di fase

Fattore di attenuazione supplementare dell’onda di terra nell’approssimazione di terra piana



$$p = \pi \frac{d}{\lambda} \frac{\cos\beta}{x}$$

$$\beta = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\epsilon'}{x}$$

$$x = \frac{\sigma}{\omega\,\epsilon_0}$$

l’attenuazione supplementare, calcolata nell’approssimazione di terra piana, risulta accurata fino a distanze dell’ordine di

$$d_{max} = \frac{80}{\sqrt[3]{f_{[\mathrm{MHz}]}}} \ [\mathrm{km}]$$