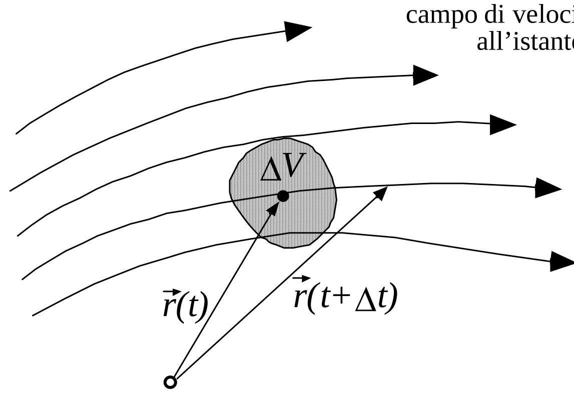
Equazione costitutiva del plasma freddo



$$m_e \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \vec{\mathcal{U}}(\vec{r},t) = \underbrace{- \, q_e \left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) + \vec{\mathcal{U}}(\vec{r},t) \times \vec{\mathcal{B}}_{tot}(\vec{r},t) \right)}_{\text{forza di Lorentz}} \; - \; \underbrace{k \, \vec{\mathcal{U}}(\vec{r},t)}_{\text{forza d'attrito}}$$

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) = -q_e \, \mathcal{N}_e(\vec{r},t) \, \vec{\mathcal{U}}(\vec{r},t)$$

m_e	massa dell'elettrone ($0.911 \; 10^{-30}$ Kg)
$\vec{\mathcal{U}}(\vec{r},t)$	campo di velocità degli elettroni
q_e	carica dell'elettrone ($1.60 \; 10^{-19}$ C)
$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$	campo elettrico a radiofrequenza
$\vec{\mathcal{B}}_{tot}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) + \vec{B}_0(\vec{r})$	induzione magnetica totale
$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$	induzione magnetica a radiofrequenza
$\vec{B}_0(\vec{r})$	induzione magnetica terrestre ($\approx 5 \; 10^{-4}$ T)
k	coefficiente d'attrito
$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t)$	densità di corrente
$\mathcal{N}_e(\vec{r},t)$	concentrazione elettronica

T : Tesla = Wb / m^2 = 10^4 Gauss

trascurando tutti i termini non lineari, (questo è possibile se si ammette che tutti i campi dipendenti dal tempo siano sufficientemente piccoli da costituire una piccola perturbazione dello stato di equilibrio) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) + \nu\,\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) + \omega_c\,\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) \times \vec{u}_0 = \epsilon_0\,\omega_p^2\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$$

dove

$$\omega_p = \sqrt{\frac{q_e^2\,N_e}{m_e\,\epsilon_0}} \qquad \text{pulsazione di plasma}$$

$$\omega_c = \frac{q_e\,|\vec{B}_0|}{m_e} \qquad \text{pulsazione ciclotronica}$$

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{B}_0}{|\vec{B}_0|} \qquad \text{versore nella direzione del campo magnetico terrestre}$$

$$\nu = \frac{k}{m_e} \qquad \text{frequenza di collisione}$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 8.97\sqrt{N_e} \quad \text{[Hz]} \qquad (\,N_e\ [\mathrm{m}^{-3}]\,)$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 2.80\;10^{10}\,|\vec{B}_0| \quad \text{[Hz]} \qquad (\,\vec{B}_0\ [\mathrm{T}\,]\,)$$

nella bassa atmosfera terrestre $f_c \approx 1.4$ MHz in regime sinusoidale, assumendo $\vec{u}_0 = \vec{u}_z$ si ha

$$\left| \begin{array}{ccc} \nu + j\,\omega & \omega_c & 0 \\ -\omega_c & \nu + j\,\omega & 0 \\ 0 & 0 & \nu + j\,\omega \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} J_x \\ J_y \\ J_z \end{array} \right| = \epsilon_0\,\omega_p^2 \left| \begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ E_z \end{array} \right|$$

invertendo la matrice, si trova l'espressione esplicita

$$\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \epsilon_0\,\omega_p^2 \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\nu + j\omega}{(\nu + j\omega)^2 + \omega_c^2} & \dfrac{-\,\omega_c}{(\nu + j\omega)^2 + \omega_c^2} & 0 \\ \dfrac{\omega_c}{(\nu + j\omega)^2 + \omega_c^2} & \dfrac{\nu + j\omega}{(\nu + j\omega)^2 + \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\nu + j\omega} \end{array} \right|$$

Costante dielettrica efficace del plasma

dai risultati precedenti si può anche porre

$$j\,\omega\,\epsilon_0\vec{E} + \vec{J} \;=\; j\,\omega\,\epsilon_0\;\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{E}$$

$$\overleftrightarrow{\epsilon} \;=\; \begin{vmatrix} \epsilon_\perp & -j\,\epsilon_g & 0 \\ j\,\epsilon_g & \epsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\parallel \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_\perp \;=\; 1 - \frac{\omega_p^2\,(\omega - j\nu)}{\omega\,((\omega - j\nu)^2 - \omega_c^2)}$$

$$\epsilon_g \;=\; \frac{\omega_p^2\,\omega_c}{\omega\,((\omega - j\nu)^2 - \omega_c^2)}$$

$$\epsilon_\parallel \;=\; 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega - j\nu)}$$

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \;\epsilon_\perp\,(\vec{u}_x\vec{u}_x + \vec{u}_y\vec{u}_y) + j\,\epsilon_g\,(\vec{u}_y\vec{u}_x - \vec{u}_x\vec{u}_y) + \epsilon_\parallel\,\vec{u}_z\vec{u}_z$$

Onde piane nel plasma

assumendo per il campo elettrico l'espressione generica di un'onda piana, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0\, e^{-j\,\vec{\beta}\cdot\vec{r}} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0\, e^{-j\,\vec{\beta}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

le equazioni del campo impongono

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{E} &= -j\,\omega\vec{B} & &\Longrightarrow & &\vec{\beta}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \\ \nabla\times\vec{B} &= j\,\omega\,\mu_0\,\epsilon_0\,\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{E} & &\Longrightarrow & &\beta^2\vec{E} - \vec{\beta}\,\vec{\beta}\cdot\vec{E} - k_0^2\,\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} &= 0 & &\Longrightarrow & &\vec{\beta}\cdot\overleftrightarrow{\epsilon}\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 & &\Longrightarrow & &\vec{\beta}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{onde TM} \end{aligned}$$

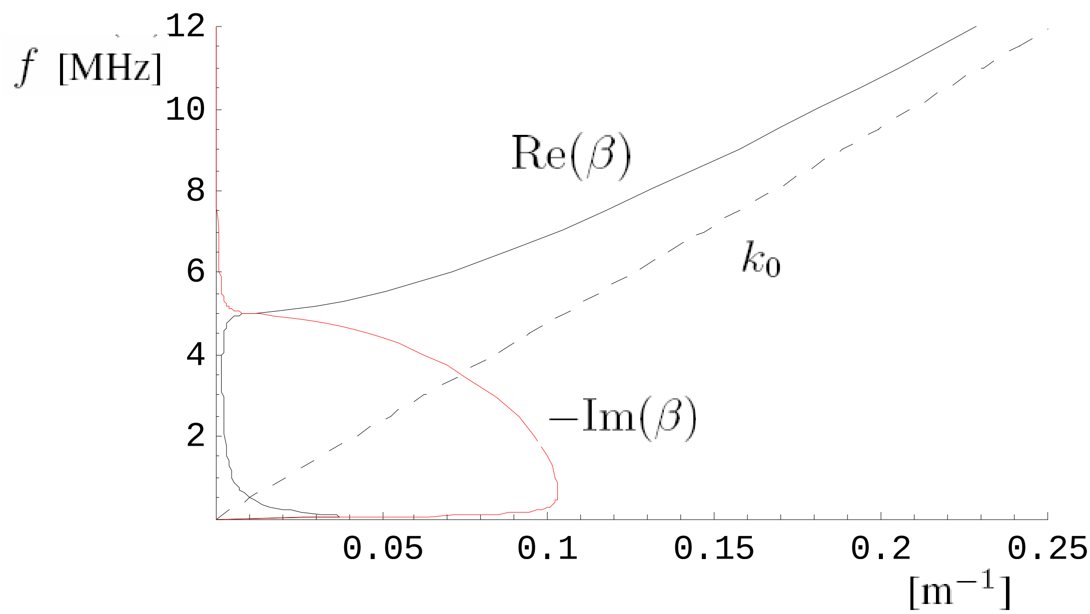
$$\beta^2 = \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} \qquad k_0^2 = \omega^2\,\epsilon_0\,\mu_0$$

la soluzione generale del problema comporta di determinare le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\left|\begin{array}{ccc} \beta_y^2+\beta_z^2-k_0^2\,\epsilon_\perp & -\beta_x\,\beta_y+j\,k_0^2\,\epsilon_g & -\beta_x\,\beta_z \\ -\beta_x\,\beta_y-j\,k_0^2\,\epsilon_g & \beta_x^2+\beta_z^2-k_0^2\,\epsilon_\perp & -\beta_y\,\beta_z \\ -\beta_x\,\beta_z & -\beta_y\,\beta_z & \beta_x^2+\beta_y^2-k_0^2\,\epsilon_\parallel \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ E_z \end{array}\right| = 0$$

Dispersione nel plasma isotropo

$$\beta \;=\; \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega-j\nu)}}$$



$$\begin{aligned}\omega_p &= 2\pi\ 5.0\ 10^6\ \text{ rad/s}\\ \omega_c &= 0\\ \nu &= 2\pi\ 10^5\qquad \text{rad/s}\end{aligned}$$

Propagazione nella direzione di B_0

ponendo nel sistema generale $\beta_x = \beta_y = 0 \qquad \beta = \beta_z$
si trova l'equazione omogenea

$$\begin{vmatrix} \beta^2 - k_0^2\,\epsilon_\perp & j\,k_0^2\,\epsilon_g & 0 \\ -j\,k_0^2\,\epsilon_g & \beta^2 - k_0^2\,\epsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & -k_0^2\,\epsilon_\parallel \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = 0$$

che ammette le due soluzioni indipendenti

$$\beta_o = \pm\, k_0 \sqrt{\epsilon_\perp + \epsilon_g} \qquad E_y = jE_x \qquad E_z = 0$$

onda ordinaria

$$\beta_e = \pm\, k_0 \sqrt{\epsilon_\perp - \epsilon_g} \qquad E_y = -jE_x \qquad E_z = 0$$

onda straordinaria

le due soluzioni rappresentano onde TEM polarizzate circolarmente in versi opposti

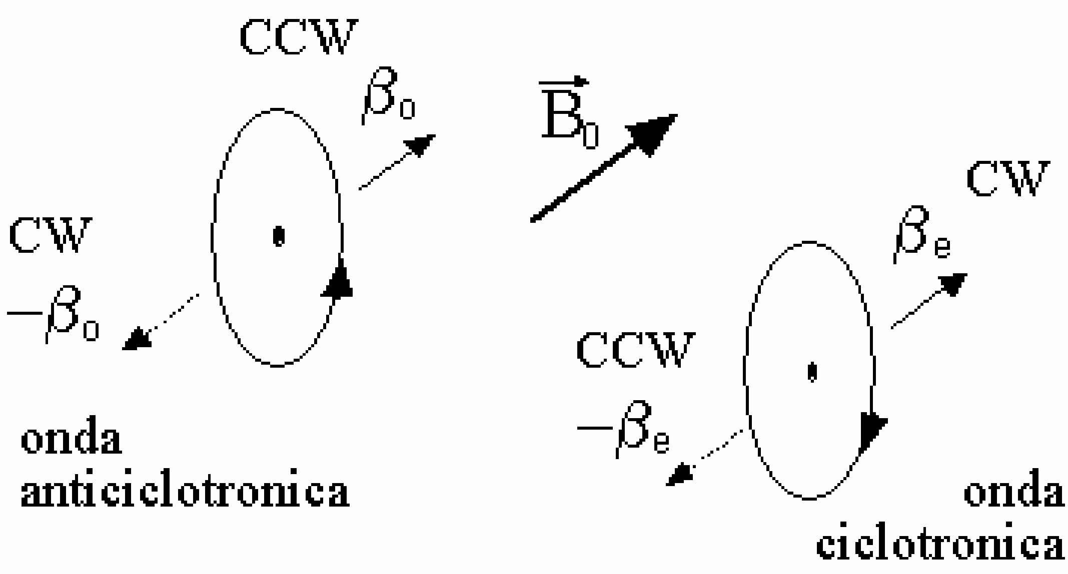
Propagazione nella direzione di B_0

onda ordinaria o anticiclotronica

$$\beta_o = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega - j\nu + \omega_c\right)}}$$

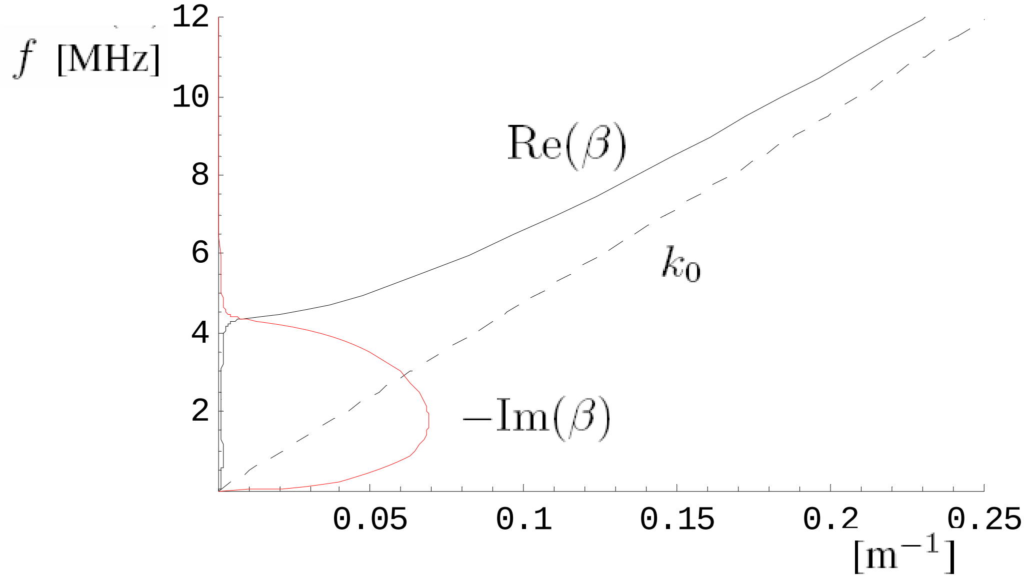
onda straordinaria o ciclotronica

$$\beta_e = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega - j\nu - \omega_c\right)}}$$

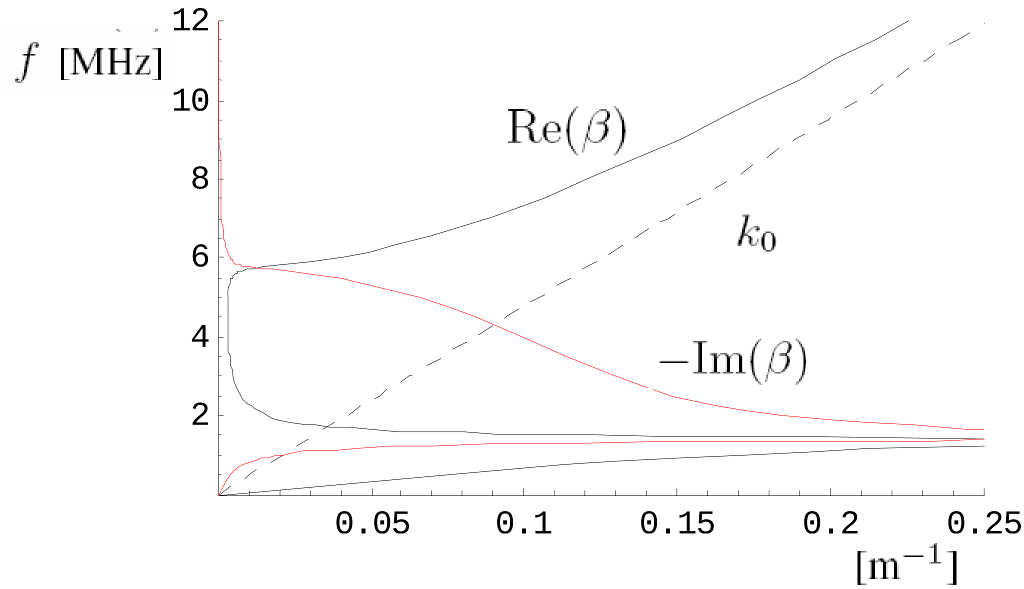


Propagazione nella direzione di B_0

onda ordinaria



onda straordinaria



$$\omega_p = 2\pi\ 5.0\ 10^6 \ \text{rad/s}$$
$$\omega_c = 2\pi\ 1.4\ 10^6 \ \text{rad/s}$$
$$\nu = 2\pi\ 10^5 \ \text{rad/s}$$

Effetto Faraday

La soluzione generale nel caso di propagazione parallela alla direzione del campo magnetico è data dalla sovrapposizione delle due onde ordinaria e straordinaria:

$$\vec{E}(z) \;=\; E_o\,(\vec{u}_x + j\,\vec{u}_y)\,e^{-j\beta_o z} + E_e\,(\vec{u}_x - j\,\vec{u}_y)\,e^{-j\beta_e z}$$

supponiamo che nella sezione z = 0 il campo sia polarizzato linearmente, ad esempio nella direzione x:

$$\vec{E}(0)\cdot\vec{u}_y = 0 \Longrightarrow E_o = E_e$$

pertanto il campo risulta:

$$\vec{E}(z) = E_o\,e^{-j\,\frac{(\beta_o+\beta_e)\,z}{2}}\left[(\vec{u}_x + j\,\vec{u}_y)\,e^{-j\,\frac{(\beta_o-\beta_e)\,z}{2}} + (\vec{u}_x - j\,\vec{u}_y)\,e^{j\,\frac{(\beta_o-\beta_e)\,z}{2}}\right]$$

$$= 2\,E_o\,e^{-j\,\frac{(\beta_o+\beta_e)\,z}{2}}\left[\,\vec{u}_x\,\cos\frac{(\beta_o-\beta_e)\,z}{2} + \vec{u}_y\,\sin\frac{(\beta_o-\beta_e)\,z}{2}\,\right]$$

evidentemente il campo è polarizzato linearmente ovunque, ma la direzione di polarizzazione nella generica sezione z risulta ruotata, rispetto alla direzione di polarizzazione in z = 0 dell’angolo

$$\theta = \frac{(\beta_o-\beta_e)\,z}{2}$$

è pure evidente che il campo polarizzato linearmente si propaga con costante di fase pari alla media delle costanti di fase dell’onda ordinaria e straordinaria.

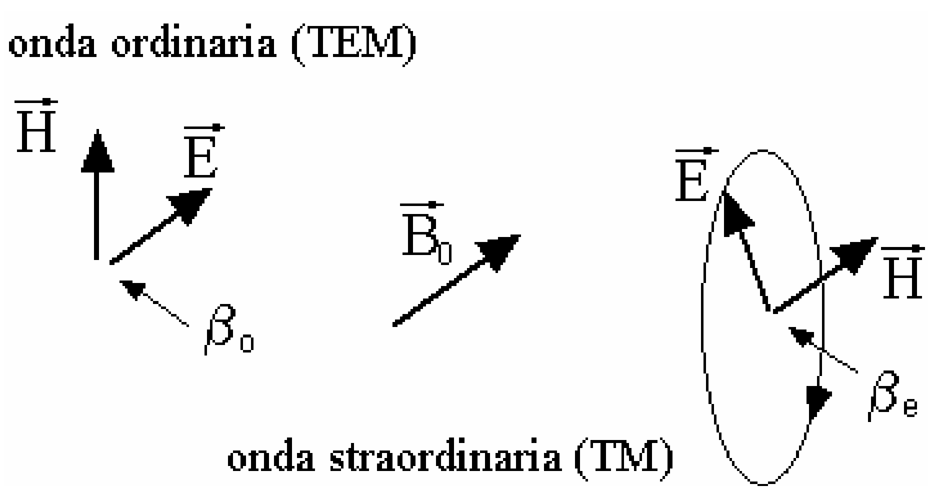
Propagazione in direzione perpendicolare a B_0

onda ordinaria

$$\beta_o = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega - j\nu)}}$$

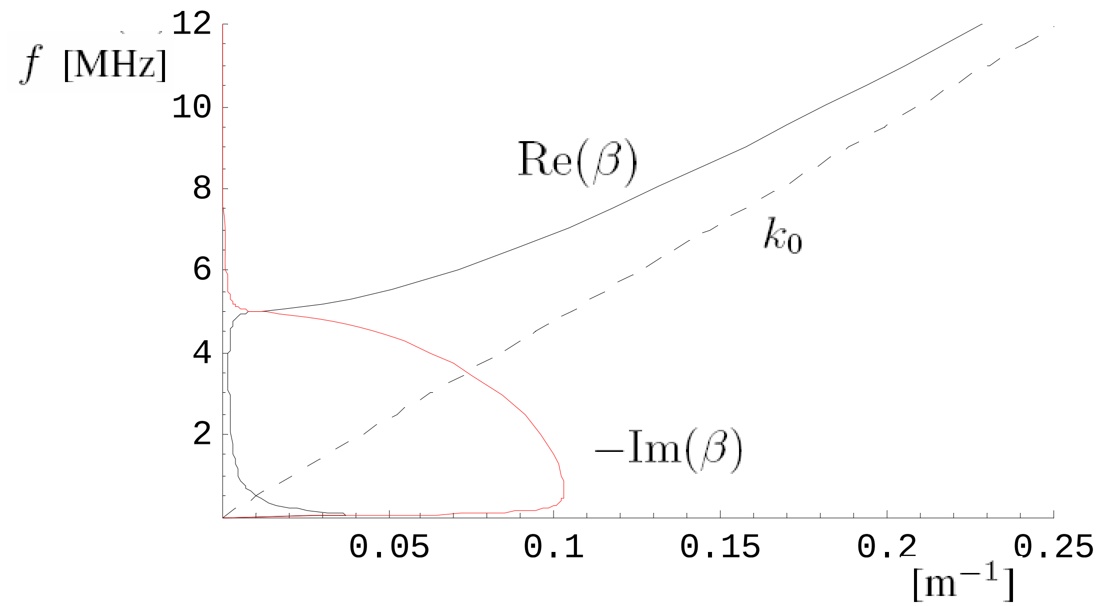
onda straordinaria

$$\beta_e = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)}}{1 - \dfrac{\omega\,\omega_c^2}{(\omega - j\nu)\,(\omega(\omega - j\nu) - \omega_p^2)}}}$$

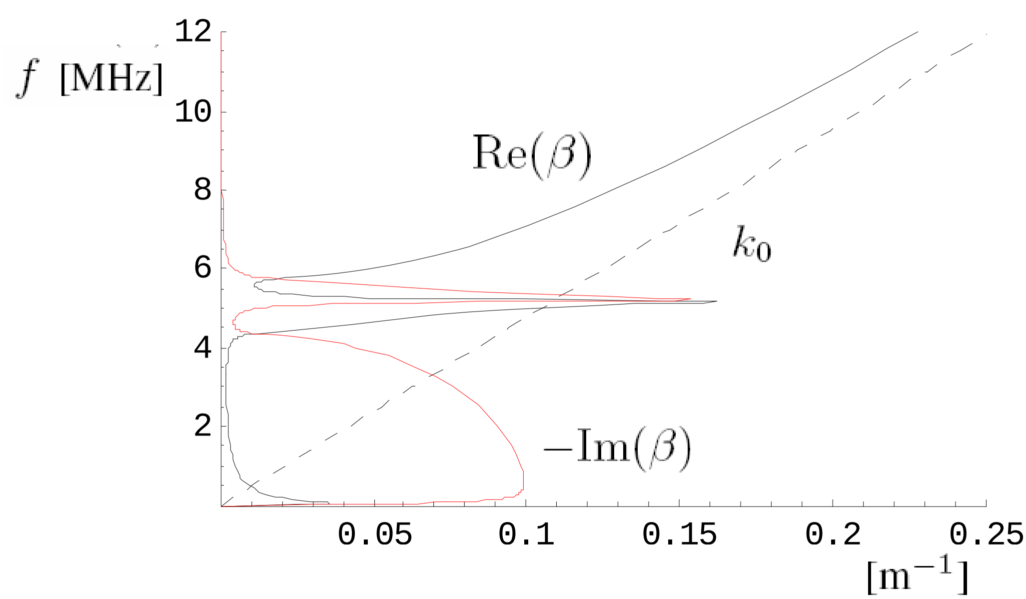


Propagazione in direzione perpendicolare a B_0

onda ordinaria



onda straordinaria



$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi\ 5.0\ 10^6 \ \text{rad/s} \\ \omega_c &= 2\pi\ 1.4\ 10^6 \ \text{rad/s} \\ \nu &= 2\pi\ 10^5 \quad\ \ \text{rad/s} \end{aligned}$$

Propagazione in direzione generica

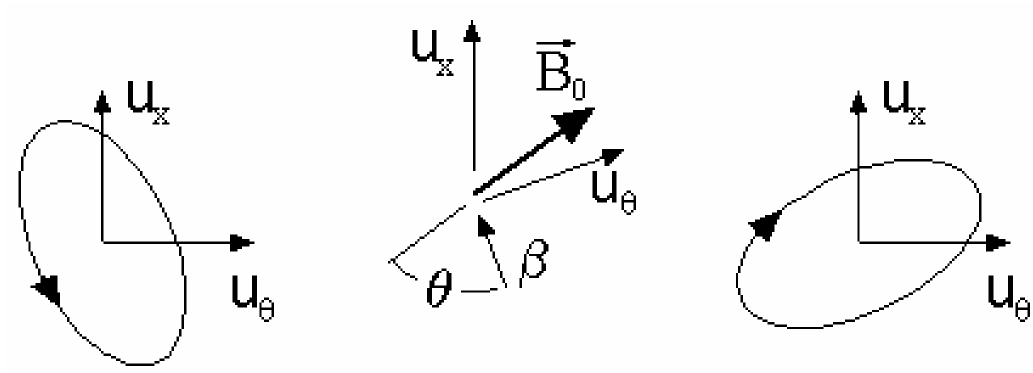
onda ordinaria

$$\beta_o \;=\; \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{X}{1-\frac{Y_{\mathrm{T}}^2}{2(1-X)}+\sqrt{\frac{Y_{\mathrm{T}}^4}{4(1-X)^2}+Y_{\mathrm{L}}^2}}}$$

onda straordinaria

$$\beta_e \;=\; \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{X}{1-\frac{Y_{\mathrm{T}}^2}{2(1-X)}-\sqrt{\frac{Y_{\mathrm{T}}^4}{4(1-X)^2}+Y_{\mathrm{L}}^2}}}$$

$$X=\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-j\,\nu)} \qquad Y_{\mathrm{T}}=\frac{\omega_c\ \sin\theta}{\omega-j\,\nu} \qquad Y_{\mathrm{L}}=\frac{\omega_c\ \cos\theta}{\omega-j\,\nu}$$



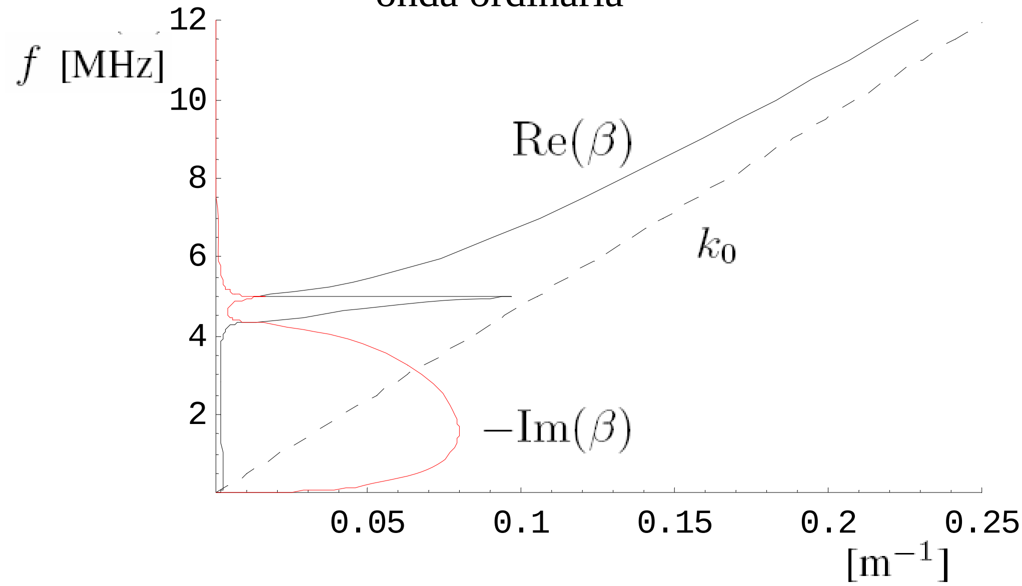
onda ordinaria (TM)

onda straordinaria (TM)

Propagazione in direzione generica

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi\ 5.0\ 10^6 \ \text{rad/s} \\ \omega_c &= 0 \\ \nu &= 2\pi\ 10^5 \quad \text{rad/s} \\ \theta &= \pi/3 \end{aligned}$$

onda ordinaria



onda straordinaria