Propagazione di segnali a banda limitata in mezzi dispersivi

Consideriamo il campo $\vec{\mathcal{E}}(z,t)$ nel dominio del tempo, dipendente per comodità solo dalla coordinata spaziale z. Se esso descrive un fenomeno reale (che inizia a partire da un certo istante e mette in gioco un'energia finita), esiste certamente la trasformata di Fourier rispetto al tempo $\vec{E}(z,\omega)$ di $\vec{\mathcal{E}}(z,t)$ e possiamo scrivere

$$\vec{\mathcal{E}}(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(z,\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$\vec{\mathcal{E}}(z,t)$ è una quantità reale (come tutte le grandezze che hanno un significato fisico), pertanto deve essere

$$\vec{E}(z,-\omega) = \vec{E}^*(z,\omega)$$

per questo motivo, $\vec{\mathcal{E}}(z,t)$ può anche essere scritto nella forma

$$\vec{\mathcal{E}}(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{Re}\left[\int_{0}^{\infty} \vec{E}(z,\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\right]$$

se supponiamo che lo spettro $\vec{E}(z,\omega)$ sia diverso da zero solo per $\omega_o - \Delta\omega_o \leq \omega \leq \omega_o + \Delta\omega_o$ con $\Delta\omega_o \ll \omega_o$ si può anche scrivere

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(z,t) &= \mathrm{Re}\left[e^{j\omega_o t}\vec{E}'(z,t)\right] \\ \vec{E}'(z,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\Delta\omega_o}^{\Delta\omega_o} \vec{E}(z,\omega_o+\omega')\, e^{j\omega' t}\, d\omega' \end{aligned}$$

fasore lentamente variabile nel tempo

se $\vec{\mathcal{E}}(z,t)$ rappresenta un campo che si propaga in un mezzo omogeneo nel verso positivo di z , risulta (come nel caso di campi monocromatici)

$$\vec{E}(z,\omega) = \vec{E}(0,\omega)\, e^{-j\beta z}$$

se il mezzo nel quale avviene la propagazione non è dispersivo nel tempo (le sue proprietà non variano con la frequenza), β è proporzionale a ω

$$\beta = \omega / v_f$$

dove v_f è la velocità di fase, il cui valore dipende solo dal mezzo in cui avviene la propagazione. In questo caso, dalle espressioni precedenti, si ricava

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(z,t) &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left[\int_{\omega_o-\Delta\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega_o} \vec{E}(0,\omega)\, e^{j\omega(t-z/v_f)}\, d\omega\right] \\
&= \vec{\mathcal{E}}(0, t - z/v_f) \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{j\omega_o(t-z/v_f)}\, \vec{E}'(0, t - z/v_f)\right]
\end{aligned}$$

se invece il mezzo in cui avviene la propagazione è dispersivo, per ogni componente spettrale vale ancora la relazione

$$\vec{E}(z,\omega) = \vec{E}(0,\omega)\, e^{-j\beta z}$$

in questo caso però β non è semplicemente proporzionale ad ω, ma la sua dipendenza da ω e più complicata

$$\beta = \beta(\omega)$$

se l'andamento di β nella banda occupata dal segnale è sufficientemente regolare, nella valutazione di $\vec{\mathcal{E}}(z,t)$ è possibile approssimare β con i primi due termini del suo sviluppo in serie di Taylor intorno ad ω_o

$$\beta \approx \beta_o + \frac{\omega - \omega_o}{v_g}$$

$$\beta_o = \beta(\omega_o)$$

$$v_g = \left. \frac{1}{\partial\beta \,/\, \partial\omega} \right|_{\omega=\omega_o}$$ ***velocità di gruppo***

con questa approssimazione, risulta

$$j(\omega t - \beta z) \approx j\omega_o(t - z/v_f) + j(\omega - \omega_o)(t - z/v_g)$$

$$v_f = \frac{\omega_o}{\beta_o}$$ ***velocità di fase***

e infine

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(z,t) &\approx \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left[e^{j\omega_o(t-z/v_f)}\int_{\omega_o-\Delta\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega_o}\vec{E}(0,\omega)\,e^{j(\omega-\omega_o)(t-z/v_g)}\,d\omega\right] \\
&= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left[e^{j\omega_o(t-z/v_f)}\int_{-\Delta\omega_o}^{\Delta\omega_o}\vec{E}(0,\omega_o+\omega')\,e^{j\omega'(t-z/v_g)}\,d\omega'\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{j\omega_o(t-z/v_f)}\,\vec{E}'(0,t-z/v_g)\right]
\end{aligned}
$$

questo risultato sarebbe esatto se i termini superiori dello sviluppo in serie di Taylor di β fossero esattamente nulli. Se volessimo, ad esempio, tener conto di un altro termine dello sviluppo, nell'espressione di $\vec{\mathcal{E}}(z,t)$ dovremmo sostituire $\vec{E}(0,\omega)$ con

$$\vec{E}(0,\omega)\,e^{-j\alpha(\omega-\omega_o)^2 z}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\bigg|_{\omega=\omega_o}$$

anche in questo caso possiamo interpretare il risultato dicendo che il segnale si propaga con la velocità di gruppo, ma, per quanto piccolo sia α , troviamo sempre dei valori sufficientemente grandi di z in cui lo spettro del segnale differisce in modo non trascurabile dallo spettro in $z = 0$.
Per propagazione su grandi distanze, dobbiamo aspettarci quindi una degradazione del segnale.